

Е. Н. МАКВЕЦОВ - МОДЕЛИ ИЗ КУБИКОВ

Е. Н. МАКВЕЦОВ

ИЗ МОДЕЛИ КУБИКОВ



Е. Н. МАКВЕЦОВ

МОДЕЛИ
ИЗ _____
КУБИКОВ



МОСКВА
«СОВЕТСКОЕ РАДИО»
1978

ББК 38.844
М 15
УДК 621.396.6.001.57

**Редакция литературы по вопросам космической
радиоэлектроники**

Маквецов Е. Н.

М 15 Модели из кубиков. — М.: Сов. радио, 1978. —
192 с., ил.

55 коп.

В доступной форме показано, как применение метода конечных разностей, удобного для расчетов на ЦВМ, облегчает моделирование тепловых и механических процессов в конструкциях радиоаппаратуры. Метод основан на представлении сложных физических процессов, происходящих в больших объемах, простыми процессами, протекающими в малых объемах кубической формы.

Книга адресована в первую очередь радиоинженерам, занимающимся тепловыми и механическими расчетами, она будет полезна аспирантам и студентам, а также широкому кругу читателей, интересующихся вопросами решения на ЦВМ крайних задач математической физики.

М $\frac{30401-051}{046(01)-78}$ 19-78

ББК 38.844

От автора

Многие задачи, которые приходится решать инженеру-конструктору, очень сложны, поскольку рассчитываемые физические процессы всегда протекают в пространстве четырех измерений: трех координат и времени. Расчет сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями математической физики. В эти уравнения входят четыре независимые переменные.

Иногда удается упростить задачу настолько, что в уравнениях остается одна независимая переменная, т. е. задача приводится к одномерной. Полученные таким образом дифференциальные уравнения содержат одну независимую переменную и могут быть в принципе решены точными аналитическими методами. Аналитические решения различных одномерных задач рассматриваются в ряде специальных дисциплин. Например, одномерные задачи расчета прочности решаются в курсе сопротивления материалов, где в качестве независимой переменной фигурирует одна из координат. Задачи расчета электрических процессов решаются в теории цепей. В качестве независимой переменной сохраняется время. А если рассчитывают электрические процессы в линейных цепях и если закон изменения искомых токов и напряжений во времени заранее известен, например он является гармоническим, то в расчете исключают и время и расчетные уравнения становятся алгебраическими. Различные одномерные задачи решаются точно, например, в теоретической механике, теории механизмов и машин.

Приведение задачи к одномерному виду всегда связано с ее идеализацией. В идеальной задаче приходится пренебрегать рядом второстепенных факторов, влияющих на ход физического процесса. Отсюда возникают погрешности, которые трудно проконтролировать. Чем сложнее конструкция и условия, в которых она работает, тем труднее разработать одномерную расчетную модель, оставляющую надежду на достаточную достоверность результатов расчета.

В большинстве случаев принципиально невозможно привести задачу к одномерному виду и решить ее точными аналитическими методами. Постановке многомерных задач посвящены более сложные дисциплины, чем упомянутые выше. При решении, например, задач по расчету прочности приходится переходить от сопротивления материалов к общей теории упругости. Постановке многомерных электротехнических задач посвящаются курсы электродинамики. Тепловые процессы рассматриваются в курсах теории теплопередачи и т. д. Глубокое изучение этих дисциплин весьма сложно.

Особенно тяжело приходится конструктору радиоэлектронной аппаратуры (РЭА). В радиоконструкциях тесно сплелись теория упругости и электродинамика, теплопередача и аэродинамика. Если допустить в какой-то области ошибку, то аппаратура работать не будет. А тут еще нужно учитывать сложные внешние воздействия на конструкцию, а также множество мелких деталей, бороться за малые габариты и вес и в довершение всего — нет обобщенного положительного опыта работы радиоконструкторов прошлых поколений и только потому, что весь опыт накапливается какие-нибудь 10—15 лет. Вот и приходится радиоконструктору обращаться к единственному, унаследованному из опыта прошлых поколений приему: «методу проб и ошибок». Построил конструкцию, провел испытания, убедился, что конструкция плохая, построил другую и т. д. Хороший этот метод? — Ниже среднего. Недостатки его хорошо известны. Но, к сожалению, он является пока основным. Методы теоретического расчета механических и тепловых процессов в радиоконструкциях только начинают разрабатываться. На пути их создания встречаются большие трудности, связанные с овладением не только указанными дисциплинами, чтобы грамотно поставить задачу, но и еще несколькими не менее сложными дисциплинами, чтобы эту задачу решить. Преодолеть эти трудности помогают различные приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Среди конструкторов радиоэлектронной аппаратуры все большей популярностью пользуется метод конечных разностей, или метод сеток. Можно было бы его назвать и *методом кубиков*, поскольку в основе его лежит построение моделей сложных физических процессов, происходящих в больших объемах пространства, из простых

элементарных процессов, происходящих в малом объеме обычно кубической формы.

Разностные методы приводят, как правило, к огромным объемам вычислений. Без современных цифровых вычислительных машин здесь обойтись нельзя.

Электронные цифровые вычислительные машины (ЭЦВМ) находят все большее применение в практике проектирования радиоаппаратуры. С помощью машин производят компоновку деталей, трассировку проводников, рассчитывают электрические процессы. Метод конечных разностей открывает широкие возможности применения ЭЦВМ для расчетов механических и тепловых процессов в различных конструкциях. Популяризации этого метода среди конструкторов разных специальностей и посвящена эта книга.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, имеющих подготовку в объеме начальных курсов технических вузов. Большую надежду возлагает автор также на здравый смысл и энтузиазм читателя. Материал преподносится на «физическом» уровне строгости, поэтому некоторые положения читателю придется принять на веру или изучить по книгам, в которых дается строгая теория разностных схем, например [2, 4, 8, 9]. Несмотря на популярную форму изложения и забавный характер некоторых рисунков, выполненных автором совместно с аспирантом Г. С. Таньковым, книга ставит своей целью не только ознакомить читателя с методами построения моделей механических и тепловых процессов, но подвести его к решению практических задач.

В процессе работы над рукописью автор постоянно чувствовал поддержку и практическую помощь профессора В. Б. Пестрякова, канд. техн. наук В. А. Ермолаева, канд. техн. наук А. С. Синиченкова и канд. техн. наук Г. А. Дмитриева. Автор выражает им глубокую благодарность за ценные советы и замечания, сделанные при обсуждении рукописи.



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этой главе мы коснемся некоторых предварительных сведений, чтобы подготовить читателя к порядку рассуждений, используемому в книге.

Любому конструктору, а конструктору радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) особенно, в практической деятельности постоянно приходится сталкиваться со многими физическими явлениями: механическими, тепловыми, аэродинамическими, электродинамическими. Например, на радиоаппаратуру, установленную в самолете или ракете, передаются вибрации от корпуса. Она испытывает те же перегрузки, что и космонавт. В процессе работы в радиоэлементах выделяется тепло, нагреваются сами элементы и несущие их конструкции. Для охлаждения приходится принимать специальные меры. Вибрации конструкции, тепловые и воздушные потоки, электромагнитные волны образуют очень сложную картину.

Почему мы считаем эти явления сложными?

Ничего сложного нет в том, что, скажем, человек открыл форточку и проветрил помещение или разжег костер и стало теплее. Да, с точки зрения наших житейских понятий — ничего сложного в этих явлениях нет. Но если постараться изобразить на бумаге картину распределения потока воздуха в комнате с открытой форточкой или картину тепловых потоков от костра, то придется поломать голову и поставить несложные опыты, например с отклонением пламени горящей свечи (рис. 1.1). А при попытке рассчитать эти потоки, пожалуй, ничего не выйдет, хотя комната имеет относительно простую форму прямоугольного параллелепипеда. Пространство у костра еще проще для расчета. Его можно представить в виде полубесконечного пространства, ограниченного с одной стороны землей.

Сложность таких задач состоит прежде всего в том, что они многомерны. Процессы в них протекают в направлении трех координат и времени.

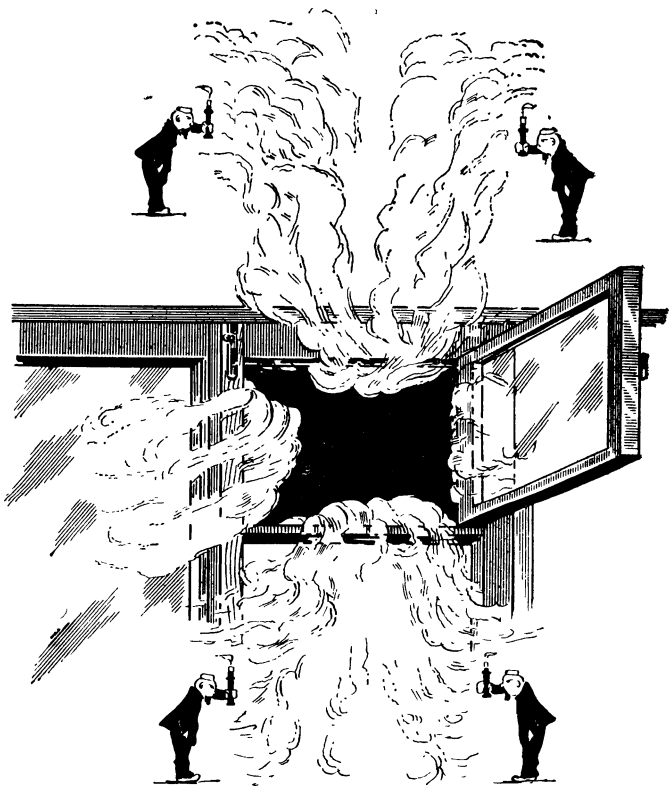


Рис. 1.1.

1.1. В элементарном объеме

Если рассматривать явления, происходящие в какой-либо среде, в малом или, как говорят, элементарном объеме, то они оказываются достаточно простыми для понимания и количественного описания. Другими словами, записать общую зависимость между величинами, характеризующими поведение среды в элементарном объеме, несложно. Например, в механических полях упругих деформаций каждый элементарный объем в упругой среде должен находиться в динамическом равновесии, т. е. сумма всех сил, действующих на этот объем, должна быть равна нулю. Равенство нулю всех внешних и внутренних сил вытекает из закона сохранения импуль-

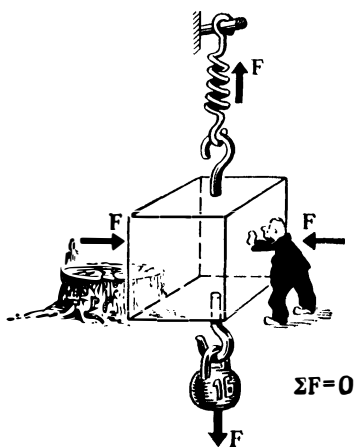


Рис. 1.2.

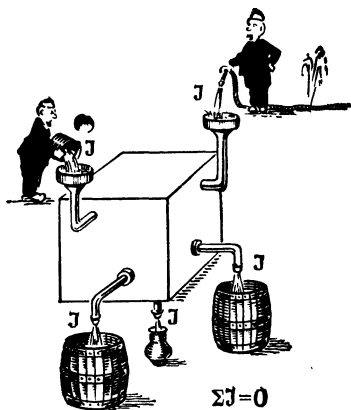


Рис. 1.3.

са и может быть записано в виде уравнения равновесия (рис. 1.2).

Для понимания процессов в жидких и газообразных средах и их количественного описания к закону сохранения импульса следует добавить еще закон сохранения материи или уравнение неразрывности. Для элементарного объема этот закон говорит о том, что накопление вещества определяется разницей между его приходом и расходом (рис. 1.3).

При изучении процессов, связанных с энергообменом, например тепловых процессов, используют закон сохранения энергии. Для элементарного объема он говорит о том, что сумма притекающей, утекающей и поглощаемой (выделяемой) энергии равна нулю.

Итак, три непогрешимых фундаментальных закона природы: 1. Закон сохранения импульса. 2. Закон сохранения материи. 3. Закон сохранения энергии.

И три уравнения для элементарного объема: 1. Сумма сил равна нулю. 2. Сумма потоков вещества равна нулю. 3. Сумма потоков энергии равна нулю.

Последние два уравнения справедливы лишь в случае, когда вещество или энергия не поглощается или не выделяется внутри элементарного объема и не происходит их накопления. Если же происходит поглощение, выделение или накопление, это можно учесть в урав-

нениях введением некоторых дополнительных потоков, и уравнения остаются в силе.

Будем строить дальнейшие рассуждения на основании трех указанных законов природы и соответствующих им уравнений равновесия. Помимо законов сохранения, нам будут нужны еще некоторые гипотезы о поведении среды, для которой строятся уравнения равновесия. Эти гипотезы связывают между собой различные характеристики движения.

1.2. Гипотеза о свойствах среды

Механические, электрические и тепловые процессы связаны со взаимодействием частиц или тел в различных средах и характеризуются многими физическими величинами. К ним относятся: положение, скорость и ускорение частиц, температура, потенциал и напряженность электрического поля, объемная плотность вещества или объемная плотность заряда, напряженность магнитного поля, магнитная индукция. Все эти величины взаимосвязаны, однако степень их влияния друг на друга различна. Это позволяет упростить задачу и рассматривать не всю картину, а только отдельные части. Например, при рассмотрении механических процессов не учитывать электрических и магнитных взаимодействий и, наоборот.

Но, чтобы описать количественно картину каждого из этих процессов, нам потребуется гипотеза о свойствах среды. Начнем с описания механических процессов в упругой среде, т. е. в твердом теле.

Основной характеристикой движения в такой среде является перемещение частицы или некоторого малого объема относительно произвольной начальной точки отсчета. Для упругих тел в качестве точки отсчета удобно выбрать такую, в которой находилась частица, когда тело было в недеформированном состоянии. Таким образом, перемещения определяются относительно положения равновесия.

На основании этой характеристики можно получить ряд производных характеристик. Для каждой частицы в отдельности производная от перемещения по времени определяет ее скорость, вторая производная — ускорение, третья — скорость нарастания ускорения и т. д. Несколько сложнее обстоит дело при взаимодействии частиц. Здесь удобно рассматривать застывшие во времени

картины движения как кинокадры. При этом появляются две категории производных величин, зависящих от взаимного расположения частиц в такой застывшей картине.

К первой категории относятся величины, характеризующие геометрию взаимного расположения. Их называют *деформациями*. Можно получить ряд производных от деформаций по времени, например скорость деформаций, ускорение деформаций и т. д.

Ко второй категории относятся величины, определяющие силу взаимодействия между частицами или малыми объемами. Эти величины называют *напряжениями* и определяют количественно как среднюю силу, приходящуюся на единичную площадь поверхности раздела между двумя объемами тела.

Деформации и напряжения определяются взаимным расположением частиц, поэтому между ними должна быть связь. Это означает, что для каждого конкретного упругого тела величина напряжений однозначно определяет величину деформаций и наоборот. При этом величина напряжений может зависеть также от скорости деформаций, их ускорения и т. д. Эта функциональная связь довольно сложна и является нелинейной. Но для большинства практических приложений связь между деформацией и напряжением считают линейной. Для случая продольного растяжения или сжатия упругих тел

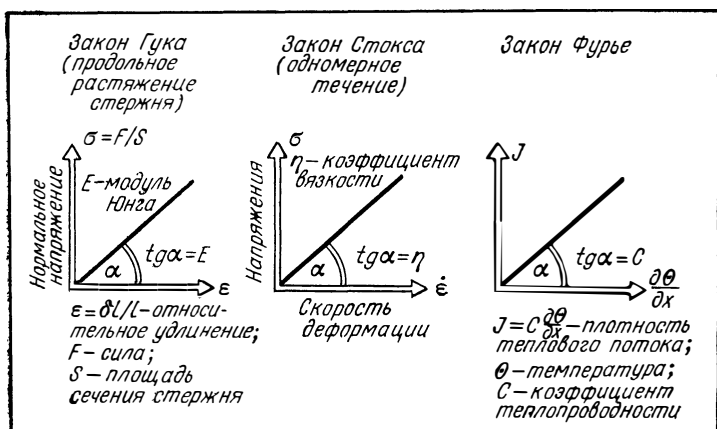


Рис. 1.4.

в виде стержня коэффициент пропорциональности называют модулем упругости, или модулем Юнга, и обозначают буквой E (рис. 1.4).

Более сложный случай деформирования рассмотрен в гл. 3.

В жидкостях и газах величина напряжения оказывается пропорциональной скорости деформации. Такие среды называют вязкими, а коэффициент пропорциональности называют коэффициентом вязкости.

Таким образом, гипотеза о линейности среды предполагает прямую пропорциональную зависимость напряжения от деформации или от скорости деформаций. Эти гипотезы связывают между собой силы и перемещения. Такую связь между напряжением и деформацией называют законом. Для упругих тел она определяется законом Гука, для вязких — законом Стокса.

Гипотеза о линейности свойств среды применяется также при тепловых расчетах. В случае распространения тепла в твердом теле предполагается прямая пропорциональная зависимость между потоками тепла и градиентом температуры (первой производной от температуры по координате в рассматриваемом направлении). Коэффициентом пропорциональности здесь служит коэффициент теплопроводности.

1.3. От части к целому

Используя законы сохранения и гипотезы о линейности свойств среды, можно перейти от описания процесса в элементарном объеме к описанию его во всей рассматриваемой области, например, в твердом теле. Для этого нужно представить в виде математических соотношений взаимодействие каждого элементарного объема с его «ближайшими соседями».

Вначале на основании одного из законов сохранения записывают зависимость между величинами, которые характеризуют состояние каждого элементарного объема и взаимодействие соседних элементарных объемов. Например, в упругой среде состояние характеризуется перемещением объема в направлении координатных осей, а взаимодействие — напряжениями, действующими на границах раздела между элементами. При расчетах тепловых процессов характеристикой состояния является температура, а взаимодействия — тепловые потоки.

Таким образом, получим систему уравнений, устанавливающих связь между элементарными объемами. Далее, используя гипотезу о линейности свойств среды, исключают из уравнений величины одной категории, обычно те, которые характеризуют взаимодействие, т. е. выражают напряжения через перемещения, а потоки — через температуру. Для каждого элементарного объема получается одно или несколько уравнений для нахождения оставшихся неизвестных величин: перемещений или температуры. Если состояние вещества в каждом элементарном объеме определяется скалярной величиной, например температурой, то уравнение будет одно. Если же состояние характеризуется векторной величиной, например перемещением, то уравнений будет столько, сколько компонентов имеет вектор. В трехмерных задачах таких компонентов будет три.

Если форма всех элементарных объемов выбрана одной и той же и одинаков характер взаимодействия соседних объемов, то все соотношения будут также одинаковыми. Поэтому нет надобности записывать уравнения для всех элементов, что при малых объемах элементов и невозможно. Достаточно записать уравнения для одного типового элементарного объема. При бесконечно малых размерах элементов эти уравнения будут уравнениями в частных производных, при конечных размерах элементов — уравнениями в конечных разностях. Всегда можно перейти от уравнений в частных производных к уравнениям в конечных разностях и наоборот.

Однако при предельном переходе к бесконечно малым размерам элементов из разностного уравнения всегда получается вполне определенное дифференциальное уравнение. Этот переход всегда однозначен. Но для одного и того же дифференциального уравнения можно записать бесконечное множество различных разностных уравнений. Причем эти уравнения будут далеко не равноценны с точки зрения сложности решения и точности получаемых результатов.

Трудно предложить общие правила выбора разностного уравнения, но можно указать точно, какие разностные уравнения использовать для решения нельзя. В дальнейшем мы попытаемся это сделать, а пока заметим, что, не имея достаточного опыта, весьма полезно получить разностное уравнение из физических представлений о взаимодействии элементарных объемов конеч-

ных размеров, а затем, перейдя к бесконечно малым, получить его дифференциальный аналог. Далее нужно сравнить полученное дифференциальное уравнение с известным уравнением в частных производных. Разумеется, они должны быть одинаковыми. При таком подходе не только удастся избежать грубых ошибок в расчете, но и проще осмыслить его результаты. Кроме того, физический подход иногда позволяет учесть в расчете такие эффекты, которые в бесконечно малых объемах пропадают как величины второго порядка малости. Уравнения полнее отражают физическую картину взаимодействия элементов, а значит, являются более точными. Особенно заметны такие эффекты при построении разностных уравнений в криволинейных системах координат. Наконец, физический подход к построению разностных уравнений часто позволяет упростить задание внешних воздействий (граничных условий) в задаче.

Возникает вопрос: а нельзя ли при разностном решении задачи вообще отказаться от дифференциальных уравнений в частных производных?

Лучше этого не делать.

Дело в том, что уравнения в частных производных дают точное решение задачи. Хотя такие решения, как правило, неизвестны, но на основе сравнения разностных уравнений с дифференциальными можно судить о качестве полученных разностных уравнений. Кроме того, часто удается подобрать точное решение другой задачи, в которой используются те же дифференциальные и разностные уравнения, но другие начальные и граничные условия. В этом случае возможно сравнение точного и приближенного решения и оценка погрешностей разностного решения. В дальнейшем мы воспользуемся этим приемом.

Поясним построение разностных уравнений на основе физических представлений на весьма наглядном примере.

1.4. Пример с водой

В качестве движущейся среды выберем воду (рис. 1.5). Воду считаем несжимаемой, внутри элементарного объема не будет происходить ее выделение, поглощение или накопление. Тогда можно воспользоваться вторым из записанных выше уравнений: сумма потоков

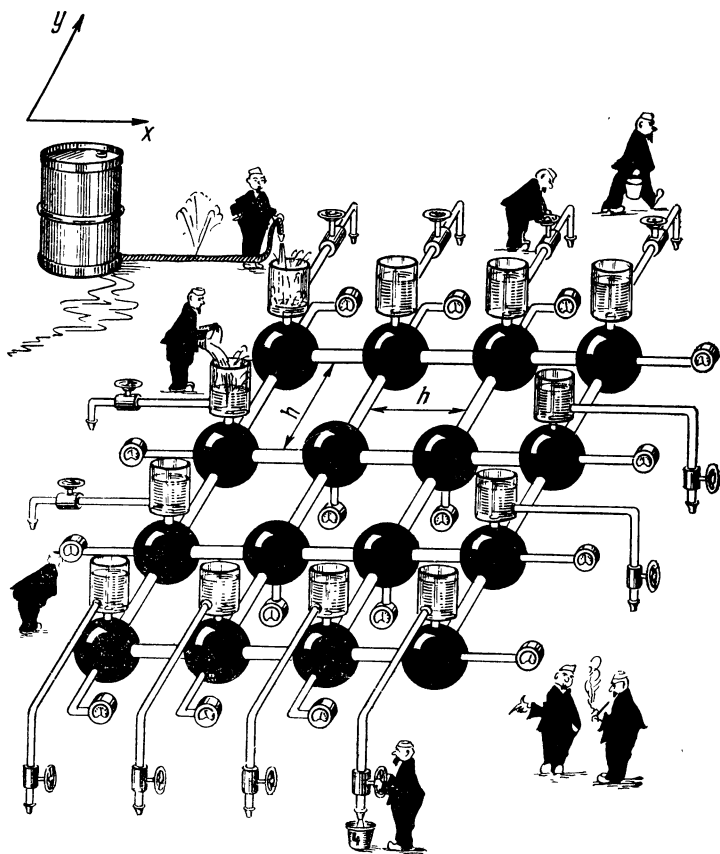


Рис. 1.5.

вещества равна нулю. Для дальнейшего упрощения возьмем двухмерную и стационарную задачи, т. е. потоки вещества в вертикальном направлении примем равными нулю и будем считать потоки в двух других направлениях неизменными во времени. Допустим, что каждый элементарный объем имеет вид резервуара, наполненного водой доверху. Центры резервуаров совпадают с точками плоскости xOy , где пересекаются оси трубок. Эти оси назовем *сеткой*, а точки пересечения осей — *узлами сетки*. Узлы образуют множество точек, равноотстоящих друг от друга в направлении координат-

ных осей. Множество узлов, образующих сетку, обозначается так [7]:

$$\bar{\omega} = \{x = mh, y = nh \mid m = 0, 1, \dots, M, n = 0, 1, \dots, N\}, \quad (1.1)$$

где $\bar{\omega}$ — обозначение множества узлов, образующих сетку, включающего и граничные узлы; $\{ \}$ — знак множества; $x = mh, y = nh$ — обозначение узлов. Далее за разделительной чертой приводится свойство узлов, образующих множество. В нашем примере оно состоит в том, что координаты узлов пропорциональны шагу h и коэффициенты пропорциональности m и n могут быть только целыми числами. Максимальное значение коэффициентов (M и N) определяет размеры прямоугольника ($Mh \cdot Nh$), ограниченного осями крайних резервуаров. Резервуары соединены трубками одинакового диаметра, расположенными в горизонтальной плоскости в направлении осей x и y . В вертикальном направлении потоков и трубочек нет. У каждого резервуара имеется манометр для измерения давления. Крайние резервуары — особые, с их помощью задаются граничные условия в нашей задаче. Так как задача стационарная, давление в крайних резервуарах должно поддерживаться постоянным. Для этого придется доливать или выливать из них воду.

Итак, вода залита и в граничных резервуарах давление ее постоянно. Попробуем записать закон сохранения материи для любого из внутренних резервуаров. Для этого нам нужно прежде всего высказать некоторое предположение о зависимости потока в трубке от разности давлений на ее концах. Можно, например, допустить, что поток через каждую трубку пропорционален ее поперечному сечению S , разности давлений на ее концах и обратно пропорционален длине трубки l . Это предположение, естественно, и отражает результаты наших наблюдений (рис. 1.6).

Строго ли это предположение отражает картину движения воды в трубке? Нет, конечно. Это лишь допущение о линейной связи между потоками и разностью давлений, т. е. гипотеза о линейности свойств среды. Для повышения точности предположения надо было также учесть влияние на величину потока относительной величины самого потока. Но тогда среда будет нелинейной, а уравнения движения станут более сложными.

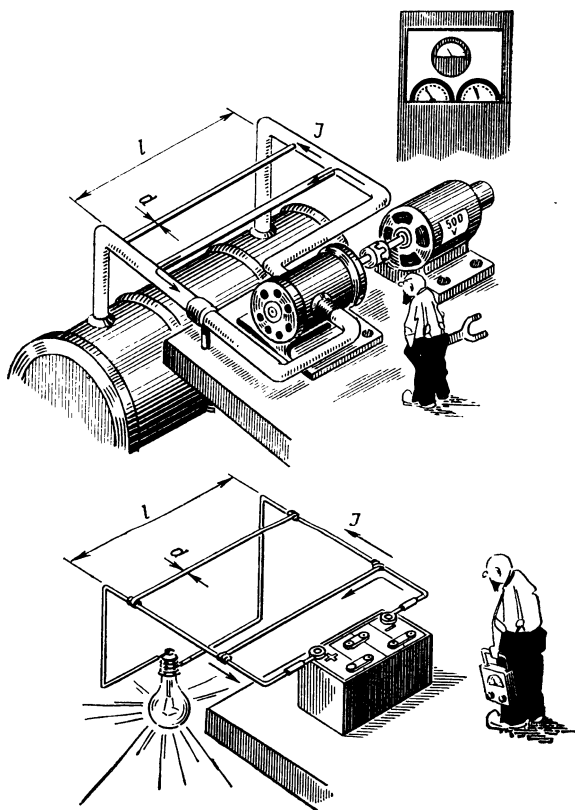


Рис. 1.6.

Хорошим аналогом движения воды по трубам является протекание электрического тока по проводам (рис. 1.6). Сила тока также пропорциональна поперечному сечению провода, разности потенциалов и обратно пропорциональна длине провода.

Теперь рассмотрим внутренний резервуар, находящийся в точке поля с координатами x и y . Точнее, в этой точке находится центр резервуара, а x и y могут принимать значения, кратные расстоянию между центрами соседних резервуаров, т. е. шагу сетки h . Обозначим давление в этом резервуаре через $P_{m, n}$. Предположим, что потоки, направленные по нижней и левой трубке, втекают в резервуар, а потоки по правой и верхней

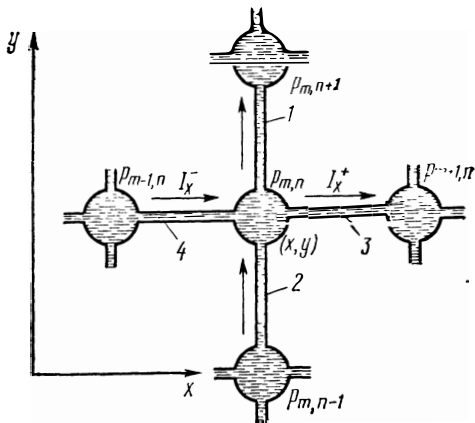


Рис. 1.7.

(на рис. 1.7) — вытекают из него. Разумеется, нам заранее не известно действительное направление потоков в трубках, а также и действительное значение давления. Поэтому чтобы не ошибиться в знаках при выводе уравнений, считаем, что потоки в направлении координатных осей положительны. Если в некоторых трубках потоки будут направлены в противоположную сторону, то при расчете они получатся со знаком минус.

Давление в резервуарах, соседних с резервуаром (x, y) , обозначим, как на рис. 1.7.

Поток через трубку 1 резервуара будет равен

$$AS \frac{P_{m,n} - P_{m,n+1}}{h},$$

через трубку 3

$$AS \frac{P_{m,n} - P_{m+1,n}}{h}.$$

Поток через трубку 2

$$AS \frac{P_{m,n-1} - P_{m,n}}{h}$$

через трубку 4

$$AS \frac{P_{m-1,n} - P_{m,n}}{h}.$$

В этих формулах буквой A обозначен коэффициент, характеризующий свойства жидкости (воды). Очевидно,

коэффициент A одинаков для всех трубок, так как вода в них одна и та же.

Возьмем два первых потока со знаком плюс и два вторых со знаком минус и сложим их. В результате получим нуль в полном соответствии с законом сохранения вещества. После сокращения всех членов полученной суммы на (AS) и деления на h запишем уравнение движения в виде

$$\frac{(p_{m,n} - p_{m+1,n})/h - (p_{m-1,n} - p_{m,n})/h}{h} + \frac{(p_{m,n} - p_{m,n+1})/h - (p_{m,n-1} - p_{m,n})/h}{h} = 0. \quad (1.2)$$

Это разностное соотношение для закона сохранения вещества в нашей гидравлической модели, оно будет справедливым для любого внутреннего резервуара, нужно только подставить давление, соответствующие числам m и n . Для резервуаров на границе ($m=0, M; n=0, N$) уравнений записывать не нужно, поскольку давление в этих резервуарах задано.

1.5. Ближе к природе

Рассмотренная гидравлическая модель является искусственной. Такие конструкции в природе не встречаются, хотя процессы фильтрации жидкости через пористые вещества, например через песок, во многом напоминают процессы в нашей модели. Приблизить процессы в модели к движению сплошных масс жидкости без всяких резервуаров можно путем следующих рассуждений. Предположим, что резервуары и трубки имеют прямоугольные формы (рис. 1.8). Чем процессы в такой модели с прямоугольными резервуарами будут отличаться от процессов в модели с круглыми резервуарами? Если течение жидкости достаточно медленное, то ничем. Может несколько измениться коэффициент пропорциональности A . Но в полученном уравнении (1.2) коэффициент A сокращается, и уравнение при переходе к прямоугольным формам не изменится. Теперь будем увеличивать резервуары и трубки, как на рис. 1.9. При каждом таком увеличении изменяется площадь сечения трубок. Но в уравнении (1.2) площадь трубок также сокращается, и уравнение меняться не будет. Размер же резервуаров в наших рассуждениях вообще участия не

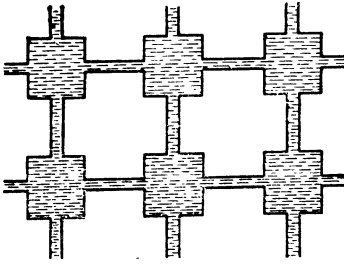


Рис. 1.8.

принимал. Итак, трубки и резервуары растут, перемычки между ними уменьшаются, пока не обратятся в линии, а в трехмерной задаче — в точки. А затем можно убрать и точки, поскольку они на движении жидкости не отражаются.

Следовательно, уравнение (1.2) остается справедливым и для сплошных масс жидкости, если только давление по границам рассматриваемой области и величина потоков во времени не изменяются. Мы выполнили, как говорят, предельный переход от модели с трубками и резервуарами к сплошному потоку жидкости.

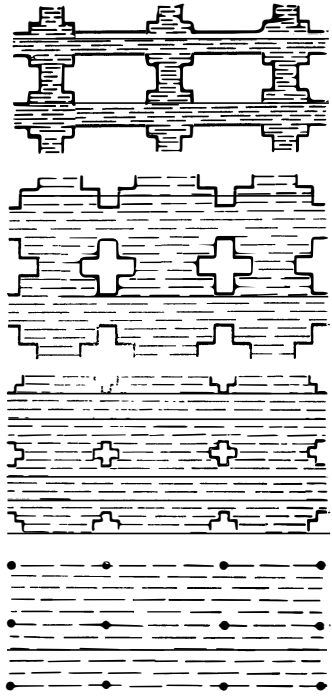


Рис. 1.9.

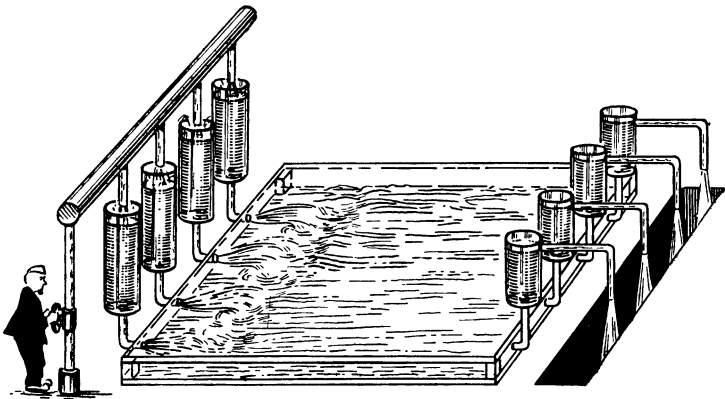


Рис. 1.10.

При предельном переходе к сплошному потоку в плоских задачах нужно подумать о том, что делать с потоками в третьем вертикальном направлении. Нужно позаботиться о том, чтобы потоков воды в вертикальном направлении не было. Этого можно добиться в нашей задаче, если ограничить жидкость двумя горизонтальными плоскостями с небольшим расстоянием между ними (рис. 1.10).

1.6. Вперед — к бесконечно малым!

В плоской модели, показанной на рис. 1.10, нет никакой координатной сетки с шагами h , разделяющей жидкость на элементарные объемы. Эту сетку мы мысленно представляем, чтобы вычислять давление в определенных точках — узлах. Поэтому процесс течения жидкости, а следовательно, и точное решение задачи от выбора сетки зависеть не должны. Но в разностное уравнение (1.2) входят шаги сетки h и можно ожидать, что приближенное решение будет зависеть от шагов сетки. Рассмотрим, как будет изменяться система разностных уравнений при уменьшении шагов.

В нашей задаче непрерывное изменение шага h невозможно, так как длина и ширина области должны быть пропорциональны шагу, поэтому выберем наиболее

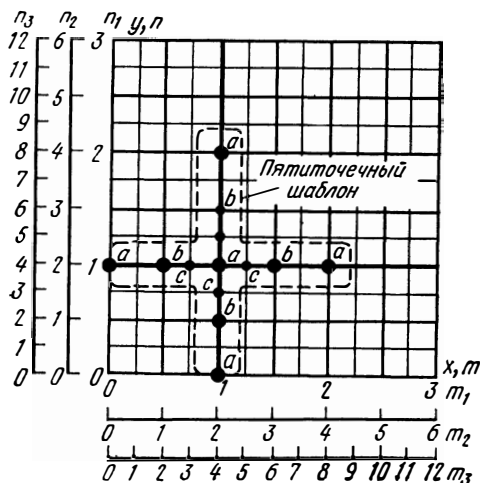


Рис. 1.11.

простой способ дискретного уменьшения шага h . Будем уменьшать шаг в два раза, затем еще в два раза и т. д. (рис. 1.11). При этом уже проведенные линии будут сохраняться. Будет изменяться только их номер m или n .

Возьмем узел ($m_1=1, n_1=1$) на пересечении линий при первом разбиении области сеткой. В уравнение (1.2) для этого узла войдут пять значений давления в узлах, отмеченных на рис. 1.11 буквой a . Говорят, что разностный оператор в левой части уравнения (1.2) определен на 5-точечном шаблоне. Внутренних узлов сетки при первом разбиении четыре, поэтому уравнений вида (1.2) будет тоже четыре, и в процессе решения нам нужно будет найти четыре неизвестных давления в четырех внутренних узлах, т. е. решить систему из четырех алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными.

Выполним второе разбиение, уменьшив шаги в два раза. В уравнение (1.2) для этого же узла ($m_2=2, n_2=2$) войдут теперь пять значений давления в узлах, отмеченных буквой b и расположенных вдвое ближе друг к другу. Теперь сетка будет содержать 25 внутренних узлов и придется решать систему из 25 уравнений с 25 неизвестными.

При третьем разбиении узлы 5-точечного шаблона снова сближаются: внутренних узлов теперь будет 121. Если продолжить эту процедуру до бесконечности, то вся область покроется узлами-точками, расположенными бесконечно близко по отношению друг к другу. Число уравнений и число неизвестных также возрастает до бесконечности, а сами уравнения будут дифференциальными уравнениями в частных производных. Разумеется, вид этих уравнений во всех точках области будет одинаковым, и поэтому нужно использовать какое-нибудь одно уравнение. Считают, что оно должно удовлетворяться в любой точке области. Каким будет это уравнение?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим выражения для плотности потоков в направлении оси x и разности плотностей потоков в этом направлении. Выражения для плотностей потоков получаются из уравнений для потоков в трубках 3 и 4 (рис. 1.7), если эти потоки разделить на площадь сечения трубки S :

$$I_x^+ = B(P_{m,n} - P_{m+1,n})/h,$$

$$I_x^- = B(P_{m-1,n} - P_{m,n})/h, \quad (1.3)$$

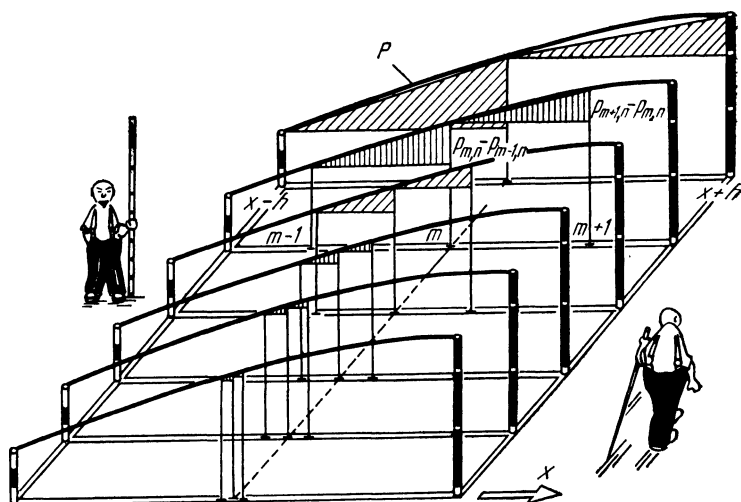


Рис. 1.12.

где знаком «+» отмечен поток, уходящий от узла в направлении оси x (направо) (рис. 1.7), а знаком «-» — поток, приходящий к узлу слева. Коэффициент B характеризует свойства воды и появился вместо коэффициента A при предельном переходе от модели с трубками к сплошному потоку воды.

При измельчении шага сетки h и числитель, и знаменатель в выражениях (1.3) будут уменьшаться, стремясь в пределе к нулю. Сама дробь стремится к постоянной величине. Если бы функция P была известна (рис. 1.12), то разности, входящие в выражения (1.3), определялись бы отношением катетов заштрихованных треугольников. В пределе это отношение стремилось бы к постоянной величине, определяемой тангенсом угла наклона касательной к кривой P в точке $x=m_1 h_1$, т. е. к производной в точке $x=m_1 h_1$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{m,n} - P_{m+1,n}}{h} = -\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{m-1,n} - P_{m,n}}{h} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Таким образом, обе разности заменяются одной и той же производной. При обратном переходе от производных к разностям можно заменять производные так:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{P_{m+1,n} - P_{m,n}}{h}$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{P_{m,n} - P_{m-1,n}}{h}. \quad (1.5)$$

В первом случае разность называется правой, во втором — левой. В выражениях (1.4) и (1.5) записаны частные производные, а не полные, потому что рассматривается приращение функции P в направлении одной координаты независимо от ее приращения в другом направлении.

Следовательно, при переходе от дифференциальных уравнений к разностным первые производные можно заменять правыми или левыми разностями. Возможны и другие способы замены. Возникает вопрос: какой из этих способов является лучшим? При разностном решении дифференциальных уравнений в частных производных основным источником ошибок являются погрешности от замены производных конечными разностями. Эти погрешности называют *погрешностями дискретизации*. Таким образом, в теории разностных схем основной является проблема наилучшего приближения с помощью разностных соотношений к дифференциальным, или наилучшей аппроксимации дифференциальных операторов разностными.

1.7. Аппроксимация

Погрешности дискретизации зависят не только от способа замены дифференциальных уравнений разностными, но и от конфигурации элементов конструкции (формы рассматриваемой области), внешних воздействий (граничных условий) и длительности рассчитываемого процесса. Оценка этих погрешностей не менее сложна, чем сам расчет процесса в конструкции.

Если трудно определить погрешности дискретизации, то довольно просто найти порядок величины этих погрешностей. Порядок погрешностей решения задачи целиком определяется способом замены дифференциальных операторов в задаче разностными, т. е.

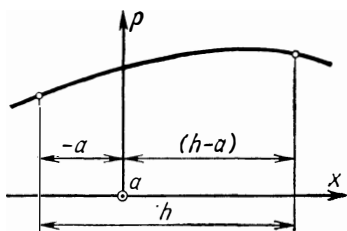


Рис. 1.13.

порядком аппроксимации. Порядок аппроксимации показывает, каким образом снижаются погрешности с уменьшением шагов сетки. Если, предположим, порядок аппроксимации первый, то погрешности пропорциональны шагу, если второй, то — квадрату шага и т. д.

Покажем, как определить порядок аппроксимации на примере замены первой производной первой конечной разностью. Допустим, мы хотим заменить производную в точке 0 (рис. 1.13) и для этого наметили два узла сетки в точках $x = -a$ и $x = h - a$.

Будем считать функцию P и ее производные в точке 0 известными. Воспользовавшись разложением этой функции в ряд Тейлора, находим значения функции на концах отрезка при $x = -a$ и $x = h - a$:

$$P(-a) = P - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{a}{1!} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{a^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{a^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{a^4}{4!} - \dots,$$

$$P(h-a) = P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{(h-a)}{1!} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{(h-a)^2}{2!} +$$

$$+ \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{(h-a)^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{(h-a)^4}{4!} + \dots$$

Теперь можно определить значение конечной разности

$$\frac{P(h-a) - P(-a)}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h-2a}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^2 - 3ah + 3a^2}{3!} +$$

$$+ \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^3 - 4h^2a + 6ha^2 - 4a^3}{4!} + \dots \quad (1.6)$$

Погрешность от замены первой производной конечной разностью будет равна

$$\frac{P(h-a) - P(-a)}{h} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h-2a}{2!} +$$

$$+ \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^2 - 3ha + 3a^2}{3!} + \dots$$

Если величине a давать различные значения от нуля до h , то получатся различные значения погрешности. При

$a=0$ разность (1.6) будет правой разностью и погрешность будет равна

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^2}{3!} + \dots$$

Она получается пропорциональной шагу сетки. Имеет место первый порядок аппроксимации производной «правой» разностью. Условно это в принятых выше обозначениях можно записать в виде

$$\frac{P_{m+1,n} - P_{m,n}}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + 0(h). \quad (1.7)$$

Производная вычисляется в узле на левом конце отрезка $mh \leq x \leq (m+1)h$. Уравнение (1.7) читают так: разность равна производной плюс остаток, пропорциональный h .

К аналогичному результату мы приходим при $a=h$. В этом случае разность (1.6) будет «левой» и погрешность составит

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^2}{3!} - \dots$$

Знаки производных, которые получаются в результате решения, нам заранее неизвестны, поэтому нельзя сказать, будет ли эта погрешность больше или меньше, чем для «правой» разности, но в обоих случаях она будет пропорциональна h . Для левой разности можно записать

$$\frac{P_{m,n} - P_{m-1,n}}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + 0(h). \quad (1.8)$$

Если же взять $a=h/2$, то погрешность уменьшится и будет пропорциональна квадрату шага h :

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^2}{4 \cdot 3!} + \frac{\partial^5 P}{\partial x^5} \frac{h^4}{8 \cdot 5!} + \dots$$

Таким образом, заменяя конечными разностями производные в узлах сетки, получаем первый порядок аппроксимации, а в центре отрезков между узлами — второй [7]:

$$\frac{P_{m+1,n} - P_{m,n}}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + 0,5h + 0(h^2). \quad (1.9)$$

Теперь можно ответить на вопрос: как располагать узлы сетки, чтобы поточнее вычислить производную с помощью первой разности?

Для вычисления производной в какой-то точке x , узлы сетки следует располагать на равном расстоянии

по обе стороны от точки x , т. е. в точках $x+h/2$, $x-h/2$. А если нужно вычислить с помощью разности первую производную в точке, где уже имеется узел? В этом случае лучше воспользоваться «центральной» разностью

$$\frac{P_{m+1,n} - P_{m-1,n}}{2h} = \frac{\partial P}{\partial x} + O(h^2). \quad (1.10)$$

Порядок аппроксимации в этом случае будет вторым, а не первым, как в случае «левой» и «правой» разностей.

Это правило хорошо согласуется с физическими представлениями. Например, если давление в нашей задаче о течении жидкости вычисляется в узлах сетки, то разность давлений и соответствующая ей производная по координате определяют поток между узлами и относятся к центру отрезка между узлами.

Мы говорили об аппроксимации производных конечными разностями. Можно говорить об аппроксимации всего дифференциального уравнения конечно-разностным уравнением и, наконец, об аппроксимации всей дифференциальной задачи конечно-разностной задачей. В любом случае можно определить порядок аппроксимации.

Аппроксимация определяет только погрешность от замены производной или дифференциального уравнения конечно-разностным выражением. Если, например, скорость точки мы вычисляем как первую разность от перемещений по времени при известном значении перемещений, то величина ошибки равна погрешности вычисления скорости. Если же решение задачи нам неизвестно, то аппроксимация говорит лишь о том, что решение системы разностных уравнений будет похожем на точное решение, что уменьшение шагов сетки приводит к уменьшению погрешностей и что порядок погрешностей определяется порядком аппроксимации.

Рассматривая теперь производную $\partial P/\partial x$ как некоторую функцию координаты x , замечаем, что при стремлении шага сетки h к нулю вторая разность стремится к производной от производной, т. е. ко второй производной:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{m+1,n} - 2P_{m,n} + P_{m-1,n}}{h^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Вторая производная опять определяется в центре интервала $(m-0,5)h \dots (m+0,5)h$, на концах которого были найдены первые разности, т. е. в узле сетки m, n . Следовательно, порядок аппроксимации второй производной

водной в узле второй разностью должен сохраниться вторым.

Проверим это.

Используя разложение функции P в ряд Тейлора вблизи точки $x=th$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (P_{m+1,n} - 2P_{m,n} + P_{m-1,n}) &= \frac{1}{h^2} \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{h}{1!} + \right. \\ &+ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + \dots - 2P + P - \\ &\left. - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{h}{1!} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^2}{4!} + \dots = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Действительно, имеет место второй порядок аппроксимации.

Теперь можно сказать, что для улучшения аппроксимации все четные производные следует определять в узлах сетки, а нечетные — между узлами. Нуль считается четным числом, а нулевая производная будет самой функцией P .

Если теперь совершить в уравнении (1.2) предельный переход от разностей к производным и по координате y , то уравнение можно записать в таком компактном виде:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \quad (1.11)$$

Мы получили известное уравнение в частных производных — двухмерное уравнение Лапласа. Этим уравнением описываются не только процессы в жидкостях, но и стационарные тепловые процессы в твердых телах, процессы фильтрации и многие другие. Разумеется, в процессах другой физической природы нужно взять вместо давления какую-то другую физическую величину, например в тепловых — температуру, в электрических — потенциал и т. д. Да и в нашем процессе течения жидкости давление можно принять в качестве искомой функции только в случае горизонтальных потоков жидкости небольшой высоты. Если нашу модель с водой расположить вертикально, давление P в качестве искомой функции брать нельзя. Действительно, мы знаем, что давление в нижних слоях воды выше, чем в верхних, но это не значит, что вода всегда течет снизу вверх.

1.8. Что может высшая математика?

Уравнение Лапласа записано нами для произвольной точки области и годится для любой точки, где протекают потоки воды. Если заданы граничные условия на краях рассматриваемой области, то можно в принципе проинтегрировать полученное уравнение по области и получить точное решение задачи. К сожалению, в практических задачах вряд ли это возможно. Давайте подумаем, что значит найти точное аналитическое решение задачи? Это значит найти такое аналитическое выражение функции P , которое в каждой точке области удовлетворяет уравнению Лапласа, а на границе принимает заданные значения. Это аналитическое выражение должно быть составлено из хорошо изученных элементарных функций: тригонометрических, гиперболических или степенных. Заметим, что все эти функции сами являются решениями дифференциальных уравнений, но более простых, одномерных, и чаще всего бывает так, что из них не удастся скомбинировать решение двухмерной задачи.

Общих методов интегрирования дифференциальных уравнений нет. Недаром математики говорят не «решить задачу», а «отыскать функцию, удовлетворяющую уравнению», т. е. решение надо искать. А найдешь или не найдешь — еще неизвестно. Каждое найденное аналитическое решение дифференциального уравнения в математике — целое событие. Значит, аналитические решения попадаются редко. Как же быть?

1.9. Назад — к конечным разностям

Выход есть. Если задачу нельзя решить аналитическими методами, то ее, как правило, решают численными методами, например методом конечных разностей. В рассмотренном выше примере нужно решать не дифференциальное уравнение Лапласа, а разностное (1.2).

Разностное решение всегда приближенно, но точность его тем выше, чем меньше шаг h . С другой стороны, нам точные решения и не нужны. В большинстве случаев достаточно точность в один, максимум два десятичных знака. Более того, точных решений принципиально получить нельзя, даже если решим дифференциальное уравнение, так как мы не знаем точных значений величин, входящих в условия задачи. Нам достоверно не известны раз-

меры деталей конструкции, характеристики материалов, внешние воздействия на конструкцию. Поэтому погрешности расчета нас не должны смущать. Да и сами дифференциальные уравнения не точно отражают физическую картину явлений. В частности, при их выводе используется гипотеза о линейности среды, а реальные среды, как известно, нелинейны.

1.10. Как решать?

Теперь постараемся ответить на вопрос: как решать задачу разностным методом? Вернемся к примеру с водой. Предположим, что нам заданы давления в граничных резервуарах или в граничных точках нашего поля. Дадим им численные значения из условий задачи, например такие, как в табл. 1.1.

Постараемся найти значения давлений во внутренних точках области. Эти значения должны удовлетворять уравнению 1. Запишем его в более простом виде, сократив на h^2 , и перенесем $P_{m,n}$ в правую часть:

$$0,25(P_{m+1,n} + P_{m-1,n} + P_{m,n+1} + P_{m,n-1}) = P_{m,n}. \quad (1.12)$$

Полученное уравнение говорит о том, что давление в каждой точке должно быть равно среднему арифметическому давлений в четырех соседних точках. Если удастся вычислить давления в каждой точке, удовлетворяющие этому условию, значит, задача будет решена.

Можно решать задачу так. Обозначив давление буквами a, b, c, \dots , составить 36 уравнений (1.12) и решить их относительно 36 неизвестных давлений. Но решать систему из тридцати шести уравнений с тридцатью шестью неизвестными «на руках», не используя ЭЦВМ, прямыми методами (методом Эйлера или Гаусса) сложно. Поэтому мы применим другой, более простой и в данном случае более экономичный метод последовательных приближений.

Заполним все клетки таблицы числами, т. е. определим значения P во всех

Таблица 1.1

	1,1	1,2	1,5	2,0	2,3	2,4	
1,0							2,5
1,2							2,4
1,3			$P_{m,n+1}$				2,3
1,2		$P_{m+1,n}$	$P_{m,n}$	$P_{m-1,n}$			2,2
1,1			$P_{m,n-1}$				2,1
1,0	a	b	c	d			2,0
	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8	1,9	

Таблица 1.2

	1,1	1,2	1,5	2,0	2,3	2,4	
1,0	0,6	0,5	0,5	0,7	0,8	1,6	2,5
1,2	0,4	0,2	0,1	0	0	0,8	2,4
1,3	0,4	0,2	0,1	0	0	0,8	2,3
1,2	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,8	2,2
1,1	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,8	2,1
1,0	0,5	0,4	0,4	0,5	0,6	1,1	2,0
1,0	1,1	1,3	1,6	1,8	1,9		

узлах модели в первом приближении. Можно, например, в качестве первого приближения взять нули, что мы и сделаем.

Начнем вычисление значений P во втором приближении с точки a . Для этого сложим имеющиеся значения давлений в соседних точках и разделим на четыре. В результате для точки a получим $a^{(1)} = (1,0 + 1,0 + 0 +$

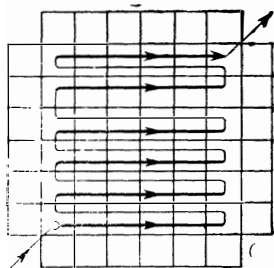
$+ 0) / 4 = 0,5$; сделаем ту же процедуру для точки b : $b^{(1)} = (0,5 + 1,1 + 0 + 0) / 4 = 0,4$ и т. д.

Когда обойдем все точки области, получим второе приближение для значений давлений (табл. 1.2).

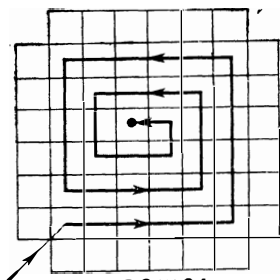
Теперь снова обойдем все точки области и вычислим давления по формуле (1.12), найдем второе приближение для значений давления.

После нескольких таких обходов значения давлений меняться не будут (табл. 1.3). Следовательно, задача решена. В каждом узле удовлетворяется соотношение (1.12).

У читателя вряд ли хватит терпения довести эти вычисления до конца. Да это и не нужно. Достаточно подставить значения давления, взятые из табл. 1.3, в формулу (1.12) и убедиться, что с точностью до 0,1 все они подходят для нашей формулы. Для наиболее упорных мы подскажем: чтобы быстрее достичь результата, нужно начинать расчет не с нулевых значений давлений во внутренних точках области, а с каких-то близких к истине, которые изменяют давление от границы до границы плавно. Кроме того, рекомендуется не



ПЛОХО!



ХОРОШО!

Рис. 1.14.

Таблица 1.3

	1,1	1,2	1,5	2,0	2,3	2,4		
1,0	1,1	1,3	1,6	1,9	2,1	2,3	2,5	
1,2	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	1,5
1,3	1,3	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,3	1,4
1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	1,9	2,1	2,2	1,3
1,1	1,2	1,3	1,5	1,7	1,8	2,0	2,1	1,2
1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,0	1,1
	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,0	1,0
	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,0	1,0
	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,0	1,0
	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,0	1,0

возвратно-поступательный обход точек, какой мы применили, а по спирали (рис. 1.14). При этих условиях можно получить решение, т. е. вычислить давление во всех 36 точках за 4—5 обходов или, как говорят, за 4—5 итераций.

Вычисленные значения искоемых функций позволяют вычислить все остальные величины, определяющие состояние среды. Это не сложно. В нашей задаче по полученным значениям давления можно найти плотности потоков, используя соответствующие разностные формулы.

1.11. Подводные камни

Оглядываясь на решенную выше задачу, можно подумать, что все получается очень просто. Нужно составить систему разностных уравнений, аппроксимирующих исходную дифференциальную задачу, и решить эту систему, например, методом последовательных приближений. Однако на этом пути могут встретиться серьезные препятствия. Для примера рассмотрим еще одну характерную задачу, где рассмотренный способ последовательных приближений не приводит к решению.

Предположим, что балка, находящаяся на двух опорах (рис. 1.15), изогнута поворотом сечений на концах. Дифференци-

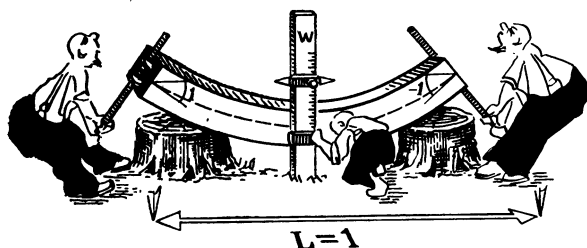


Рис. 1.15.

альное уравнение изогнутой оси балки в этом случае имеет вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0, \quad (1.13)$$

где w — прогиб балки.

Эта задача является одномерной и стационарной и уравнение (1.13) можно решить точно, например, методом понижения порядка производных. Решение будет иметь вид

$$w = C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0. \quad (1.14)$$

Постоянные интегрирования C_0 , C_1 , C_2 и C_3 определяются из граничных условий на концах балки:

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad \frac{dw(0)}{dx} = 1, \quad \frac{dw(l)}{dx} = -1. \quad (1.15)$$

Производные от прогибов на концах балки взяты равными единице, т. е. угол наклона оси к горизонтали составляет 45° . Длину балки для простоты вычислений мы возьмем равной 1 м. Тогда, подставив граничные условия в уравнение (1.14), получим значения постоянных $C_0 = C_3 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ и точное решение будет иметь вид $w = x - x^2$.

Это точное решение показано на рис. 1.16. Там же дана таблица точных значений прогибов, вычисленных через 0,1 м по длине балки. Простые условия задачи позволили вычислить эти значения прогибов точно, т. е. полученные цифры не содержат погрешностей округления.

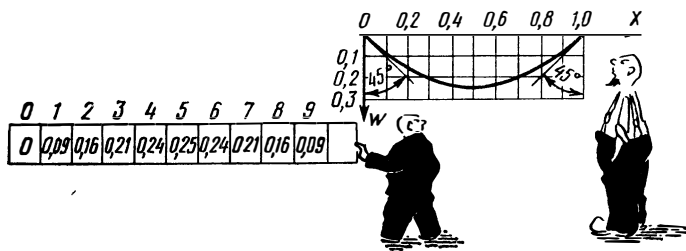


Рис. 1.16.

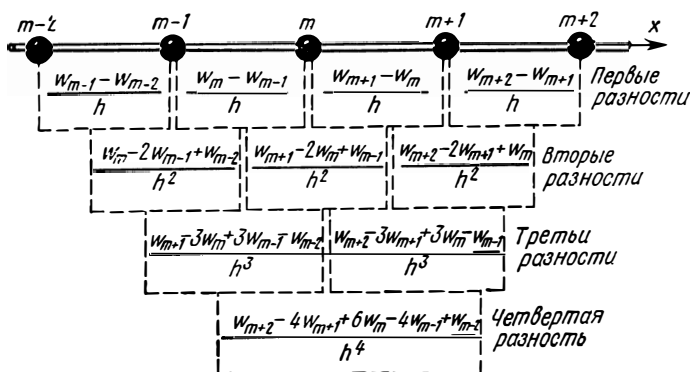


Рис. 1.17.

Теперь предположим, что мы не знаем точного решения и хотим вычислить его приближенно разностным методом. Для этого введем сетку с шагом $h=0,1$ м:

$$\bar{\omega} = \{x = mh \mid m = 0, 1, 2, \dots, 10\}.$$

Аппроксимируем четвертую производную на этой сетке разностным выражением. Для этого выберем любые пять соседних узлов и запишем выражения для первых разностей между прогибами в этих узлах (рис. 1.17). Получатся четыре первые разности, которые мы относим к центрам отрезков между узлами. Вычислим теперь разности от первых разностей, т. е. вторые разности. Их будет три, и они относятся к трем внутренним узлам ($m-1$), m и $(m+1)$. Также вычисляются две третьи и одна четвертая разность. В результате получится выражение для четвертой разности на 5-точечном шаблоне.

Погрешность от замены производной полученным разностным выражением пропорциональна h^2 . Действительно,

$$\begin{aligned} & \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{h^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \\ & = \frac{1}{h^4} \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{2h}{1!} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{(2h)^2}{2!} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cdot \frac{(2h)^3}{3!} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \frac{(2h)^4}{4!} + \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cdot \frac{(2h)^5}{5!} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \cdot \frac{(2h)^6}{6!} + \dots \right) - \\ & - \frac{4}{h^4} \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{h}{1!} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \frac{h^4}{4!} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cdot \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \cdot \frac{h^6}{6!} + \dots \right) + \frac{6}{h^4} w - \\ & - \frac{4}{h^4} \left(w - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{h}{1!} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cdot \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \cdot \frac{h^6}{6!} - \dots \Big) + \\
& + \frac{1}{h^4} \left(w - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{2h}{1!} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{(2h)^2}{2!} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cdot \frac{(2h)^3}{3!} + \right. \\
& + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \frac{(2h)^4}{4!} - \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cdot \frac{(2h)^5}{5!} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \cdot \frac{(2h)^6}{6!} - \dots \Big) - \\
& - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cdot \frac{120h^2}{6!} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \cdot \frac{500h^4}{8!} + \dots - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0(h^2).
\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место второй порядок аппроксимации производной четвертой разностью. Уравнение (1.13) заменим теперь разностным уравнением

$$\frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{h^4} = 0. \quad (1.16)$$

А каков будет порядок аппроксимации дифференциального уравнения (1.13) разностным уравнением (1.16)?

Если учесть, что из уравнения (1.13) следует

$$\frac{d^6 w}{dx^6} = 0, \quad \frac{d^8 w}{dx^8} = 0, \dots$$

то порядок аппроксимации получается бесконечным. Это значит, что формула (1.16) должна привести к точным значениям прогибов в узлах сетки.

Теперь нужно аппроксимировать также граничные условия (1.15). Для этого производные от прогибов по координате в граничных узлах заменим разностями

$$\frac{dw(0)}{dx} \cong \frac{w_1 - w_0}{h} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{dw(l)}{dx} \cong \frac{w_{10} - w_9}{h} = -1.$$

Поскольку $w_0 = w_{10} = 0$, получаем $w_1 = 0,10$ и $w_9 = 0,10$.

Таким образом, для задания граничных условий в крайних узлах прогиба нужно положить равными нулю, а в соседних с крайними—0,10. Но чтобы не вносить в расчет погрешности со стороны граничных условий, мы в соседних с крайними узлах сетки будем записывать точные значения прогибов, т. е. 0,09. Нам останется вычислить методом последовательных приближений значения прогибов в семи внутренних узлах сетки.

Итерационную формулу, как и ранее, получим, решив уравнение (1.16) относительно прогиба в центральном узле m :

$$w_m^{i+1} = (-w_{m+2}^i + 4w_{m+1}^i + 4w_{m-1}^i - w_{m-2}^i)/6, \quad (1.17)$$

где i — номер приближения.

Теперь нужно договориться о значениях w в первом приближении. Если взять в качестве первого приближения точные значения из таблицы на рис. 1.20, то с помощью формулы (1.17) получим точные значения, например, для центрального узла ($m=5$):

$$w_5 = \frac{-0,21 + 4 \cdot 0,24 + 4 \cdot 0,24 - 0,21}{6} = 0,25.$$

Это подтверждает наш вывод о том, что уравнение (1.16) обладает бесконечным порядком аппроксимации.

Но если точные значения прогибов неизвестны, то в качестве первого приближения можно взять любые числа. Мы же возьмем числа, близкие к точным, чтобы иметь возможность оценивать погрешности при каждом следующем приближении. Начальную погрешность в первом приближении примем меньшей 0,05. Для этого просто округлим точные значения до 0,05.

Числа первого приближения ($i=1$) приведены в первой строке табл. 1.4. Далее в таблице идут результаты вычислений с помощью

Таблица 1.4

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0,09	0,200	0,200	0,200	0,300	0,200	0,200
2	0	0,09	0,160	0,202	0,267	0,200	0,267	0,202
3	0	0,09	0,150	0,221	0,197	0,289	0,197	0,221
4	0	0,09	0,174	0,168	0,282	0,189	0,282	0,168
5	0	0,09	0,125	0,258	0,162	0,320	0,162	0,258
6	0	0,09	0,205	0,123	0,338	0,130	0,338	0,123
7	0	0,09	0,086	0,339	0,078	0,410	0,078	0,339
8	0	0,09	0,273	0,026	0,472	-0,009	0,472	0,026
9	0	0,09	-0,001	0,483	-0,113	0,621	-0,113	0,483
10	0	0,09	0,400	-0,194	0,755	-0,311	0,755	-0,194

итерационной формулы (1.17) следующих приближений, вплоть до десятого.

Оказывается, что погрешности с каждым приближением не только не уменьшаются, но быстро растут и на десятом приближении превышают 0,5, т. е. составляют 200% от точных значений прогибов в центре балки.

Итерационный процесс оказался неустойчивым.

1.12. Устойчивость

Постараемся ответить на вопросы: что такое неустойчивость вычислительного процесса? В чем причины неустойчивости? Обратим внимание на то, что при подстановке в формулу (1.17) точных значений прогибов в следующем приближении получаются также точные значения. Но если в начальных значениях появляются погрешности, то они возрастают. В данном случае имеет место определенный вид неустойчивости: неустойчивость вычислительного процесса по начальным данным.

Таким образом, неустойчивость по начальным данным — это быстрое возрастание начальных погрешностей.

Ответ на первый из поставленных вопросов вызывает еще два вопроса: какие именно начальные погрешности увеличиваются при неустойчивости?

Что значит: «быстрое нарастание погрешностей?»

Оказывается, при неустойчивости по начальным данным увеличиваются не все погрешности, а только те из них, графики которых имеют вполне определенный вид. В данном случае усилива-

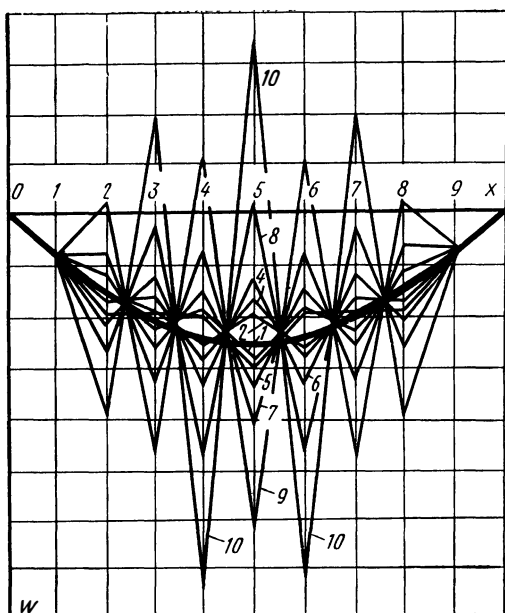


Рис. 1.18.

ются погрешности, знак которых в каждом следующем узле изменяется на противоположный. Обратим внимание на графики полученных «приближенных» решений, показанные на рис. 1.18. Эти графики представляют собой пилообразные линии и в каждом следующем шаге по координате отклоняются от точного решения в противоположную сторону. Более того, в каждом следующем шаге вычислений погрешности изменяют знак. Это чередование знаков погрешностей характерно для неустойчивости по начальным данным.

Нарастание погрешностей в данном случае происходит примерно по закону геометрической прогрессии (рис. 1.19). В каждом следующем шаге погрешности возрастают примерно в полтора раза. Может быть попытаться уменьшить шаги сетки h , чтобы добиться устойчивости?

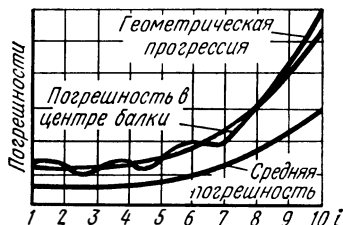


Рис. 1.19.

Нет! Изменение шага приводит лишь к более быстрому возрастанию погрешностей. Рост погрешностей в некоторой степени сдерживается точным заданием значений w на концах стержня. При измельчении шага сдерживающее влияние концов уменьшается

Погрешности будут расти быстрее, но основание прогрессии в данном случае не может быть большим $10/6$. Цифра « $10/6$ » следует из итерационной формулы (1.17). Если каждое значение w^i , входящее в эту формулу, будет содержать некоторую погрешность Δ и знаки погрешностей будут изменяться от узла к узлу, то в результате в следующем приближении погрешность увеличится:

$$\frac{-(w_{m-2}^i + \Delta) + 4(w_{m-1}^i - \Delta) + 4(w_{m+1}^i - \Delta) - (w_{m+2}^i + \Delta)}{6} = \\ = w_m^{i+1} + \frac{10}{6} \Delta.$$

В чем же причина неустойчивости? В данном случае имеется три причины.

Первая состоит в том, что процесс вычислений и формула (1.17) являются рекуррентными. В этой формуле для вычисления каждого следующего приближения использует результаты предыдущего приближения. Процесс вычислений от шага к шагу повторяется и происходит накопление погрешностей.

Однако не все рекуррентные процессы вычислений приводят к неустойчивости. Формула (1.12) также была рекуррентной, но процесс вычислений с ее помощью получился устойчивым. Следовательно, рекуррентность только создает предпосылки для неустойчивости.

Вторая причина — чередование знаков перед членами уравнения и вызывает накопление таких погрешностей, которые имеют такое же чередование знаков. Чередование знаков получилось у нас не случайно. При замене дифференциальных уравнений разностными, знаки как правило, чередуются. Например, все разности от первой до четвертой на рис. 1.17 имеют чередующиеся знаки. Чередование знаков получается и при построении разностных формул из физических соображений. Однако это не значит, что формула, в которой знаки перед членами изменяются от узла к узлу, обязательно приведет к неустойчивости. Чередование знаков создает вторую предпосылку для неустойчивости.

Третья причина состоит в том, что сумма коэффициентов перед членами в правой части формулы (1.17) больше единицы:

$$1/6 + 4/6 + 4/6 + 1/6 = 10/6.$$

Если бы эта сумма была меньше единицы, то в любом случае возрастания погрешностей не происходило бы.

Таким образом, неустойчивость имеет три причины и достаточно устранить любую из них, чтобы решение было устойчивым. Например, можно избежать рекуррентного процесса. Для этого достаточно один раз решить систему из семи уравнений (1.16) относительно неизвестных прогибов в семи внутренних узлах сетки. При этом значения прогибов в узлах получатся точными.

Труднее избежать чередования знаков перед членами в разностной формуле, аппроксимирующей четвертую производную, но можно нарушить чередование знаков перед погрешностями в процессе расчета.

Например, при вычислении каждого следующего приближения можно использовать значения функций, полученные уже в этом приближении.

Попробуем ввести в расчет это правило. При вычислении значений прогибов узлы обходятся в направлении возрастания номеров m , прогибы в пройденных узлах $m-1$, $m-2$ в очередном приближении уже вычислены и их можно ввести в итерационную формулу

$$w_m^{i+1} = (-w_{m+2}^i + 4w_{m+1}^i + 4w_{m-1}^{i+1} - w_{m-2}^{i+1})/6. \quad (1.18)$$

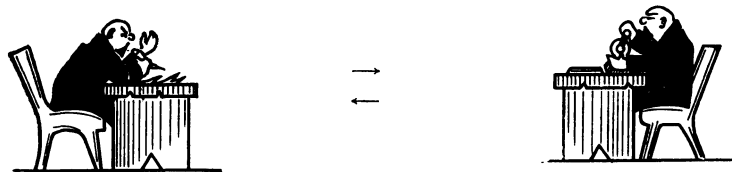
Если узлы обходятся в порядке убывания номеров m , то вычисленными в очередном приближении $i+1$ будут прогибы в узлах $m+1$, $m+2$ и т. д. Итерационную формулу в этом случае можно записать в виде

$$w_m^{i+1} = (-w_{m+2}^{i+1} + 4w_{m+1}^i + 4w_{m-1}^i - w_{m-2}^i)/6. \quad (1.19)$$

Начнем расчет с теми же начальными значениями прогибов, что и на рис. 1.18. Будем пользоваться формулами (1.18) и (1.19) поочередно (табл. 1.5). При четных значениях i и направлении обхода

Таблица 1.5

i	Номер узла m										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,09	0,200	0,200	0,200	0,300	0,200	0,200	0,200	0,09	0
2	0	0,09	0,160	0,175	0,257	0,242	0,218	0,223	0,172	0,09	0
3	0	0,09	0,155	0,198	0,224	0,257	0,226	0,205	0,172	0,09	0
4	0	0,09	0,155	0,195	0,238	0,243	0,230	0,213	0,164	0,09	0
5	0	0,09	0,155	0,200	0,230	0,248	0,234	0,208	0,164	0,09	0
6	0	0,09	0,155	0,200	0,234	0,245	0,240	0,214	0,163	0,09	0
7	0	0,09	0,157	0,204	0,234	0,249	0,239	0,213	0,163	0,09	0
8	0	0,09	0,157	0,205	0,237	0,248	0,241	0,214	0,162	0,09	0
9	0	0,09	0,158	0,206	0,236	0,249	0,241	0,213	0,162	0,09	0
10	0	0,09	0,158	0,206	0,237	0,249	0,242	0,213	0,161	0,09	0
11	0	0,09	0,158	0,206	0,237	0,249	0,241	0,212	0,161	0,09	0
12	0	0,09	0,158	0,206	0,237	0,249	0,241	0,212	0,161	0,09	0



узлов слева направо используем формулу (1.18), а при нечетных i (направление обхода справа налево) (1.19).

Результаты вычислений показывают, что в начале расчета ($i=2$) в отдельных узлах погрешности получают больше первоначальных (рис. 1.20). Но характерного для потери устойчивости чередования знаков погрешностей не наблюдается. В следующих приближениях погрешности быстро уменьшаются, и на 11-м шаге вычислений итерационный процесс сходится. В 12-м итерационном

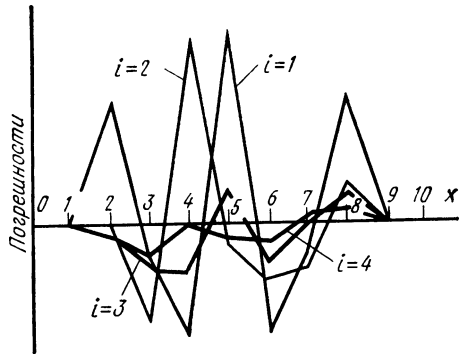


Рис. 1.20.

цикле, значения прогибов остаются неизменными. Сколько бы мы теперь ни продолжали расчет, значения прогибов останутся такими же. Процесс вычислений устойчив. Нарушен закон чередования знаков погрешностей — и неустойчивость процесса вычислений исчезает.

Мы говорим, что формула (1.16) должна давать точные значения прогибов, а в нашем расчете они получились приближенными и отличаются от точных значений, показанных на рис. 1.16 на 3-4 единицы младшего разряда. Может быть это свойство самих итерационных формул (1.18) и (1.19)? Нет. Если они удовлетворяются, то будет удовлетворяться и формула (1.16).

Здесь мы имеем дело с погрешностями округления. В этом нетрудно убедиться, если продолжить вычисления с большим числом значащих цифр, но мы это сделаем в другом примере. А пока мы рассмотрим различные способы построения разностного уравнения и более сложный случай анализа устойчивости вычислительного процесса.

1.13. Разные разности

Мы говорили о том, что существует много способов построения разностных выражений, аппроксимирующих дифференциальный оператор. Разностная формула в левой части уравнения (1.16) является самой простой формулой, аппроксимирующей четвертую производную. Она будет единственной, аппроксимирующей четвертую производную на 5-точечном шаблоне. Но можно получить разностную формулу для шаблона, имеющего большее число точек.

На 7-точечном шаблоне можно получить бесконечное множество четвертых разностей, аппроксимирующих четвертую производную со вторым порядком. Запишем некоторые из них:

$$\begin{aligned}
 & (-w_{m+3} + 8w_{m+2} - 23w_{m+1} + 32w_m - 23w_{m-1} + \\
 & \quad + 8w_{m-2} - w_{m-3})/2h^4, \\
 & (-w_{m+3} + 10w_{m+2} - 31w_{m+1} + 44w_m - 31w_{m-1} + \\
 & \quad + 10w_{m-2} - w_{m-3})/4h^4, \\
 & (w_{m+3} - 2w_{m+2} - w_{m+1} + 4w_m - w_{m-1} - 2w_{m-2} + w_{m-3})/4h^4, \\
 & (w_{m+3} - 4w_{m+2} + 7w_{m+1} - 8w_m + 7w_{m-1} - 4w_{m-2} + w_{m-3})/2h^4.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Покажем, как эти формулы получаются. Нужно обозначить коэффициенты при пропихах в семи узлах какими-то буквами, например a_1, a_2, \dots, a_7 , и представить четвертую разность в виде

$$\frac{a_1 w_{m+3} + a_2 w_{m+2} + a_3 w_{m+1} + a_4 w_m + a_5 w_{m-1} + a_6 w_{m-2} + a_7 w_{m-3}}{4h^4}. \quad (1.21)$$

Далее следует разложить это выражение в ряд Тейлора вблизи точки $x=mh$, сгруппировать одинаковые производные и приравнять коэффициенты при производных нулю, за исключением коэффициента при четвертой производной, который должен быть равен единице. Если ограничиться в разложении только шестью членами, чтобы порядок аппроксимации был вторым, то получается система из шести уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= 0, \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 - a_5 - 2a_6 - 3a_7 &= 0, \\ 9a_1 + 4a_2 + a_3 + a_5 + 4a_6 + 9a_7 &= 0, \\ 27a_1 + 8a_2 + a_3 - a_5 - 8a_6 - 27a_7 &= 0, \\ 81a_1 + 16a_2 + a_3 + a_5 + 16a_6 + 81a_7 &= 96, \\ 243a_1 + 32a_2 + a_3 - a_5 - 32a_6 - 243a_7 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Считая один из коэффициентов, например a_1 , известным, можно выразить через него все остальные:

$$a_7 = a_1, \quad a_2 = a_6 = 4 - 6a_1, \quad a_3 = a_5 = 15a_1 - 16, \\ a_4 = 24 - 20a_1.$$

Теперь, давая коэффициенту a_1 различные значения, получаем разные выражения для четвертой разности. Любое из этих выражений аппроксимирует четвертую производную со вторым порядком.

А какое из этих выражений будет самым лучшим?

Это зависит от того, что мы намерены делать с ним дальше. Если, например, требуется получить лучшее приближение к четвертой производной, т. е. повысить порядок аппроксимации до четвертого, то к системе (1.22) нужно добавить еще одно уравнение

$$729a_1 + 64a_2 + a_3 + a_5 + 64a_6 + 729a_7 = 0.$$

Это уравнение обращает в нуль коэффициент при шестой производной в разложении разности (1.21) в ряд Тейлора. Теперь коэффициент a_1 приобретает определенное значение: $a_1 = -2/3$. На 7-точечном шаблоне будет определена только одна разность, аппроксимирующая четвертую производную с четвертым порядком:

$$\frac{2W_{m+3} + 24W_{m+2} - 78W_{m+1} + \dots}{15h^4} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\dots + 112W_m - 78W_{m-1} + 24W_{m-2} - 2W_{m-3}}{15h^4}.$$

Таким образом, можно строить различные разностные выражения, аппроксимирующие производные. На 9-точечном шаблоне можно сконструировать четвертую разность, обладающую шестым поряд-

ком аппроксимации, на 11-точечном шаблоне — восьмым порядком и т. д.

Однако повышать порядок аппроксимации хорошо только до тех пор, пока не ухудшаются другие качества разностной задачи. Замечено, что при большом числе точек шаблона вычислительный процесс может быть неустойчивым. Например, если в разностной формуле сохраняется чередование знаков перед членами, то, естественно, начальные погрешности будут тем значительнее, чем больше число членов в разностной формуле и чем больше коэффициенты перед этими членами. В этом смысле наиболее интересна третья сверху формула (1.20). В этой формуле самые маленькие коэффициенты и, кроме того, у нее необычное чередование знаков перед членами. Знаки меняются по системе: один «+», два «-», один «+», два «-», один «+». Попробуем решить нашу задачу о прогибах балки с помощью этой формулы. Приравняв нулю четвертую разность, получим разностный аналог дифференциального уравнения (1.13)

$$\frac{W_{m+3} - 2W_{m+2} - W_{m+1} + 4W_m - W_{m-1} - 2W_{m-2} + W_{m-3}}{4h^4} = 0. \quad (1.23)$$

Нетрудно убедиться, что это разностное уравнение опять аппроксимирует дифференциальное уравнение с бесконечным порядком.

Решив уравнение (1.23) относительно прогиба в узле с номером m , получим итерационную формулу

$$W_m^{i+1} = (-W_{m+3}^i + 2W_{m+2}^i + W_{m+1}^i + W_{m-1}^i + 2W_{m-1}^i + 2W_{m-2}^i - W_{m-3}^i) / 4. \quad (1.24)$$

Нас интересует устойчивость процесса вычислений с помощью этой формулы, поэтому не будем нарушать чередования знаков в процессе вычислений, т. е. при вычислении следующего приближения $i+1$ учтем только прогибы, полученные в предыдущем приближении.

Теперь при вычислениях будем использовать 7-точечный шаблон, пригодный для вычисления прогибов в узлах m с номером 3, 4, 5, 6, 7, и нужно подумать о том, что делать с узлами 2 и 8, для которых формула (1.24) не годится, т. е. нужно записать формулу для расчета прогибов в узлах 2 и 8.

Таким образом, при решении нашей задачи набирается несколько разностных формул для вычисления прогибов в различных узлах. Эти формулы определяют алгоритм решения задачи на ЦВМ. Для записи алгоритма разработаны различные формы [2, 7], которые в принципе мало чем отличаются друг от друга. Запись алгоритма по определенной формуле называется *разностной схемой*. Рассмотрим один из основных способов записи разностной схемы.

1.14. Разностная схема

Выше при решении задач мы так или иначе определяли способ вычисления искомых функций (давления, прогибов) во всех узлах сетки. При этом многое объясняли словами. Такой способ формулировки алгоритма расчета не является строгим и иногда

Допускает различное толкование, особенно при решении более сложных задач, чем те, которые мы пока рассматриваем.

Программисту нужна строгая запись, от которой чисто формально можно перейти к программированию задачи на каком-либо алгоритмическом языке, например АЛГОЛ или ФОРТРАН, или к программированию в машинном коде.

Разностная схема и является той удобной и строгой формой записи, которой пользуются при разностном решении задач. Она обычно содержит три основные части: разностное уравнение для вычисления искомых функций во всех внутренних узлах области, граничные и начальные условия. В случае использования 7-точечного шаблона для вычисления прогибов балки разностную схему можно записать следующим образом.

Разностное уравнение

$$W_m^{i+1} = (-W_{m+3}^i + 2W_{m+2}^i + W_{m+1}^i + W_{m-1}^i + 2W_{m-2}^i - W_{m-3}^i)/4, \quad m = 3, 4, \dots, 7.$$

Граничные условия

$$W_0^{i+1} = W_{10}^{i+1} = 0, \quad W_1^{i+1} = W_9^{i+1} = 0,09,$$

$$W_m^{i+1} = (-W_{m+2}^i + 4W_{m+1}^i + 4W_{m-1}^i - W_{m-2}^i)/6, \quad m = 2, 8. \quad (1.25)$$

Начальные условия (первое приближение)

$$W_m^1 = \varphi(m),$$

где $\varphi(m)$ — заданная функция, т. е. значения прогибов в первом приближении.

После выражения, где номер узла m записан в общем виде, указывают номера узлов, для которых это выражение предназначено. Чем больше точек у шаблона, тем меньше внутренних узлов, для которых пригодно разностное уравнение. В нашем примере можно считать граничными три узла с каждой стороны балки. А граничные условия, записанные в дифференциальной форме (1.15), после аппроксимации их разностными выражениями, позволяют вычислить прогибы только в двух узлах с каждой стороны. В этом случае для вычисления функций в третьем узле можно использовать разностное уравнение, записанное на 5-точечном шаблоне (1.17). Так мы и записали в разностной схеме (1.25).

Но мы убедились, что уравнение (1.17) дает неустойчивое решение в том случае, если с помощью этого уравнения вычисляются прогибы во всех узлах. Так что может получиться, что разностная схема (1.25) приводит к неустойчивому решению.

Проверим это.

В табл. 1.6 приведены результаты вычислений по разностной схеме (1.25). Мы видим, что накопления начальных погрешностей не превосходит и процесс вычисления устойчив.

Обобщая сказанное выше, можно заключить, что одна и та же разностная формула на ограниченном числе узлов сетки может давать устойчивое решение, а при большем числе узлов — неустойчивое. Если в нашем примере вычислять прогибы по формуле (1.17) во всех узлах 2...8, то решение получается неустойчивым, а если по (1.17) рассчитывать прогибы только в двух узлах (2 и 8), то решение будет устойчивым.

Таблица 1.6

i	Номер узла m								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0,09	0,200	0,200	0,200	0,300	0,200	0,200	0,200
2	0	0,09	0,160	0,245	0,252	0,200	0,252	0,245	0,160
3	0	0,09	0,181	0,233	0,234	0,291	0,234	0,233	0,181
4	0	0,09	0,176	0,235	0,258	0,260	0,258	0,235	0,176
5	0	0,09	0,174	0,219	0,260	0,276	0,260	0,219	0,174

В дальнейшем нас будут интересовать свойства самой разностной формулы (1.24), поэтому лучше воспользоваться тем, что нам известны точные решения во всех узлах сетки и записать в узлах 2 и 8 точные значения: $W_2^{i+1} = W_8^{i+1} = 0,16$. Тем самым мы сохраняем в расчете только погрешности, вносимые формулой (1.24). В табл. 1.7 приведены результаты вычислений по формуле

Таблица 1.7

i	Номер узла m								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0,090	0,160	0,200	0,200	0,300	0,200	0,200	0,200
2	0	0,090	0,160	0,235	0,232	0,210	0,232	0,235	0,160
3	0	0,090	0,160	0,190	0,226	0,271	0,226	0,190	0,160
4	0	0,090	0,160	0,220	0,238	0,223	0,238	0,220	0,160
5	0	0,090	0,160	0,196	0,232	0,259	0,232	0,196	0,160
6	0	0,090	0,160	0,214	0,238	0,232	0,238	0,214	0,160
7	0	0,090	0,160	0,201	0,234	0,258	0,234	0,201	0,160
8	0	0,090	0,160	0,211	0,238	0,238	0,238	0,211	0,160
9	0	0,090	0,160	0,204	0,236	0,250	0,236	0,204	0,160
10	0	0,090	0,160	0,210	0,238	0,242	0,238	0,210	0,160
11	0	0,090	0,160	0,206	0,237	0,249	0,237	0,206	0,160
12	0	0,090	0,160	0,209	0,238	0,244	0,238	0,209	0,160
13	0	0,090	0,160	0,207	0,237	0,248	0,237	0,207	0,160
14	0	0,090	0,160	0,209	0,238	0,245	0,238	0,209	0,160
15	0	0,090	0,160	0,208	0,237	0,247	0,237	0,208	0,160

(1.24). На 15-м приближении задача сходится, следовательно, процесс вычислений устойчив. Сравнивая табл. 1.5 и 1.7, видим, что в последнем случае процесс сходится медленнее.

Отсюда можно сделать вывод: различные сходящиеся итерационные процессы приводят к разному объему вычислений.

Прогибы, приведенные в табл. 1.7, вычислялись с точностью до трех знаков после запятой. Однако после окончания итерационного процесса мы вновь не получили точных значений. Погрешность вычислений составляет две-три единицы младшего (третьего) разряда числа. Величина погрешности определяется числом знаков, до которых округляются результаты вычислений, и называется *погрешностью округления*.

1.15. Погрешности округления

Чтобы изучить погрешности округления, продолжим вычисления с четырьмя значащими цифрами. В результате на 32-м приближении итерационный процесс снова сходится, т. е. значащие цифры перестают изменяться (табл. 1.8). Теперь погрешность составляет

Таблица 1.8

i	Номер узла m								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
31	0	0,0900	0,1600	0,2097	0,2397	0,2495	0,2396	0,2097	0,1600
32	0	0,0900	0,1600	0,2097	0,2397	0,2495	0,2397	0,2097	0,1600
33	0	0,0900	0,1600	0,2097	0,2397	0,2496	0,2397	0,2097	0,1600

три-четыре единицы четвертого разряда, при добавлении лишнего разряда точность вычислений повышается примерно на порядок. При расчетах стационарных процессов, если процесс вычислений устойчив, погрешности округления особых хлопот не доставляют. Они в последующих приближениях не накапливаются и остаются меньшими некоторой величины, зависящей от числа разрядов в числе. Другое дело — расчеты нестационарных процессов, к которым мы перейдем в следующей главе.

Нестационарные процессы разностными методами рассчитывают последовательно во времени или, как говорят, по временным слоям. По данным, характеризующим состояние конструкции на предыдущих временных слоях, вычисляют искомые функции, определяющие состояние конструкции на следующем временном слое, или попросту в следующий момент времени. Итак процесс может продолжаться на несколько сотен, а иногда и тысяч шагов по времени. В таком процессе вычислений погрешности округления могут накапливаться. Что значит «накапливаться»? Это значит, что погрешность, возникающая в одном узле сетки, будет складываться или вычитаться с другими погрешностями округления, возникающими в соседних узлах или в том же самом узле в последующих шагах вычислений по времени. Если погрешности вычитаются — это хорошо. Но какова гарантия того, что в каком-то участке сетки не произойдет сложения многих погрешностей и не получится весьма большая суммарная погрешность?

Чтобы представить себе «поведение» погрешностей округления в последующих шагах вычислений, можно обратиться к следующему рассуждению. Погрешность округления можно рассматривать как некоторое возмущение, вносимое в анализируемый физический процесс извне. Действительно, предположим, что мы, рассчитывая нестационарное течение жидкости, допустили погрешность в вычислении давления в каком-то узле сетки. Эту погрешность можно рассматривать как изменение давления за счет некоторого кратковременного дополнительного потока (рис. 1.21). Нетрудно представить, что если в жидкость добавить лишнюю «каплю», то она растечется в разные стороны и добавление выровняется. Для процессов в жидкостях характерно затухание или релаксация внешних возмущений. Будут «затухать» и погрешности округления.

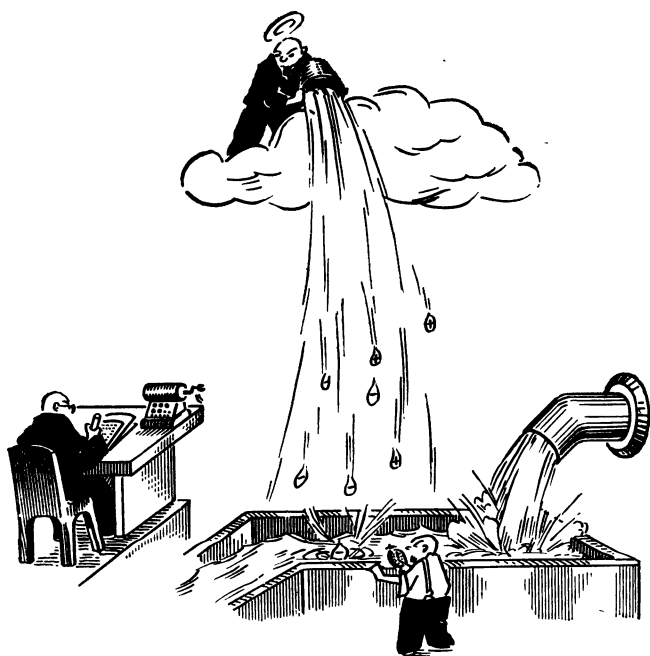


Рис. 1.21.

То же происходит с погрешностями округления при расчетах тепловых процессов. Можно принять, что погрешность вычисления температуры возникает при повышении или понижении температуры вследствие кратковременного «включения» дополнительного теплового потока. «Порция» теплоты, вносимая этим потоком, будет «растекаться» к соседним узлам и погрешность будет уменьшаться.

Сложнее обстоит дело при расчетах физических процессов, где релаксации внешних возмущений не происходит, например при расчетах процессов вибраций. Если в расчете не учитываются потери энергии на внутреннее трение в материалах конструкции, то никакие возмущения, в том числе и погрешности округления, в процессе расчета затухать не будут. Однако они могут быть случайно скомпенсированы погрешностями, возникающими в других узлах и в другое время. В противном случае погрешность округления, действующая как импульс силы в узле, вызовет в модели упругую волну погрешностей. Эта волна будет распространяться в модели, отражаться от границ области, складываться с другими волнами, в том числе и с волнами вибраций, которые мы вычисляем.

Может ли погрешность округления при сложении с другими погрешностями намного превзойти первоначальную величину? Иными словами, могут ли при расчетах процессов, где релаксация отсутствует, погрешности округления складываться достаточно долго, и суммарная погрешность внесет существенные искажения в резуль-

тат вычислений? Да, в принципе могут. Однако такое совпадение маловероятно. Например, если модель-сетка имеет тысячу узлов и расчет производится на тысячу шагов по времени, вероятность возрастания погрешностей округления в 40 раз составляет 10^{-6} .

Таким образом, имея в запасе два-три лишних знаковых разряда в числах, можно в аналогичных задачах погрешности округления во внимание не принимать. Мы на примерах простых модельных задач познакомились со способами построения разностных схем и формой их записи и рассмотрели способы оценки «качества» полученных разностных схем. Схемы должны удовлетворять двум основным требованиям: обладать аппроксимацией и быть устойчивыми.

Далее мы перейдем к решению более сложных задач, встречающихся при конструировании радиоаппаратуры.

Одной из основных характеристик состояния вещества является его температура. От температуры зависят все свойства вещества — как механические так и электрические. Особенно сильно влияет температура на электрические свойства полупроводников. Так, при изменении температуры всего на несколько десятков градусов электропроводность германия и кремния может меняться в сотни раз. Кристалл, который при низких температурах мог служить изолятором, при высоких становится проводником (рис. 2.1). Поэтому одной из основных характеристик радиоэлементов или радиоэлектронного прибора является диапазон температур, в котором они надежно выполняют свои функции.

Радиоэлектронные устройства не предназначены для выполнения механической работы. Коэффициент полезного действия у них практически равен нулю. Вся или почти вся электрическая энергия, которую они потребляют, превращается в тепло.

Тепло выделяется, как правило, именно в тех участках, где это грозит выходом прибора из строя. Например, оно выделяется на закрытых $p-n$ переходах транзисторов и диодов. Повышение температуры переходов увеличивает ток через них, а это, в свою очередь, вызывает увеличение рассеиваемой мощности, т. е. еще более интенсивное выделение тепла, и т. д. Получается лавинообразный процесс нарастания температуры. Если его вовремя не остановить, то произойдет тепловой пробой перехода. Остановить этот процесс можно только достаточно интенсивным охлаждением, например, с помощью теплоотводов (радиаторов).

Однако уменьшение размеров и веса блоков, применение интегральных микросхем, интенсивный режим эксплуатации радиоаппаратуры часто в условиях повышен-

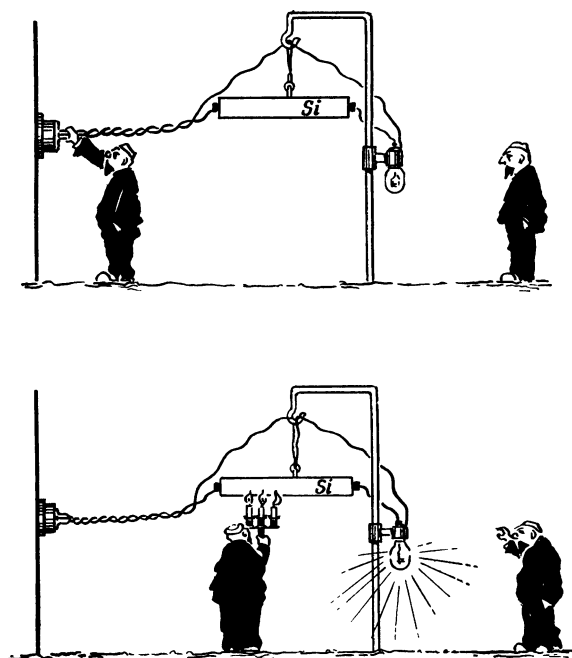


Рис. 2.1.

ной температуры окружающей среды — осложняют задачу обеспечения правильного теплового режима радиоэлементов.

Чтобы еще на стадии проектирования РЭА убедиться, что в создаваемой конструкции все сделано правильно и температура ее элементов не превысит допустимого значения, нужно рассчитать тепловой режим. Расчет тепловых процессов — одна из основных проблем, возникающих при проектировании радиоаппаратуры. Надо сказать, что это довольно сложная задача, так как она связана с расчетом трехмерных нестационарных процессов в областях сложной конфигурации, скажем, внутри телевизора или радиоприемника.

2.1. Теплопроводность, конвекция, лучеиспускание

Проследим возможные пути движения теплоты в радиоконструкции. Теплота выделяется на радиоэlemen-

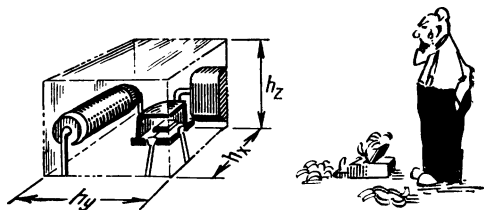


Рис. 2.2.

тах при прохождении через них электрического тока. Интенсивность этого процесса определяется величиной тепловой энергии, выделяемой в единице объема в единицу времени. Эту величину называют удельным внутренним тепловыделением. Обозначим ее буквой q .

Величину q легко вычислить как мощность, рассеиваемую радиоэлементом, деленную на объем элемента. При практических расчетах нам придется за величину объема при вычислении принимать не объем самого элемента, а объем элемента пространства, определяемый выбранными шагами сетки (рис. 2.2).

Радиоэлементы могут быть помещены в твердый наполнитель (пенопласт, компаунд или резину) или прижаты к твердому телу (радиатору, плате, шасси). В этом случае потоки тепла распространяются от радиоэлементов по твердому телу в различных направлениях. Этот процесс называют *теплопроводностью*.

На поверхности твердое тело соприкасается с жидкостью или газом и тепло передается им. Интенсивность этого процесса определяется количеством теплоты, проходящей через единицу поверхности в единицу времени, т. е. плотностью теплового потока. Эта величина обычно заранее неизвестна. Ее надо определить в процессе расчета.

Далее распространение тепла идет тремя путями. Во-первых, тепло передается между молекулами жидкости или газа за счет теплопроводности. Если жидкость или газ неподвижны, то этот процесс ничем не отличается от процесса теплопроводности в твердом теле. Но жидкость или газ не стоят на месте. Они движутся «принудительно» с помощью насоса или вентилятора или естественно под влиянием подъемной силы, вызванной их расширением при нагревании. Таким образом, второй

путь распространения тепла — вместе с потоками жидкости и газа. Этот процесс переноса тепла, называемый конвекцией, сложнее, чем теплопроводность, так как для определения количества теплоты, уносимой жидкостью или газом, нужно знать направление и величину скоростей частиц во всей рассматриваемой области, т. е. поле скоростей. В случае принудительного движения жидкости или газа, когда естественным перемешиванием можно пренебречь, поле скоростей будет зависеть только от работы насоса или вентилятора и его можно получить гидро- или аэродинамическими расчетами, не связанными непосредственно с теплообменом. Другими словами, можно отделить тепловые процессы от гидро- и аэродинамических, и при тепловых расчетах считать, что поле скоростей задано.

Если же перемешивание жидкости или газа происходит естественным путем, то гидро- и аэродинамические процессы неотделимы от тепловых и картина значительно усложняется.

Наконец, третий путь распространения тепла — лучеиспускание.

Лучеиспускание рассматривается как процесс теплопередачи между поверхностями твердых тел, разделенных прозрачной средой. Для описания процесса лучеиспускания нерационально использовать уравнения в частных производных. Гораздо проще получают интегральные соотношения [5], учитывающие коэффициенты поглощения и отражения поверхностей твердых тел, а также коэффициенты пропускания прозрачной среды между твердыми телами. Поэтому и разностные методы при расчетах лучеиспускания не применяются. Мы также не будем учитывать в расчетах лучеиспускание, тем более, что в радиоконструкциях лучеиспускание в процессах теплопередачи существенной роли не играет.

Не будем мы заниматься и вопросами расчета конвекционного теплообмена. Эта задача слишком сложна для разностных методов расчета. Сложность состоит в том, что в радиоконструкциях воздушные потоки проходят в пространстве между различными деталями сложной конфигурации. Чтобы отразить в модели эту конфигурацию, приходится брать мелкую сетку. Объем вычислений получается очень большим. Гораздо проще оценить количество теплоты, выводимой из аппарата путем конвекции, на основе эмпирических коэффициентов.

Поэтому в рамках настоящей книги мы ограничимся только расчетом процессов теплопроводности внутри твердых тел, считая температуру или тепловые потоки на их поверхности заданными.

2.2. Модель-сетка

Разобьем мысленно конструкцию на части прямоугольной формы (рис. 2.3). Назовем каждую из этих частей элементом. Для повышения точности расчета следует выбирать размеры элементов поменьше, и все элементы следует делать одинаковых размеров. В центре элемента выделим особую точку — узел сетки.

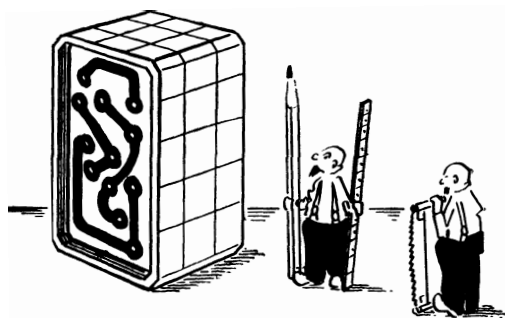


Рис. 2.3.

Таким образом, мы вновь пришли к необходимости введения сетки для решения нашей задачи разностным методом. Множество узлов, составляющих сетку, теперь будет трехмерным, кроме того, процесс будет нестационарным и необходимо ввести в задачу также дискретизацию во времени.

Величины, определяемые в узлах сетки, должны иметь четыре индекса, например $\theta_{i, j, k}$.

Нижние индексы указывают номер узла в направлении каждой из координатных осей x , y или z , а верхний индекс — номер шага по времени.

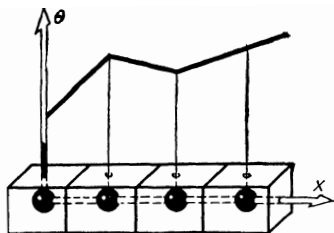
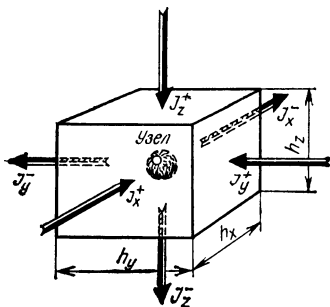


Рис. 2.4.

В этих узлах и будет вычисляться температура. В интервале между узлами температура считается изменяющейся по линейному закону. Таким образом, температура в нашей модели будет кусочно-линейной функцией координат (рис. 2.4).

2.3. Закон сохранения тепловой энергии

Запишем типовое уравнение движения теплоты. Для этого воспользуемся законом сохранения тепловой энергии: количество притекающей к данному элементу энергии равно количеству утекающей энергии плюс количество накапливающейся энергии в элементе.



Фиг. 2.5.

выделяемой энергии за счет электрических потерь.

Количество энергии, притекающей и утекающей через боковые поверхности каждого из рассматриваемых элементов, выражается через величину плотности тепловых потоков (рис. 2.5). Удельная плотность теплового потока J определяется количеством теплоты, проходящей через единичную площадь в единицу времени. Чтобы определить количество теплоты, проходящей через боковую грань элемента за некоторое время, нужно соответствующую плотность теплового потока умножить на площадь грани и на интервал времени.

Таким образом, баланс количества теплоты за время τ для элемента модели можно записать в виде простого соотношения

$$(J_x^+ - J_x^-) h_y h_z \tau + (J_y^+ - J_y^-) h_x h_z \tau + (J_z^+ - J_z^-) h_x h_y \tau = C \Delta \theta, \quad (2.1)$$

где J — удельные плотности тепловых потоков.

В правой части (2.1) записано количество теплоты, накапливаемой внутри элемента за время τ . Оно равно теплоемкости элемента C , умноженной на приращение его температуры $\Delta\theta$ за время τ .

Заметим, во-первых, что во избежание путаницы со знаками мы при выводе формул условно считаем, что искомые функции температур θ возрастают в направлении координатных осей. Тепловые потоки распространяются от точек с более высокой температурой к точкам с более низкой температурой. Поэтому потоки тепла мы направили против направления координатных осей.

Во-вторых, мы обозначали температуру несколько непривычным символом θ вместо более привычного t или T . Это не потому, что нам так больше нравится. К этому нас вынуждают обстоятельства. Через t будем обозначать текущее время, а через T — период колебаний.

В-третьих, вывод уравнения теплопроводности, который мы выполняем для элемента конечных размеров $h_x h_y h_z$, по той же схеме можно выполнить и для бесконечно малого элемента $dx dy dz$. В результате получится уравнение в частных производных. При конечных размерах элемента получается уравнение непосредственно в конечных разностях.

Выполним в уравнении (2.1) следующие преобразования.

1. Приведем количество теплоты в левой и правой части уравнения к единичному объему и к единице времени, для этого разделим все члены на объем элемента $h_x h_y h_z$ и на интервал времени τ .

2. Представим приращение температуры $\Delta\theta$ за интервал τ в виде разности температур в начале и в конце этого интервала:

$$\Delta\theta = \theta_{i,j,k}^{s+1} - \theta_{i,j,k}^s$$

В результате получим уравнение

$$\frac{J_x^+ - J_x^-}{h_x} + \frac{J_y^+ - J_y^-}{h_y} + \frac{J_z^+ - J_z^-}{h_z} = C \frac{\theta_{i,j,k}^{s+1} - \theta_{i,j,k}^s}{\tau}, \quad (2.2)$$

Теперь в правой части уравнения (2.2) стоит не теплоемкость элемента, а удельная теплоемкость вещества, составляющего элемент. В целом правая часть определяет количество теплоты, которое накапливается в единичном объеме в единицу времени в том месте тепло-

вого поля, где расположен рассматриваемый элемент. Теперь можно учесть тепло, выделяющееся в радиоэлементах, за счет превращения электрической энергии в тепловую. Поскольку удельное тепловыделение определяется как количество теплоты, выделяемой в единице объема за единицу времени, то можно просто прибавить соответствующий член к левой части уравнения

$$\frac{J_x^+ - J_x^-}{h_x} + \frac{J_y^+ - J_y^-}{h_y} + \frac{J_z^+ - J_z^-}{h_z} + q = C \frac{\theta_{i,j,k}^{s+1} - \theta_{i,j,k}^s}{\tau}. \quad (2.3)$$

Удельное тепловыделение q стоит в левой части уравнения потому, что оно вносит теплоту в рассматриваемый объем.

Теперь необходимо выразить плотности потоков J через температуру в узлах сетки (рис. 2.6). Для этого нужно прежде всего ввести нумерацию узлов сетки по координатам и времени. Залитые блоки радиоэлектронной аппаратуры чаще всего имеют прямоугольную форму, поэтому при построении уравнений мы применяем прямоугольную систему координат, в которой координатные плоскости параллельны граням рассматриваемого прямоугольника. Толщину, ширину и высоту прямоугольника обозначим через l_x , l_y и l_z , а шаги сетки в соответствующих направлениях мы уже обозначили через

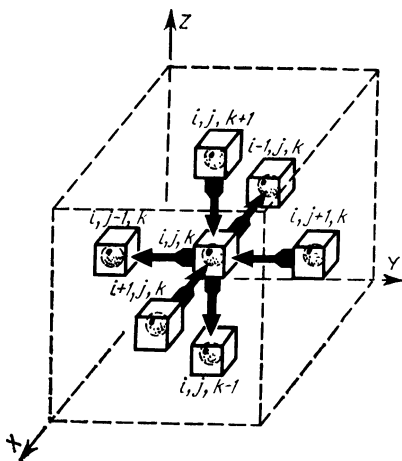


Рис. 2.6.

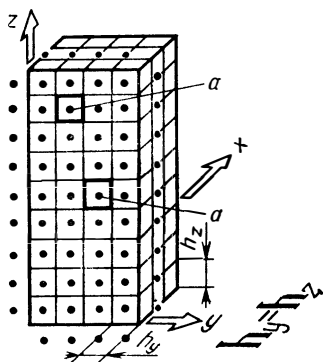


Рис. 2.7.

h_x , h_y и h_z . Следовательно, в каждом из направлений получается l_x/h_x , l_y/h_y и l_z/h_z шагов соответственно.

При тепловых расчетах мы имеем дело с тепловыми потоками, которые определяются на гранях элементов, поэтому на поверхность рассматриваемой области должны выходить грани крайних элементов (рис. 2.7), а граничные узлы должны располагаться на расстоянии половины соответствующего шага сетки от поверхности. Если начало координат поместить в одной из вершин прямоугольной области, то координаты узлов можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega = \{x = (0,5 + i) h_x, \quad y = (0,5 + j) h_y, \\ z = (0,5 + k) h_z \mid i = 1, 2, \dots, l_x/h_x, \\ j = 1, 2, \dots, l_y/h_y, \quad k = 1, 2, \dots, l_z/h_z\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Номер шага по времени будем обозначать через s , тогда текущее время в расчете определяется как произведение $t = st$. Чтобы выразить тепловые потоки через температуру в узлах сетки, воспользуемся гипотезой о линейности свойств среды — законом Фурье. Этот закон говорит о том, что плотность теплового потока между двумя точками пропорциональна разности температур между этими точками и обратно пропорциональна расстоянию между ними, например:

$$J_x^+ = K \frac{\Theta^s_{i+1,j,k} - \Theta^s_{i,j,k}}{h_x}. \quad (2.5)$$

Коэффициентом пропорциональности здесь служит коэффициент теплопроводности вещества K .

Запишем уравнения для плотностей всех шести потоков, входящих в уравнение теплового баланса:

$$\begin{aligned} J_x^+ &= K \frac{\Theta^s_{i+1,j,k} - \Theta^s_{i,j,k}}{h_x}; & J_x^- &= K \frac{\Theta^s_{i,j,k} - \Theta^s_{i-1,j,k}}{h_x}; \\ J_y^+ &= K \frac{\Theta^s_{i,j+1,k} - \Theta^s_{i,j,k}}{h_y}; & J_y^- &= K \frac{\Theta^s_{i,j,k} - \Theta^s_{i,j-1,k}}{h_y}; \\ J_z^+ &= K \frac{\Theta^s_{i,j,k+1} - \Theta^s_{i,j,k}}{h_z}; & J_z^- &= K \frac{\Theta^s_{i,j,k} - \Theta^s_{i,j,k-1}}{h_z}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если теперь подставить значения плотностей потоков в уравнение (2.3), то получится известное уравнение теплопроводности, которое называют уравнением Фурье. Только уравнение Фурье обычно записывается в дифференциальной форме, а у нас оно получилось в разностной форме. В такой форме мы и будем это уравнение решать.

2.4. Формулировка задачи

Предположим, что блок радиоконструкции имеет прямоугольную форму (см. рис. 2.7). Внутри него находятся источники тепла — радиоэлементы, через которые протекает электрический ток. Попытаемся определить температуру в каждой точке блока в каждый момент времени. Для простоты будем считать, что блок однороден, т. е. входящие в него материалы имеют одинаковые удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности.

Следовательно, будем считать заданными размеры блока, координаты радиоэлементов, излучающих тепло, мощность тепловыделения, а также коэффициент теплопроводности и удельную теплоемкость. Кроме того, для решения нестационарной задачи должны быть заданы начальные и граничные условия.

В начальных условиях задачи необходимо указать температуру во всех точках блока в начальный момент времени. Обычно при рассмотрении переходных процессов за начальный момент времени выбирается момент включения электрических цепей. До этого момента температура во всех точках считается одинаковой и равной наружной температуре, например комнатной (20°C , или 293 K).

В граничных точках блока могут быть заданы различные граничные условия. Когда на границе задается значение самой функции, т. е. температура — это граничные условия I рода и решение получается наиболее простым. Однако, к сожалению, только при грубом упрощении нестационарной задачи можно считать температуру на поверхности блока заданной, например равной известной наружной температуре. Более близкими к реальным условиям в радиоаппаратуре являются граничные условия II рода, когда задаются плотности теплового потока по всей наружной поверхности блока. Мы будем решать задачу с граничными условиями II рода.

Плотность потока на поверхности определяется исходя из предположения, что потоки на границах блока пропорциональны перепаду температур на некотором расстоянии, равном h_x , и что температура за пределами блока постоянна. Такие условия могут быть при охлаждении блока путем принудительного обдува воздухом постоянной температуры. Итак, плотность потока на

границе с нормалью x равна

$$J_x^+ = K_r \frac{\theta_n^s - \theta^s l_x / h_x \cdot J \cdot k}{h_x}. \quad (2.7)$$

Сравнивая (2.7) и (2.4), видим их полную аналогию. И в последнем случае величина K_r имеет смысл коэффициента теплопроводности. Только это не теплопроводность материала блока, а теплопроводность интервала, в который входит граница блока. Шаг h_x введен в выражение (2.7) искусственно лишь для того, чтобы определить положение точки за контуром, в которой температура считается известной. Этот шаг можно взять таким же, как и внутри блока. При экспериментальном изучении теплопроводящих свойств границы раздела определяет непосредственно отношение K_r/h_x , которое называют коэффициентом теплоотдачи или теплообмена.

Для удобства вычислений следует преобразовать уравнения (2.3) и (2.6), введя в них безразмерные множители. Для этого левую и правую части умножают на шаг по времени τ и делят на удельную теплоемкость C . Для величины плотностей потоков вводится новое обозначение:

$$\begin{aligned} I_x^+ &= \frac{\tau}{Ch_x} J_x^+; & I_x^- &= \frac{\tau}{Ch_x} J_x^-; \\ I_y^+ &= \frac{\tau}{Ch_y} J_y^+; & I_y^- &= \frac{\tau}{Ch_y} J_y^-; \\ I_z^+ &= \frac{\tau}{Ch_z} J_z^+; & I_z^- &= \frac{\tau}{Ch_z} J_z^-. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вводится новое обозначение и для удельного тепловыделения:

$$Q = \frac{\tau}{C} q.$$

В новых обозначениях уравнение (2.3) записывается в виде

$$I_x^+ - I_x^- + I_y^+ - I_y^- + I_z^+ - I_z^- + Q = \theta^{s+1} - \theta^s. \quad (2.9)$$

Теперь и плотности потоков и удельное тепловыделение имеют одну и ту же размерность — размерность температуры и будут величинами одного порядка. Перейти от величин в новых обозначениях к величинам в старых обозначениях не представляет труда, поскольку

ку шаги по координатам и времени мы выбираем сами, а удельная теплоемкость нам задана.

Для новых плотностей потоков теперь вместо (2.6) получаются выражения

$$\begin{aligned}
 I_x^+ &= A_x [\theta_{l+1,j,k}^s - \theta_{l,j,k}^s], \\
 I_x^- &= A_x [\theta_{l,j,k}^s - \theta_{l-1,j,k}^s], \\
 I_y^+ &= A_y [\theta_{l,j+1,k}^s - \theta_{l,j,k}^s], \\
 I_y^- &= A_y [\theta_{l,j,k}^s - \theta_{l,j-1,k}^s], \\
 I_z^+ &= A_z [\theta_{l,j,k+1}^s - \theta_{l,j,k}^s], \\
 I_z^- &= A_z [\theta_{l,j,k}^s - \theta_{l,j,k-1}^s].
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Теперь размерные множители (шаги, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности) сгруппировались в виде множителей A :

$$A_x = \frac{K\tau}{h^2_x C}; \quad A_y = \frac{K\tau}{h^2_y C}; \quad A_z = \frac{K\tau}{h^2_z C}. \tag{2.11}$$

Поскольку единица коэффициента теплопроводности равна 1 Дж/(1 м·К·с), а удельной теплоемкости 1 Дж/(1 м³·К), коэффициенты A являются безразмерными величинами.

Предположим теперь, что наш блок сделан из алюминия, который имеет при комнатной температуре удельную теплоемкость около 2,4 МДж/(м³·К) и коэффициент теплопроводности около 200 Дж/(м·К·с). Предположим далее, что шаги по координатам выбраны одинаковыми и равными 1 см. Теперь, чтобы определить коэффициенты A , остается только выбрать шаг по времени τ .

Однако оказывается, что выбор шага по времени не такое простое дело. Чтобы поскорее просчитать процесс на заданное время, т. е. чтобы в заданном интервале времени было поменьше шагов τ , нужно выбирать шаг большим. Но если шаг τ превысит некоторую критическую величину, то верного решения не получится. Решение будет неустойчивым. Условие устойчивости будет выполнено, если сумма всех шести коэффициентов в уравнениях (2.10) меньше единицы.

Поскольку коэффициенты одинаковы, можно положить каждый из них равным 1/6, и тогда шаг по времени составит 0,2 с.

Теперь определим величину удельного тепловыделения. Для упрощения расчета предположим, что тепло выделяется только двумя радиоэлементами в точках a блока (см. рис. 2.7). Пусть мощность рассеяния каждого радиоэлемента составляет 1 Вт, т. е. 1 Дж/с и объем каждой детали 1 см³. Тогда удельная плотность тепловыделения в точках a будет равна $q = 1$ МДж/(м³·с), а приведенное тепловыделение

$$Q = q\tau/c = 1\,000\,000 \cdot 0,2 / 24\,000\,000 = 0,08 \text{ К.}$$

Для полной формулировки задачи осталось теперь определить величину коэффициента теплопередачи на границе блока с воздухом. Величина эта может иметь самые различные значения. Для простоты примем ее равной 200 Дж/(м·К·с), т. е. будем вычислять потоки на границе с помощью того же коэффициента $A = 1/6$.

2.5. Включаем питание

Итак, температура во всех точках рассматриваемого блока РЭА равна 293 К (20°C). В начальный момент времени ($t=0$) включают напряжение питания блока и начинают расчет. Для простоты перепишем все числовые значения в соотношении (2.9) и (2.10) и решим уравнение (2.9) относительно температуры в следующем шаге по времени:

$$\theta_{i,j,k}^{s+1} = \frac{1}{6} [\theta_{i+1,j,k}^s + \theta_{i-1,j,k}^s + \theta_{i,j+1,k}^s + \theta_{i,j-1,k}^s + \theta_{i,j,k+1}^s + \theta_{i,j,k-1}^s] + 0,08. \quad (2.12)$$

Расчет можно начинать с любого узла модели и обходить узлы в каждом шаге вычислений в любом порядке. При постановке задачи на ЦВМ узлы обходят последовательно в направлении координатных осей. Но мы считаем медленнее ЦВМ, и нам лучше начинать расчет с узлов, где находятся источники тепла. В этих узлах через 0,2 с температура повысится и станет равной $\theta_a^{s+1} = (20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20) / 6 + 0,08 = 20,08^\circ\text{C}$ (рис. 2.8). В остальных узлах температура не меняется, потому что тепло в них не выделяется.

Запишем новые значения в таблицу (рис. 2.8). Для трехмерной задачи и таблица должна быть «трехмерной». Ее можно составить из нескольких двумерных таблиц. Мы ограничимся двумерной таблицей, считая

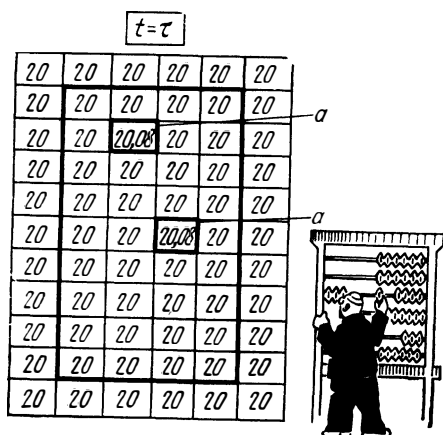


Рис. 2.8.

задачу плоской. Для этого потоки в направлении оси x будем считать равными нулю, а температуру — неизменной. Это равносильно тому, что в уравнении (2.12) принять $\Theta_{i+1,j,k}^s = \Theta_{i-1,j,k}^s = \Theta_{i,j,k}^s$.

Возьмем данные (рис. 2.8) при $t = \tau$ в качестве исходных для вычисления значения температур в момент времени $t = 2\tau$. В узлах a она будет равна $\Theta_a^{s+1} = (20,08 + 20,08 + 20 + 20 + 20 + 20) / 6 + 0,08 = 20,107^\circ\text{C}$. В узлах со-

$t = 2\tau$

20	20	20	20	20	20
20	20	20,013	20	20	20
20	20,013	20,107	20,013	20	20
20	20	20,013	20	20	20
20	20	20	20,013	20	20
20	20	20,013	20,107	20,013	20
20	20	20	20,013	20	20
20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20

$t = 3\tau$

20	20	20	20	20	20
20	20,004	20,022	20,004	20	20
20	20,022	20,124	20,022	20,002	20
20	20,004	20,022	20,006	20	20
20	20	20,006	20,022	20,004	20
20	20,002	20,022	20,124	20,022	20
20	20	20,004	20,022	20,004	20
20	20	20	20,002	20	20
20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20

Рис. 2.9.

Рис. 2.10.

седних с a температура также повысится: $\Theta^{s+1} = (20,8 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20) / 6 = 20,013^\circ\text{C}$. В остальных узлах температура пока остается неизменной.

Занесем новые значения в новую таблицу для момента времени $t = 2\tau$ (рис. 2.9). Возьмем эти значения в качестве исходных и вновь вычислим по формуле (2.12) температуры для момента $t = 3\tau$ (рис. 2.10).

Так можно продолжать расчет на сколько угодно шагов по времени и получить температуру в любой точке блока в любой момент времени. При этом надо помнить, что температура в узлах за пределами блока должна оставаться постоянной.

2.6. Первые выводы

На основании приведенного примера можно сделать следующие выводы:

1. Рассмотренный метод решения задачи теплопроводности является достаточно универсальным. Этим методом можно решать задачи для области любой формы, если взять достаточно мелкую сетку и представить область из маленьких кубиков. Источники тепла могут быть расположены произвольно в любых элементах области. В задаче можно задавать любые начальные и граничные условия. Например, если придется решать задачу, где по границам непосредственно заданы значения удельных потоков тепла, то в уравнении движения (2.9) для граничных элементов нужно просто заменить соответствующие приведенные потоки внешними и преобразовать уравнение к виду (2.12).

2. Вычисление температуры для всех узлов области является однотипным и производится по одной и той же формуле. Это позволяет при постановке задачи на ЦВМ, записав программу для одного узла, затем повторять ее для других, вводя небольшие изменения в узлах с источниками и граничных узлах.

3. В процессе решения получается полная картина распределения температуры внутри области в каждом шаге по времени. Это позволяет производить попутно с основным расчетом различные контрольные операции, например определять допустимую температуру. Задача состоит в определении максимальной температуры в тех точках блока, где находятся детали, недостаточно устойчивые к действию повышенной температуры. Когда

основной расчет сопровождается контрольными операциями, отпадает необходимость в хранении и выдаче на печать всей получаемой в процессе расчета информации, которая, как мы видели, может быть весьма обширной. Достаточно выводить на печать только критические ситуации, когда температура в заданных узлах приближается к предельной.

4. Наконец, достоинство этого метода состоит в том, что он позволяет постоянно совершенствовать и усложнять модель для получения более точной картины тепловых явлений.

2.7. Совершенствование модели

Блоки радиоэлектронной аппаратуры, как правило, не бывают однородными и состоят из различных материалов с различными характеристиками. Некоторые части радиоконструкций представляют собой тонкие пластины. Для пластины строить сетку по принципу, рассмотренному выше, нерационально. Шаги сетки в направлении нормали к поверхности пластины получаются малыми, и из условия устойчивости приходится выбирать малыми и шаги по времени. Число шагов по времени пропорционально возрастает, и увеличивается объем вычислений. Для расчетов тепловых процессов в плоских деталях конструкции можно строить не трехмерные, а двухмерные модели. Сложность решения задач с помощью двухмерных моделей уменьшается, а точность расчета возрастает. По тому же принципу можно строить модели для коробчатых конструкций, таких как кожухи и шасси.

Выше рассмотрена задача теплового расчета блока из однородного материала. Чаще всего залитые блоки даже в первом приближении нельзя считать однородными. Они включают в себя множество деталей из различных материалов. При решении задач для неоднородных областей точными аналитическими методами необходимо для границ раздела между различными материалами записывать дополнительные промежуточные граничные условия. Записать такие условия не сложно. Они состоят в том, что температура и тепловые потоки в различных областях на границе раздела должны быть одинаковыми.

Такой же подход можно использовать и при разностном решении тепловых задач. Однако если областей с разными материалами много и форма этих областей сложна, то использование промежуточных граничных условий в разностном расчете становится затруднительным. Поэтому рассмотрим другой, более простой метод построения разностной схемы при расчетах неоднородных блоков РЭА.

2.8. Неоднородные элементы модели

При построении разностных схем неоднородные блоки РЭА заменяем блоками, состоящими из элементов, обладающих примерно одинаковыми свойствами. Иными словами, осредняем теплоемкости и теплопроводности по объему неоднородного элемента. При этом следует различать элементы массы, по которым осредняется теплоемкость, и элементы связей, по которым осредняется теплопроводность.

Элементы массы введены выше. В центре каждого такого элемента находится узел сетки. Элементы связей составляются из половинок элементов массы (рис. 2.11). Узлы сетки находятся на гранях элементов. Таким образом, элементы связей могут перекрываться между собой и с элементами массы. Значение теплоемкости входит в выражения всех коэффициентов A (2.11). Но эти коэффициенты характеризуют не рассматриваемый элемент модели (элемент массы),

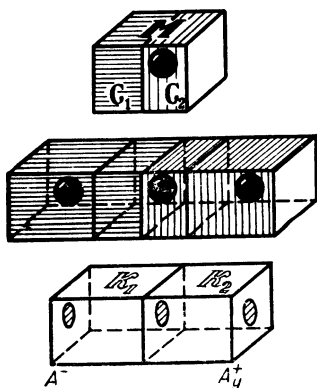


Рис. 2.11.

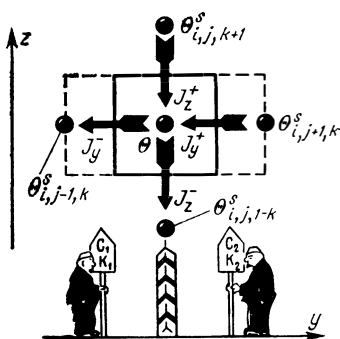


Рис. 2.12.

а расстояния между узлами, т. е. элементы связей около этого узла. Поэтому лучше не вводить осредненное значение теплоемкости в коэффициенты A , а учесть его в виде безразмерного множителя перед левой частью уравнения (2.9):

$$M(I_x^+ - I_x^- + I_y^+ - I_y^- + I_z^+ - I_z^-) + Q = \theta^{s+1} - \theta^s. \quad (2.13)$$

Обычно в неодородных блоках РЭА какой-либо один материал (наполнитель) является основным. Коэффициент M определяется как отношение теплоемкости наполнителя к осредненной теплоемкости элемента массы:

$$M = C / C_{\text{ср}}. \quad (2.14)$$

Вычисление осредненного значения теплоемкости мы покажем ниже на конкретном примере.

Рассмотрим вначале осреднение теплопроводности по элементам связей, когда через элементы проходит граница раздела между различными материалами. Сразу же заметим, что задача несколько облегчается, если узлы сетки располагать на границе раздела, и плоская граница будет разделять элемент на две равные части (рис. 2.12).

Если граница раздела параллельна координатной плоскости xz , то потоки J_y^+ и J_y^- проходят в однородных элементах связей и для них плотности потока выражаются через соответствующие коэффициенты теплопроводности

$$J_y^+ = K_2 \frac{\theta_{i,j+1,k}^s - \theta_{i,j,k}^s}{h_y}; \quad J_y^- = K_1 \frac{\theta_{i,j,k}^s - \theta_{i,j-1,k}^s}{h_y}. \quad (2.15)$$

Четыре остальных потока проходят через неоднородные элементы связей между узлами, причем потоки направлены параллельно границе раздела. В этом случае производится осреднение коэффициента теплопроводности. Для осреднения достаточно сложить потоки, проходящие через обе половинки неоднородного элемента связи, например, поток по z слева

$$K_1 \frac{\theta_{i,j,k+1}^s - \theta_{i,j,k}^s}{h_z} h_x \frac{h_y}{2};$$

поток по z справа

$$K_2 \frac{\theta_{i,j,k+1}^s - \theta_{i,j,k}^s}{h_z} h_x \frac{h_y}{2};$$

суммарный поток

$$\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \frac{\Theta_{i,j,k+1}^s - \Theta_{i,j,k}^s}{h_z} h_x h_y;$$

средняя плотность потока

$$J_z^+ = \left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \frac{\Theta_{i,j,k+1}^s - \Theta_{i,j,k}^s}{h_z} \quad (2.16)$$

Сравнивая полученное выражение с уравнениями (2.5), мы видим, что осредненное значение коэффициента теплопроводности можно считать в данном случае средним арифметическим между коэффициентами теплопроводности соседних областей:

$$K_{cp} = \frac{K_1 + K_2}{2}. \quad (2.17)$$

С помощью полученного осредненного значения коэффициента теплопроводности можно выразить четыре оставшиеся плотности потока:

$$\begin{aligned} J_x^+ &= K_{cp} \frac{\Theta_{i+1,j,k}^s - \Theta_{i,j,k}^s}{h_x}; & J_x^- &= K_{cp} \frac{\Theta_{i,j,k}^s - \Theta_{i-1,j,k}^s}{h_x}; \\ J_z^+ &= K_{cp} \frac{\Theta_{i,j,k+1}^s - \Theta_{i,j,k}^s}{h_z}; & J_z^- &= K_{cp} \frac{\Theta_{i,j,k}^s - \Theta_{i,j,k-1}^s}{h_z}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, если граница проходит параллельно одной из координатных плоскостей и узел находится на границе раздела, то никаких новых уравнений для этого узла записывать не надо. Можно пользоваться уравнениями (2.9) и (2.10), только при вычислении коэффициентов A необходимо в выражения (2.11) вместо общего коэффициента теплопроводности подставить значения осредненных коэффициентов:

$$A_x^+ = A_x^- = \frac{K_{cp}\tau}{h_x^2 C}; \quad A_y^+ = \frac{K_2\tau}{h_y^2 C}; \quad (2.19)$$

$$A_y^- = \frac{K_1\tau}{h_y^2 C}; \quad A_z^+ = A_z^- = \frac{K_{cp}\tau}{h_z^2 C}.$$

Поскольку перед различными потоками J_y^+ и J_y^- коэффициенты теперь будут разными, мы будем помечать их сверху знаками «плюс» или «минус», как и сами потоки.

2.9. Более сложные границы

Не всегда удается расположить узлы сетки точно на границе раздела между двумя теплопроводящими средами. В этом случае также можно пользоваться полученными выше формулами, только вычисление осредненных значений коэффициента теплопроводности несколько усложняется.

Если граница представляет собой плоскость, то встречается два типа элементов связей между узлами. В первом случае потоки тепла распространяются параллельно границе (рис. 2.13). При этом потоки, проходящие по частям элемента, складываются:

$$J_z^+ = \frac{J_1 l_1 + J_2 l_2}{l_1 + l_2}$$

Осредненное значение коэффициента теплопроводности получается сложением коэффициентов теплопроводности частей элемента, пропорциональных ширине этих частей:

$$K_{cp} = K_1 a_1 + K_2 a_2, \quad \text{где } a_1 = l_1/h_y; \quad a_2 = l_2/h_y. \quad (2.20)$$

Формулу (2.20) можно распространить на случай любого числа параллельных границ в одном элементе,

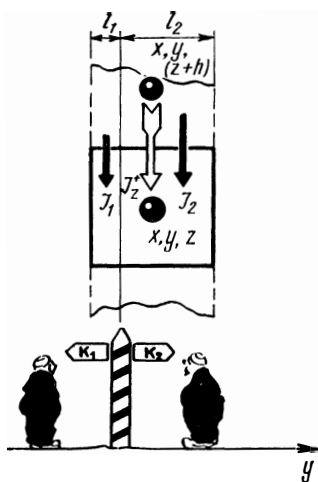


Рис. 2.13.

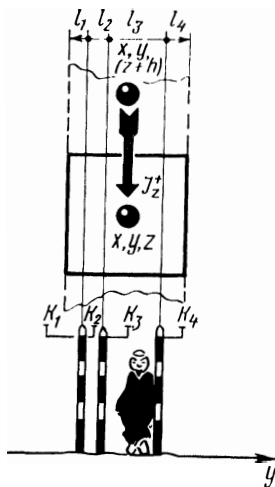


Рис. 2.14.

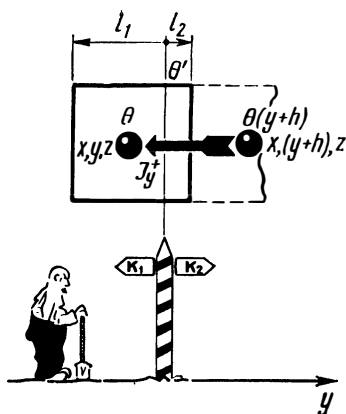


Рис. 2.15.

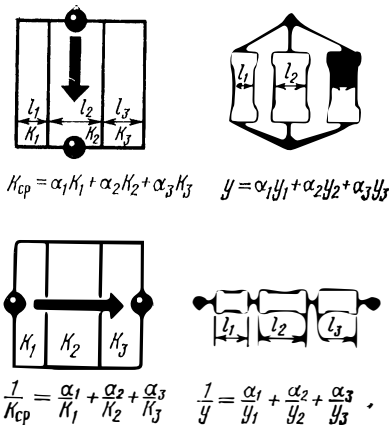


Рис. 2.16.

если потоки тепла проходят параллельно границам (рис. 2.14):

$$K_{cp} = K_1 \alpha_1 + K_2 \alpha_2 + K_3 \alpha_3 + K_4 \alpha_4.$$

Во втором случае потоки тепла распространяются нормально к поверхности раздела (рис. 2.15). При этом величина плотности потока в любом сечении, параллельном границе, будет одинаковой. Ее можно выразить через величины перепада температур, как мы это делали в формулах (2.5). С другой стороны, величину плотности потока можно записать через осредненное значение коэффициента теплопроводности:

$$\frac{1}{K_{cp}} = \frac{\alpha_1}{K_1} + \frac{\alpha_2}{K_2}. \quad (2.21)$$

Формулу (2.21) легко распространить на случай любого количества параллельных границ:

$$\frac{1}{K_{cp}} = \frac{\alpha_1}{K_1} + \frac{\alpha_2}{K_2} + \frac{\alpha_3}{K_3} + \frac{\alpha_4}{K_4}.$$

Радиоинженерам более привычны электрические величины, чем тепловые, поэтому им полезно сравнить формулы (2.20) и (2.21) с формулами для параллельного и последовательного соединения сопротивлений в электрических цепях (рис. 2.16). При сравнении нужно иметь в виду, что коэффициент теплопроводности является аналогом удельной электропроводности.

Используя последовательно формулы (2.20) и (2.21), можно вычислить приближенное значение осредненного

коэффициента теплопроводности для элемента практически любой сложности. Покажем это на примере. Предположим, что после разбивки блока на элементы в каком-то элементе связи оказалось три области, которые мы условно назовем «транзистор», «плата» и «наполнитель» (рис. 2.17). На рисунке показаны значения коэффициентов теплопроводности частей элемента и их размеры. Заменим криволинейную поверхность транзистора плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и разобьем элемент на однородные части (рис. 2.17).

Вначале по формуле (2.21) определяется осредненное значение коэффициента теплопроводности для первой и второй частей элемента. При этом коэффициенты пропорциональности

$$\alpha_1 = 0,021 / (0,021 + 0,012) = 0,64,$$

$$\alpha_2 = 0,012 / (0,021 + 0,012) = 0,36,$$

а значение осредненного коэффициента теплопроводности

$$K_{\text{ср}} = 0,64 \cdot 58 + 0,36 \cdot 0,11 = 37,1.$$

Затем по формуле (2.22) вычисляют коэффициент для всего элемента. При этом коэффициенты пропорциональности

$$\alpha_1 = 0,005 / (0,005 + 0,018 + 0,013) = 0,14,$$

$$\alpha_2 = 0,018 / (0,005 + 0,018 + 0,013) = 0,50,$$

$$\alpha_3 = 0,013 / (0,005 + 0,018 + 0,013) = 0,36.$$

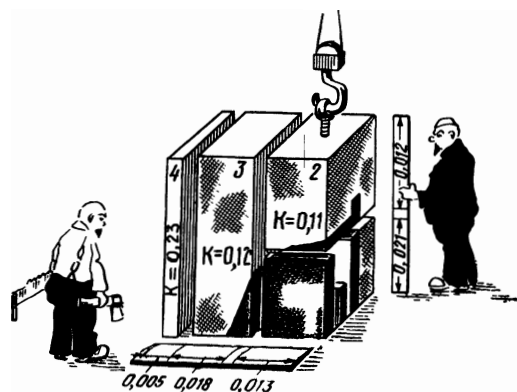


Рис. 2.17.

Значение осредненного коэффициента теплопроводности для всего элемента

$$\frac{1}{K_{cp}} = \frac{0,14}{0,23} + \frac{0,50}{0,12} + \frac{0,36}{37,1} = 0,609 + 4,167 + 0,010 = \\ = \frac{1}{0,21}, \quad K_{cp} = 0,21 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}).$$

При таком способе вычисления коэффициентов теплопроводности может оказаться, что в уравнениях движения (2.10) все шесть коэффициентов окажутся разными и, разумеется, отличными от коэффициентов в уравнениях для других узлов. В этом случае значения коэффициентов нужно хранить в памяти ЦВМ. Требуемый объем памяти резко возрастает. При этом нужно учитывать, что каждый коэффициент является общим для двух соседних узлов. Поэтому всего коэффициентов будет в три, а не в шесть раз больше, чем узлов.

Удельная теплоемкость осредняется по объему элемента массы, в центре которого находится узел сетки. Предположим, что элемент массы состоит из нескольких частей, в которые входят материалы с удельной теплоемкостью C_1, C_2, C_3, \dots . Объем, занимаемый каждым материалом в элементе массы, будет равен соответственно V_1, V_2, V_3, \dots . Тогда количество теплоты, накапливаемой в каждой части элемента, определится произведением $q_1 = C_1 V_1 \Delta\theta$; $q_2 = C_2 V_2 \Delta\theta$; $q_3 = C_3 V_3 \Delta\theta, \dots$. А общее количество теплоты, накапливаемое элементом массы, будет $q = (C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + \dots) \Delta\theta$. При замене неоднородного элемента однородным со средней теплоемкостью C_{cp} количество теплоты должно остаться прежним: $q = C_{cp} h_x h_y h_z \Delta\theta$. Отсюда значение средней теплоемкости можно определить так:

$$C_{cp} = (C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + \dots) / h_x h_y h_z. \quad (2.22)$$

Для каждого элемента массы в неоднородном блоке РЭА может получиться свой коэффициент осредненной теплоемкости. Это потребует дополнительного объема памяти ЦВМ для хранения коэффициентов M (2.13). Таких коэффициентов будет столько же, сколько и узлов сетки.

При выполнении операции осреднения характеристик материалов мы предполагали, что величина теплового потока в каждой части неоднородного элемента связи не

меняется по объему этой части, а приращение температуры $\Delta\theta$ не меняется по объему элемента массы. На самом деле это величины, изменяющиеся от точки к точке. Это приводит к появлению дополнительных погрешностей. Однако эти предположения по сути дела совпадают с предположениями, которые заложены в основе вывода разностных уравнений. Поэтому «погрешности осреднения» будут того же порядка, что и погрешности дискретизации.

2.10. Где тонко...

В радиоконструкциях применяется много деталей из листовых материалов (печатные платы, кожухи, шасси, магнитные и тепловые экраны). Эти детали играют существенную роль в процессах теплопередачи в конструкции, и поэтому расчеты тепловых потоков, проникающих через них и распределяющихся в плоскости деталей, представляют большой практический интерес.

Если для таких деталей при разностных расчетах строить трехмерную модель-сетку по принципу, изложенному выше, то возникают две трудности: во-первых, в модели получается очень много узлов и возрастает объем вычислений, во-вторых, шаги сетки в направлении нормали к поверхности детали получаются очень маленькими. В свою очередь, малые шаги по координате приводят к необходимости уменьшения и шагов по времени, иначе решение с помощью явной схемы будет неустойчивым. Причем между шагом по координате и шагом по времени из условия устойчивости получается квадратическая зависимость. Если шаг по координате уменьшается в 10 раз, то шаг по времени нужно уменьшить в 100 раз. Это, в свою очередь, приводит к увеличению объема вычислений.

В то же время плоские детали (пластины) позволяют строить для них плоские модели-сетки. В такой модели по толщине пластины берется всего один узел и сетка получается двухмерной. Это приводит к уменьшению числа узлов и сокращению объема вычислений и снимает трудности, связанные с малыми шагами по координате, нормальной к поверхности пластины.

Разумеется, для расчетов тепловых потоков с помощью такой двухмерной модели-сетки потребуются другие расчетные формулы, отличные от тех, которые

мы получили выше. Далее мы перейдем к выводу расчетных соотношений для расчетов распределения температуры в плоских деталях типа пластин.

При переходе от трехмерной задачи к двухмерной необходимо из расчетных соотношений исключить одну независимую переменную. Поскольку расчет при этом значительно упрощается, этим приемом постоянно пользуются как при точных, так и при численных методах. Однако исключение одной переменной возможно далеко не всегда. Такая возможность появляется только тогда, когда задача в целом обладает некоторыми свойствами симметрии. Например, если решается осесимметричная задача для тел цилиндрической формы, то, применяя цилиндрическую систему координат, можно исключить одну переменную — угол и останется только две координаты — в направлении оси цилиндра и в направлении радиуса. Решение задач со сферической симметрией можно свести к решению одномерных задач, применяя сферическую систему координат.

В нашем случае детали имеют прямоугольные формы, поэтому система координат должна остаться прямоугольной. В прямоугольной системе исключение одной координаты можно произвести на основании некоторой гипотезы о поведении искомых функций в направлении этой координаты. Выбор той или иной гипотезы определяется в каждом конкретном случае в зависимости от формы области и граничных условий. Если, например, теплопроводящая пластина помещена между двумя теплоизоляционными прокладками, то естественно предположить, что тепловые потоки в направлении нормали к поверхности отсутствуют и температура по толщине пластины постоянна. В этом случае нужно исключить из расчетных соотношений соответствующие тепловые потоки, и уравнение будет двухмерным. Мы уже пользовались этим приемом при рассмотрении потоков воды между двумя параллельными пластинами.

В радиоконструкциях тепловая изоляция на поверхности пластин, как правило, отсутствует, и тепловые потоки в направлении поверхности нельзя считать равными нулю. Нужна иная гипотеза относительно распределения температуры по толщине пластины. Эта гипотеза должна учитывать наличие тепловых потоков на поверхностях и, следовательно, то, что температура и ее производная по нормали к поверхности должны быть

у поверхности отличны от нуля. Нужно учитывать также, что функция температуры непрерывна и имеет непрерывными первую и вторую производные по координате. Производные могут иметь разрыв, если только в какой-то точке тепловой поток или удельное тепловыделение равны бесконечности, а такого случая быть не может. Кроме того, гипотеза должна отражать однородные свойства пластины и отсутствие источников тепла внутри нее.

Всем этим требованиям удовлетворяет целый ряд гипотез. Например, можно предположить, что температура изменяется по толщине пластины по некоторому заданному закону, определяемому суммой заданных аналитических функций координаты. Если в качестве таких составляющих взять степенные функции, то температура представляется в виде разложения в степенной ряд. В этом случае закон изменения температуры в направлении нормали к поверхности можно записать в виде $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 y + \Theta_2 y^2 + \dots$, где Θ_0 , Θ_1 , Θ_2 и т. д. — некоторые функции, не зависящие от координаты y . Эти функции и предстоит определить в процессе расчета.

При разностном расчете функции Θ_0 , Θ_1 , Θ_2 , ... должны быть определены в каждом узле плоской модели-сетки. Таким образом, для каждого узла должно быть записано не одно, как ранее, а несколько уравнений. Эти уравнения нам и необходимо вывести.

Если в процессе расчета определены функции Θ_0 , Θ_1 , Θ_2 , ..., то можно вычислить температуру в любой точке по толщине пластины и на ее поверхностях. И тогда задача теплового расчета будет решена. При расчете платы с радиоэлементами их можно расположить в соответствии с распределением температуры по поверхности платы. В местах, которые нагреваются больше, располагаются детали, не критичные к повышению температуры, а в менее нагретых местах можно — радиоэлементы, для которых повышение температуры опасно.

В практике конструирования радиоаппаратуры чаще всего встречается случай, когда разрабатываемая аппаратура предназначается для длительной работы в условиях стабильных внешних воздействий. Тепловой режим в аппарате можно считать установившимся и решать стационарную задачу. Но встречаются случаи, когда аппаратура рассчитывается на кратковременное вклю-

чение или подвержена непродолжительным тепловым воздействиям. Тогда конструктора могут интересовать переходные тепловые процессы и приходится решать нестационарную задачу.

Решение стационарной задачи всегда проще, чем нестационарной. Стационарная задача расчета теплового режима в пластинах во многом напоминает приведенный в гл. 1 расчет плоского стационарного течения жидкости. Переход от расчетной схемы для нестационарной задачи к расчетной схеме для стационарной задачи не представляет труда, поэтому мы остановимся на решении нестационарной задачи.

Нам предстоит решить, какое количество членов в разложении температуры в степенной ряд следует сохранить. Разумеется, чтобы расчеты были проще, нужно оставлять меньше число членов. С другой стороны, каждый член разложения несет в себе определенную информацию и, сокращая число членов, можно сильно исказить физическую картину явления и получить большие неконтролируемые погрешности расчета. Рассмотрим физический смысл составляющих температуры Θ_0 , Θ_1 , Θ_2 , ... (рис. 2.18). Величина Θ_0 — постоянная по толщине пластины составляющая температуры. Без нее обойтись нельзя, так как не получим изменения средней температуры по поверхности пластины; Θ_1 — изменение температуры по толщине пластины по линейному закону. Эта составляющая нам также необходима, поскольку она определяет величину тепловых потоков в направлении поверхности пластины.

Последующие члены разложения определяют отличие картины распределения температуры от линейного закона. Например, второй член в разложении в степенной ряд является квадратической параболой. Этот член определяет тот случай, когда происходит быстрое нагревание или охлаждение пластины со стороны ее поверхностей. Например, если пла-

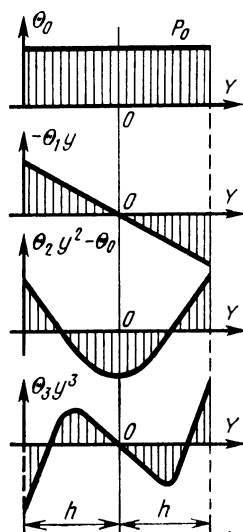


Рис. 2.18.

стина одновременно нагревается или охлаждается с обеих сторон, то температура внутри нее может быть выше или ниже, чем на поверхностях.

Таким образом, второй и последующие члены разложения определяют распределение температуры внутри пластины при быстром ее нагревании или охлаждении ее поверхностей. Эти члены мы учитывать не будем, поскольку распределение температуры внутри пластины при тепловых расчетах радиоконструкций нас, как правило, не интересует. Важно знать распределение температуры по поверхности, где могут быть расположены радиоэлементы, чувствительные к изменению температуры.

Таким образом, мы ограничимся в разложении только двумя членами:

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 y. \quad (2.23)$$

Уравнения для определения функций Θ_0 и Θ_1 нам и предстоит получить.

Функции температуры Θ_0 и Θ_1 имеют различную размерность: К и К/м соответственно. В связи с этим в расчетах они могут принимать сильно отличающиеся друг от друга значения. Чтобы избежать большого разброса величин и тем самым уменьшить погрешности округления можно переписать уравнение (2.23) в виде

$$\Theta = \theta_0 + \theta_1 \frac{y}{h}. \quad (2.24)$$

где h — половина толщины пластины.

Теперь функции Θ имеют смысл составляющих температуры на поверхности пластины. Например, при $y = h$, $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$; при $y = -h$, $\Theta = \Theta_0 - \Theta_1$; Θ_0 и Θ_1 будут иметь размерность температуры.

Разумеется, значения величин Θ_0 и Θ_1 нам неизвестны. В нашу задачу и входит вычисление их для различных точек на поверхности пластины. Зная распределение температуры по поверхности, можно найти приближенные значения температуры и внутри пластины, используя формулу (2.24).

2.11. От трехмерной сетки к двумерной

Используя формулу (2.24), заменяем одну неизвестную величину Θ двумя неизвестными Θ_0 и Θ_1 , исключив тем самым из расчетных соотношений координату y .

Исключить координату можно двумя способами. Первый является традиционным и представляет собой интегральное преобразование. Он состоит в том, что в дифференциальных уравнениях в частных производных для трехмерной нестационарной задачи производится подстановка (2.24). Затем интегрируют полученное уравнение по толщине пластины в пределах от $-h$ до $+h$ и получают первое уравнение для определения нулевой составляющей температуры Θ_0 . Потом умножают каждый член дифференциального уравнения на y и вновь интегрируют по толщине пластины. В результате получается второе уравнение для определения первой составляющей Θ_1 . Полученные таким образом уравнения являются дифференциальными и содержат частные производные по x и z и времени t . Для построения разностной схемы следует перейти к разностным уравнениям, применяя обычную замену частных производных конечными разностями.

Второй способ позволяет произвести это преобразование уравнений непосредственно в разностной форме. Воспользуемся этим вторым способом.

Начнем с того, что построим для пластины трехмерную модель-сетку (рис. 2.19) с одинаковыми шагами

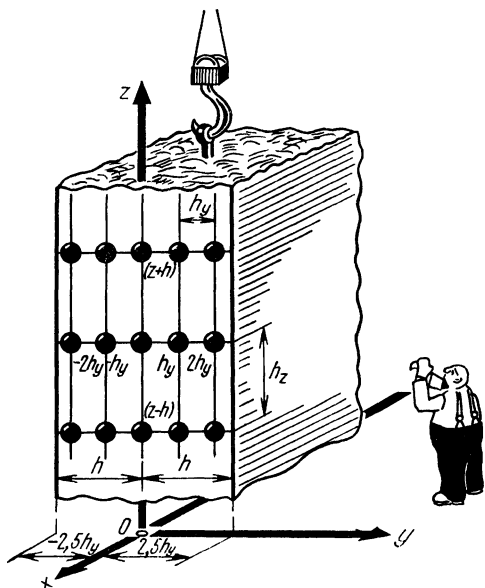


Рис. 2.19.

h_x и h_z . По толщине пластины возьмем всего пять узлов, чтобы математические выкладки не были слишком громоздкими. В дальнейшем распространим вывод на любое число узлов по толщине пластины. Для произвольной цепочки узлов в направлении y запишем разностные уравнения Фурье (2.9), заменив в них потоки в направлении x и z через разности от температуры по координатам в соответствии с формулами (2.10). При записи уравнений учтем, что индекс j теперь принимает вполне определенные значения: $-2, -1, 0, 1, 2$.

Уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 & A(\theta_{i+1, -2, k}^s - 2\theta_{i, -2, k}^s + \theta_{i-1, -2, k}^s) + I_{-2}^+ - I_{-2}^- + \\
 & + A(\theta_{i, -2, k+1}^s - 2\theta_{i, -2, k}^s + \theta_{i, -2, k-1}^s) = \\
 & = \theta_{i, -2, k}^{s+1} - \theta_{i, -2, k}^s, \\
 & A(\theta_{i+1, -1, k}^s - 2\theta_{i, -1, k}^s + \theta_{i-1, -1, k}^s) + I_{-1}^+ - I_{-1}^- + \quad (2.25) \\
 & + A(\theta_{i, -1, k+1}^s - 2\theta_{i, -1, k}^s + \theta_{i, -1, k-1}^s) = \theta_{i, -1, k}^{s+1} - \theta_{i, -1, k}^s, \\
 & A(\theta_{i+1, 0, k}^s - 2\theta_{i, 0, k}^s + \theta_{i-1, 0, k}^s) + I_0^+ - I_0^- + \\
 & + A(\theta_{i, 0, k+1}^s - 2\theta_{i, 0, k}^s + \theta_{i, 0, k-1}^s) = \theta_{i, 0, k}^{s+1} - \theta_{i, 0, k}^s, \\
 & A(\theta_{i+1, 1, k}^s - 2\theta_{i, 1, k}^s + \theta_{i-1, 1, k}^s) + I_1^+ - I_1^- + \\
 & + A(\theta_{i, 1, k+1}^s - 2\theta_{i, 1, k}^s + \theta_{i, 1, k-1}^s) = \theta_{i, 1, k}^{s+1} - \theta_{i, 1, k}^s, \\
 & A(\theta_{i+1, 2, k}^s - 2\theta_{i, 2, k}^s + \theta_{i-1, 2, k}^s) + I_2^+ - I_2^- + \\
 & + A(\theta_{i, 2, k+1}^s - 2\theta_{i, 2, k}^s + \theta_{i, 2, k-1}^s) = \theta_{i, 2, k}^{s+1} - \theta_{i, 2, k}^s.
 \end{aligned}$$

В радиоконструкциях пластины, как правило, выполняются из одного материала, т. е. рассматриваемая область однородна. Шаги сетки в направлении x и z мы взяли одинаковыми, поэтому коэффициенты A_x и A_z также равны; обозначим их буквой A . Источников тепла в пластине нет, поэтому величину удельного тепловыделения Q мы положили равной нулю.

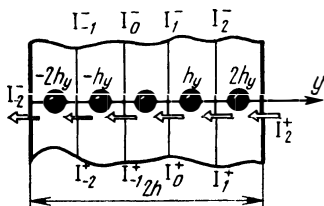


Рис. 2.20.

В уравнениях (2.25) сохранились плотности тепловых потоков в направлении оси y . Для них мы оставили то же обозначение, что и в формулах (2.8), только опустили индекс y и вместо него поставили номер узла в направлении оси y . В дальнейшем нужно будет учесть, что плотности потоков относятся к интервалу между узлами, т. е. к той грани элемента, через которую они проходят.

У элемента с узлом $y = -2h_y$ левая площадь грани выходит на поверхность пластины, поэтому плотность потока I_{-2}^+ определяется внешним тепловым потоком, падающим на левую поверхность пластины (рис. 2.20). С другой стороны, плотность потока I_2^+ проходит через правую грань крайнего правого элемента $y = 2h_y$, поэтому эта плотность также определяется внешним тепловым потоком, падающим на правую поверхность пластины.

В формулах (2.25) получились различные обозначения одних и тех же внутренних тепловых потоков. Например, в первое уравнение (2.25) входит плотность потока I_{-2}^- . Это поток, проходящий через правую грань элемента $-2h_y$. Во второе уравнение (2.25) входит плотность потока I_{-1}^- . Это поток, проходящий через левую грань элемента $-h_y$. Поскольку эта грань является общей для соседних элементов $-2h_y$ и $-h_y$, то I_{-2}^+ и I_{-1}^- являются разными обозначениями одной и той же плотности потока. Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} I_{-2}^+ &= I_{-1}^-; & I_{-1}^+ &= I_0^-; \\ I_0^+ &= I_1^-; & I_1^+ &= I_2^- \end{aligned} \quad (2.26)$$

Теперь все величины температуры, входящие в уравнения (2.25), следует выразить через составляющие температуры на поверхности пластины в соответствии с (2.24) и сложить все уравнения (2.25). Сложить их можно почленно. Например, сумма всех первых членов в первых скобках будет равна

$$\begin{aligned} \theta_{i+1,-2,k}^s + \theta_{i+1,-1,k}^s + \theta_{i+1,0,k}^s + \theta_{i+1,-1,k}^s + \\ + \theta_{i+1,-2,k}^s = \theta_{0,i+1,k}^s - \theta_{1,i+1,k}^s \frac{2h_y}{h} + \theta_{0,i+1,k}^s - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\theta_{1,i+1,k}^s \frac{h_y}{h} + \theta_{0,i+1,k}^s + \theta_{0,i+1,k}^s + \\
& + \theta_{1,i+1,k}^s \frac{h_y}{h} + \theta_{0,i+1,k}^s + \theta_{1,i+1,k}^s \frac{2h_y}{h} = 5\theta_{0,i+1,k}^s.
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

При замене Θ ее составляющими индекс j исключался и вводился индекс (первый), соответствующий номеру составляющей в разложении (2.24).

В полученной таким образом сумме все первые члены разложения температуры в ряд сократились и остались только нулевые члены. Аналогично можно произвести почленное сложение остальных значений температуры, входящих в уравнения (2.25). При этом каждый раз первые члены разложения будут сокращаться и останутся только пять нулевых членов разложения. Множитель 5 можно исключить, разделив все члены в суммарном уравнении на этот множитель.

Теперь посмотрим, как будут складываться плотности потоков:

$$\begin{aligned}
& I_{-2}^+ - I_{-2}^- + I_{-1}^+ - I_{-1}^- + I_0^+ - I_0^- + I_1^+ - I_1^- + I_2^+ - I_2^- = \\
& = I_2^+ - I_{-2}^-.
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

В соответствии с равенствами (2.26) все плотности внутренних потоков сократились и остались только плотности внешних потоков, падающих на поверхности пластины. Обозначим их через I^+ и I^- .

В результате суммирования получается первое уравнение для вычисления нулевой составляющей температуры:

$$\begin{aligned}
& A(\theta_{0,i+1,k}^s - 2\theta_{0,i,k}^s + \theta_{0,i-1,k}^s) - \frac{1}{5}I^- + \frac{1}{5}I^+ + \\
& + A(\theta_{0,i,k+1}^s - 2\theta_{0,i,k}^s + \theta_{0,i,k-1}^s) = \theta_{0,i,k}^s - \theta_{0,i,k}^s.
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

Если бы мы взяли по толщине пластины не пять, а другое число узлов, то коэффициенты перед плотностями потоков были бы другими. Таким образом, полученные уравнения зависят от количества узлов, взятых по толщине пластины. Чтобы исключить эту зависимость, можно перейти от приведенных плотностей пото-

ков Γ к действительной величине плотности J в соответствии с равенствами (2.6), например:

$$\frac{1}{5} I^+ = \frac{1}{5} \frac{\tau}{Ch_y} I^+ = \frac{\tau}{2Ch} J^+.$$

Теперь можно переписать уравнения (2.29) в виде, не зависящем от числа узлов, взятых по толщине пластины:

$$A(\theta_{0,i+1,k}^s - 2\theta_{0,i,k}^s + \theta_{0,i-1,k}^s) - \frac{\tau}{2Ch} J^- + \frac{\tau}{2Ch} J^+ + \\ + A(\theta_{0,i,k+1}^s - 2\theta_{0,i,k}^s + \theta_{0,i,k-1}^s) = \theta_{0,i,k}^{s+1} - \theta_{0,i,k}^s. \quad (2.30)$$

Если бы мы взяли по толщине пластины бесконечное число узлов, то результат получился такой же и уравнение (2.30) осталось бы без изменения.

Для получения второго нужного нам уравнения прежде всего необходимо умножить каждое из уравнений (2.25) на y . Поскольку y теперь принимает вполне определенные значения для каждого уравнения, то первое из них нужно умножить на $y = -2h_y$, второе на $y = -h_y$ и т. д. При этом третье уравнение обращается в тождество ($0 \equiv 0$), так как и левая и правая его части умножаются на $y = 0$.

Далее нужно четыре оставшихся уравнения сложить почленно, предварительно представив значения температуры в виде (2.24). Сумма первых членов в первых скобках будет равна

$$- 2h_y \theta_{0,i+1,k} + 2h_y \theta_{1,i+1,k} \frac{2h_y}{h} - h_y \theta_{0,i+1,k} + \\ + h_y \theta_{1,i+1,k} \frac{h_y}{h} + h_y \theta_{0,i+1,k} + h_y \theta_{1,i+1,k} \frac{h_y}{h} + \\ + 2h_y \theta_{0,i+1,k} + 2h_y \theta_{1,i+1,k} \frac{2h_y}{h} = 10 \frac{h_y^2}{h} \theta_{1,i+1,k}. \quad (2.31)$$

Теперь сокращаются все нулевые члены и остаются только первые составляющие температуры. Таким образом, в первое уравнение не будут входить члены Θ_1 , а во второе — члены Θ_0 , и эти уравнения можно будет решать отдельно, т. е. наша задача распадается на две самостоятельные задачи для определения Θ_0 и Θ_1 .

Аналогично производится суммирование и остальных значений температуры. Каждый раз при сложении будет появляться множитель $10 h_y/k$. В дальнейшем нужно будет разделить на этот множитель все члены полученного суммарного уравнения.

Несколько труднее сложить плотности потоков

$$-2h_y I_{-2}^+ + 2h_y I_{-2}^- - h_y I_{-1}^+ + h_y I_{-1}^- + h_y I_1^+ - h_y I_1^- + 2h_y I_2^+ - 2h_y I_2^- = 2h_y (I_{-2}^- + I_2^+) - h_y (I_{-2}^+ + I_{-1}^- + I_1^+ + I_2^-). \quad (2.32)$$

В первых скобках полученного уравнения (2.32) остались плотности внешних потоков, а во вторых — внутренних. Последние нужно выразить через разности температур в соответствии с равенствами (2.10):

$$-h_y (I_{-2}^+ + I_{-1}^- + I_1^+ + I_2^-) = -A_y h_y (\theta_{i,-1,k}^s - \theta_{i,-2,k}^s + \theta_{i,0,k}^s - \theta_{i,-1,k}^s + \theta_{i,1,k}^s - \theta_{i,0,k}^s + \theta_{i,2,k}^s - \theta_{i,1,k}^s) = -A_y h_y (-\theta_{i,-2,k}^s + \theta_{i,2,k}^s). \quad (2.33)$$

Коэффициент A_y зависит от шага сетки h_y . Этот шаг отличается от шагов в направлении x и z , поэтому и коэффициент A_y будет отличным от коэффициента A .

Таким образом, сумма плотностей внутренних потоков оказалась выраженной через разность температур в крайних узлах цепочки узлов в направлении y . Представив температуры в (2.33) в виде разложения (2.24), получим

$$A_y h_y (\theta_{i,2,k}^s - \theta_{i,-2,k}^s) = A_y h_y \left(\theta_{0,i,k}^s - \theta_{1,i,k}^s \frac{2h_y}{h} - \theta_{0,i,k}^s - \theta_{1,i,k}^s \frac{2h_y}{h} \right) = -A_y \frac{4h^2 y}{h} \theta_{1,i,k}^s, \quad (2.34)$$

и вновь нулевые составляющие температуры сократились и остались только первые составляющие.

Теперь можно записать второе разностное уравнение для определения первой составляющей температуры. После деления на указанный выше коэффициент $10 h^2 y/h$ имеем

$$A (\theta_{1,i+1,k}^s - 2\theta_{1,i,k}^s + \theta_{1,i-1,k}^s) + \frac{2h}{10h_y} (I_{-2}^- + I_2^+) - A_y \frac{4}{10} \theta_{1,i,k}^s + A (\theta_{1,i,k+1}^s - 2\theta_{1,i,k}^s + \theta_{1,i,k-1}^s) = \theta_{1,i,k}^{s+1} - \theta_{1,i,k}^s. \quad (2.35)$$

В полученном уравнении коэффициенты перед приведенными плотностями внешних тепловых потоков I_{-2}^- и I_2^+ и перед составляющей температуры $\theta_{1,i,k}^s$ зависят от числа узлов, взятых нами по толщине пластины. По-

СМОТРИМ, КАКИМ ОБРАЗОМ ИЗМЕНЯЮТСЯ ЭТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ЧИСЛА УЗЛОВ. НАЧНЕМ С ПЕРВОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕД ПРИВЕДЕННЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ ПОТОКОВ. ПЕРЕХОДЯ К ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПЛОТНОСТЯМ НА ОСНОВАНИИ (2.8) ПОЛУЧИМ

$$\frac{2h}{10h_y} I_{-2} = \frac{2h\tau}{10h_y^2 C} J_{-2}.$$

ЦИФРА 2 В ЧИСЛИТЕЛЕ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ НОМЕРОМ КРАЙНЕГО УЗЛА В ЦЕПОЧКЕ УЗЛОВ. ЦИФРА 10 ПОЛУЧАЕТСЯ ПРИ СУММИРОВАНИИ В ФОРМУЛЕ (2.31) : $10 = 2(2^2 + 1)$. ШАГ В НАПРАВЛЕНИИ y В ЭТОМ СЛУЧАЕ В ДВА С ПОЛОВИНОЙ РАЗА МЕНЬШЕ ВЕЛИЧИНЫ h . ТАКИМ ОБРАЗОМ,

$$\frac{2h \cdot \tau}{10h_y^2 C} J_{-2} = \frac{2\tau}{10h \cdot 0,4^2 C} J_{-2} = \frac{2}{1,6} \frac{\tau}{hC} J_{-2} = 1,25 \frac{\tau}{hC} J_{-2}.$$

ЕСЛИ БЫ МЫ ВЗЯЛИ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ НЕ ПЯТЬ УЗЛОВ, А, СКАЖЕМ, СЕМЬ, ТО СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ИМЕЛО БЫ ВИД

$$\frac{3h\tau}{2(3^2 + 2^2 + 1)Ch_y^2} J_{-3} = \frac{2\tau}{28C \cdot 0,286^2 h} J_{-3} = 1,31 \frac{\tau}{hC} J_{-3}.$$

ПРИ ДАЛЬНЕЙШЕМ УВЕЛИЧЕНИИ НА ДВА ЧИСЛА УЗЛОВ, ВЗЯТЫХ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ, ЧИСЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ПРИНИМАЕТ ЗНАЧЕНИЯ 1,35; 1,37; 1,39; 1,40 И Т. Д. В ПРЕДЕЛЕ ПРИ ЧИСЛЕ УЗЛОВ, РАВНОМ БЕСКОНЕЧНОСТИ, ЭТОТ КОЭФФИЦИЕНТ БУДЕТ РАВЕН $3/2$.

ВТОРОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕД СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ $\theta_{1,i,k}^s$ НА ОСНОВАНИИ ФОРМУЛЫ (2.11) МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ

$$A_y \frac{4}{10} = \frac{K\tau}{h^2 y C} \cdot \frac{4}{10} = \frac{K\tau}{h^2 C} \cdot \frac{4}{0,4^2 \cdot 10} = 2,5 \frac{K\tau}{h^2 C}.$$

ЧИСЛОВОЙ МНОЖИТЕЛЬ ПОЛУЧАЕТСЯ В ДВА РАЗА БОЛЬШИМ, ЧЕМ ДЛЯ ПРЕДЫДУЩЕГО КОЭФФИЦИЕНТА.

ТЕПЕРЬ МОЖНО ЗАПИСАТЬ УРАВНЕНИЕ (2.35) ДЛЯ СЛУЧАЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА УЗЛОВ, ВЗЯТЫХ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ, Т. Е. ПРИ $h_y \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} A(\theta_{1,i+1,k}^s - 2\theta_{1,i,k}^s + \theta_{1,i-1,k}^s) + \frac{3}{2} \frac{\tau}{hC} (J^- + J^+) - \\ - 3 \frac{\tau K}{h^2 C} \theta_{1,i,k}^s + A(\theta_{1,i,k+1}^s - 2\theta_{1,i,k}^s + \theta_{1,i,k-1}^s) = \\ = \theta_{1,i,k}^{s+1} - \theta_{1,i,k}^s \end{aligned} \quad (2.36)$$

Мы получили два разностных уравнения (2.30) и (2.36) для вычисления составляющих температуры Θ_0 и Θ_1 на поверхности пластины. Эти уравнения позволяют рассчитать нестационарный процесс распределения температуры по поверхности, если заданы плотности тепловых потоков J^+ и J^- , проходящих через обе поверхности.

2.12. Расчет теплового экрана

Чтобы познакомиться с порядком вычислений, решим задачу о распределении температуры в тепловом экране, который защищает блок *a* (рис. 2.21) от тепловых потоков, распространяющихся от блока *b*. Поскольку решать мы будем не на ЦВМ, а «на руках», то по возможности упростим нашу задачу.

Во-первых, предположим, что температура по всей правой и левой поверхности пластины одинакова. При этом в уравнениях (2.35) и (2.36) выпадают все члены в круглых скобках, перед которыми стоит коэффициент A . Сама сетка также исчезает, остается только один узел. Температура Θ_b блока *b* пусть изменяется во времени по линейному закону.

Материал экрана алюминий: $C=2,4$ МДж/(м³·К), $K=200$ Дж/(м·К·с). Толщина экрана 3 мм.

Таким образом, шаг по времени получился достаточно малым. В результате расчета нам нужно в конечном итоге получить повышение температуры защищаемого блока *a*. Для этого недостаточно только тех

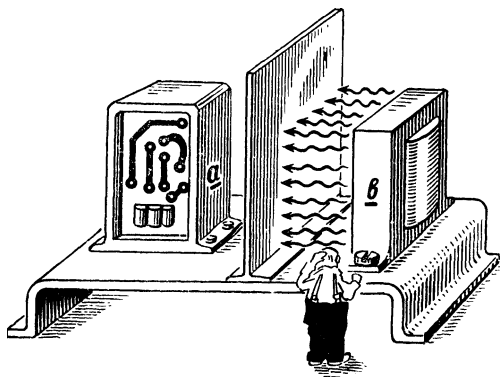


Рис. 2.21.

уравнений, которые мы получили. Нужно еще сформулировать и описать математически задачу теплообмена в самом блоке a и окружающем его пространстве.

Задачу распространения теплоты в твердом теле мы рассмотрели, а относительно задачи конвекционного теплообмена мы указали, что ее следует решать на основе эмпирических коэффициентов, для получения которых необходимо произвести соответствующие эксперименты. В нашем распоряжении таких экспериментальных данных нет, поэтому задачу нагрева блока a и окружающего его пространства сформулируем условно. Будем считать, что блок a и некоторый объем воздуха вокруг него окружены теплоизоляцией и теплота может поступать в этот объем только со стороны экрана. Теплоемкость этого объема C_a возьмем равной 50 Дж/К, а площадь экрана S , относящуюся к этому объему, равной 0,005 м². Теперь можно написать уравнение теплового баланса объема с блоком a . Считая температуру по всему этому объему постоянной и равной Θ_a , получаем

$$J_a S \tau = C_a (\Theta_a^{s+1} - \Theta_a^s), \quad (2.37)$$

где J_a — плотность теплового потока через левую поверхность экрана.

Теперь мы располагаем тремя уравнениями [(2.30), (2.36) и (2.37)] для определения пяти неизвестных Θ_a , Θ_0 , Θ_1 , J_a и J_b . Нам необходимы еще два уравнения, чтобы система получилась замкнутой. В качестве таких уравнений возьмем выражения плотности тепловых потоков через разности температур на поверхности пластины и в прилегающем объеме a или b : $J_a = \alpha(\Theta_0 - \Theta_1 - \Theta_a)$, $J_b = \alpha(\Theta_b - \Theta_0 - \Theta_1)$, где α — коэффициент теплоотдачи поверхности экрана. Предполагается, что температура на правой поверхности ($\Theta_0 + \Theta_1$) ниже температуры блока b , а температура на левой поверхности ($\Theta_0 - \Theta_1$) выше, чем Θ_a .

Подставив значения потоков J_a и J_b в уравнения (2.39), (2.36) и (2.37), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \tau S}{C_a} (\Theta_0^s - \Theta_1^s - \Theta_a^s) &= \Theta_a^{s+1} - \Theta_a^s; \\ \frac{\alpha \tau}{2hC} (\Theta_b^s - 2\Theta_0^s + \Theta_a^s) &= \Theta_0^{s+1} - \Theta_0^s, \\ \frac{3\alpha \tau}{2hC} (\Theta_b^s - 2\Theta_1^s - \Theta_a^s) - 3 \frac{K\tau}{h^2 C} \Theta_1^s &= \Theta_1^{s+1} - \Theta_1^s. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Положим $\alpha = K/h$. Шаг по времени τ выберем из условия устойчивости. В нашем случае решение будет устойчивым, если $3 \frac{K\tau}{h^2C} \leq 1$. В случае равенства коэффициента единице шаг $\tau = 0,009$ с, а остальные коэффициенты в уравнениях (2.38) примут значения

$$\frac{\alpha\tau S}{C_a} = 0,12, \quad \frac{\alpha\tau}{2hC} = 0,17; \quad \frac{3\alpha\tau}{2hC} = 0,5.$$

Решив уравнения (2.42) относительно температуры в момент времени $s+1$, получим

$$0,12(\theta_0^s - \theta_1^s) + 0,88\theta_a^s = \theta_a^{s+1},$$

$$0,17(\theta_b^s + \theta_a^s) + 0,66\theta_0^s = \theta_0^{s+1},$$

$$0,5(\theta_b^s - \theta_a^s) - \theta_1^s = \theta_1^{s+1}.$$

Полученные уравнения можно решать последовательно по временным слоям. Результаты расчета представим в виде таблицы (табл. 2.1).

Т а б л и ц а 2.1

Номер шага по времени	θ_a	θ_0	θ_1	θ_b
0	20	20	0	20
1	20	20	0	21
2	20	20,17	0,5	22
3	19,96	20,79	0,5	23
4	20	21,02	1,02	24
5	20	21,35	0,98	25
6	20,04	21,74	1,52	26

В нулевой строке таблицы записаны начальные условия задачи при нулевом шаге по времени. Температура везде равна 20°C (293 К), поэтому величина θ_1 равна нулю. В правом столбце записана температура блока a , изменяющаяся по линейному закону. Этот столбец можно заполнить заранее.

Далее расчет выполняется последовательно по шагам, начиная с первого шага:

$$\theta_a = 0,12 \cdot 20 + 0,88 \cdot 20 = 20; \quad \theta_0 = 0,17 \cdot 40 + 0,66 \cdot 20 = 20; \\ \theta_1 = 0,5 \cdot 0 - 0 = 0.$$

Таким образом, в первом шаге по времени внутри пластины и в блоке a ничего не изменилось. Они еще

не начали прогреваться. Во втором шаге $\Theta_a = 0,12 \cdot 20 + 0,88 \cdot 20 = 20$; $\Theta_0 = 0,17 \cdot 41 + 0,66 \cdot 20 = 20,17$; $\Theta_1 = 0,5 \times 1 - 0 = 0,5$. Начал нагреваться экран. В дальнейшем начнет нагреваться и блок a . Правда, в третьем по времени шаге температура его даже несколько понизилась. В действительности этого в данной задаче **быть** не может. Сказываются погрешности от представления температуры по толщине пластины в виде двучлена $\Theta_0 + \Theta_1 y/h$. Если бы мы учли еще третий член, например, в виде $\Theta_2 (1,5 y^2/h^2 - 0,5)$, то погрешность была бы меньше и температура блока a не понижалась бы.

Далее процесс вычислений строится по тому же самому алгоритму.

2.13. Узел за углом

Температура является величиной скалярной, т. е. не имеющей направления. Это облегчает построение моделей-сеток конструкций радиоэлектронной аппаратуры. Дело в том, что экраны наподобие рассмотренного выше встречаются в радиоаппаратуре не часто. Гораздо **чаще** роль экранов выполняют различные кожуха, шасси и подобные им детали. При расчетах тепловых процессов в таких деталях-коробках нет необходимости в выводе новых расчетных соотношений. Можно воспользоваться уже полученными для отдельной пластины.

Рассмотрим такой пример. Предположим, что производится расчет температуры в конструкции, в которой имеется кожух (рис. 2.22).

Постарается разместить узлы сетки по поверхности кожуха так, чтобы шаги во всех направлениях были одинаковыми. Граничные узлы лучше располагать на

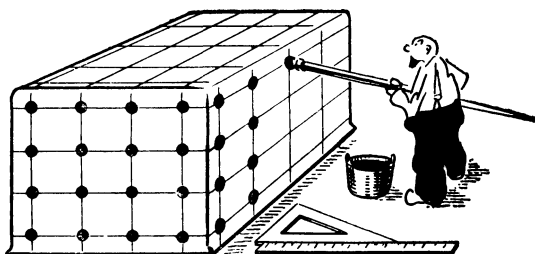


Рис. 2.22.

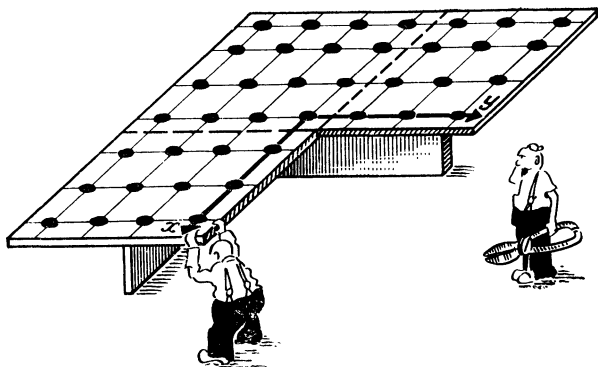


Рис. 2.23.

расстоянии в половину шага от линии сгибов. Разумеется, это удастся только в том случае, если все наружные размеры кожуха имеют подходящий общий множитель. Иначе придется несколько изменить размеры кожуха в модели по сравнению с действительными.

После этого можно сделать развертку модели кожуха (рис. 2.23) и работать с этой разверткой, как с пластиной с вырезанными краями. Если при расчете температуры на месте очередного узла окажется пустота, значит, узел находится «за углом».

Мы на простых примерах познакомились с расчетами тепловых процессов в различных блоках, кожухах, шасси и платах; рассмотрели нестационарные переходные процессы нагревания и охлаждения этих деталей.

Расчитать всю конструкцию значительно сложнее, чем деталь, поэтому при постановке подобных задач на ЦВМ нужно использовать все возможности, предоставляемые реальной конструкцией для упрощения общей картины теплообмена.

Часто конструктора интересует температура в отдельных местах конструкции в стационарном, установившемся режиме. Для такого расчета можно использовать полученные выше разностные уравнения. Только в правой части уравнений первая разность от температуры по времени будет равна нулю. В этом случае вычислительный процесс уже не удастся построить в виде рекуррентного по времени процесса. Приходится решать систему из стольких алгебраических уравнений, сколько узлов будет иметь модель-сетка. Такую систему можно решить одним из итерационных методов.



МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИОКОНСТРУКЦИИ

Прошли те времена, когда радиоприемник относился к предметам роскоши и обращались с ним с великой осторожностью. Сейчас радиоприемники (и передатчики) устанавливаются на самолетах, автомобилях, кораблях и ракетах, где им приходится испытывать значительные механические ускорения и вибрации. Конечно, и приемники стали прочнее, чем двадцать лет тому назад, когда основными радиоэлементами были хрупкие радиолампы и конструкторы стараются защитить их от механических воздействий с помощью амортизаторов, но тем не менее остается опасность возникновения различных неполадок в работе радиоустройства под влиянием вибраций и ударов (поломка деталей, отслаивание печатных проводников, появление микротрещин, нарушающих циркуляцию электрических токов, и т. п.).

Бывают и более сложные случаи отказов радиоаппаратуры, причиной которых являются механические перегрузки. Сильные вибрационные нагрузки могут вызвать упругие деформации в элементах конструкции конденсаторов и катушек, определяющих, например, частоту настройки приемника. Емкость и индуктивность колебательных контуров будут меняться с частотой вибрации, искажая сигнал. Изменения параметров элементов могут быть настолько большими, что приемник прекратит работу. Напряжения помех возникает в проводах и катушках, совершающих колебательные движения в магнитных полях, которые создаются внутри аппарата или проникают в него извне.

Полностью защитить аппаратуру от внешних механических воздействий нельзя. Например, никакие амортизаторы и демпферы не могут уберечь радиоприемник от длительных линейных ускорений, скажем, при запуске и торможении летательных аппаратов, когда перемещения получаются значительно большими, чем ход амортизатора.

Конструкция, подвешенная на амортизаторах, представляет собой резонансную систему. Резонансные частоты ее зависят от массы конструкции и жесткости амортизаторов. Если сама конструкция считается недеформируемой, то рассчитать резонансные частоты системы не представляет труда [6]. На таких резонансных частотах амплитуды колебаний будут большими, чем в конструкции без амортизаторов. Задача состоит в том, чтобы «вывести» конструкцию с помощью амортизаторов из спектра частот вибраций. Когда этого сделать не удастся, применяют нелинейные амортизаторы, у которых жесткость зависит от перемещений. Но и такие амортизаторы далеко не всегда помогают уменьшить вибрации.

Поскольку нет универсальных способов защиты от вибраций, конструктору приходится учитывать опасность того, что резонансная частота совпадает с частотой вибрации, действующей при эксплуатации. Чтобы избежать этого, прежде всего нужно уметь рассчитывать механические процессы в конструкциях и в основном процесс упругих деформаций.

3.1. Задача расчета вибрации

Механические воздействия передаются радиоаппаратуре от корпуса носителя через точки крепления. При расчетах механических процессов в конструкции движение этих точек должно быть задано. Обычно движение задается в виде величины линейных ускорений и величины амплитудных значений ускорений в заданном диапазоне частот. Эти данные являются граничными условиями задачи.

Если бы конструкция аппаратуры представляла собой абсолютно жесткое тело, то все точки его совершали бы такое же движение, как и точки крепления и ничего не нужно было бы рассчитывать. Но все материалы являются упругими, и это приводит к тому, что различные точки конструкции совершают различное движение, подчас совершенно не похожее на движение точек крепления. Например, ускорения некоторых точек конструкции могут в десятки раз превышать ускорения в точках закрепления. В этом случае говорят об усилении вибраций в конструкции и оценивают его с помощью соответствующего коэффициента. Если конструк-

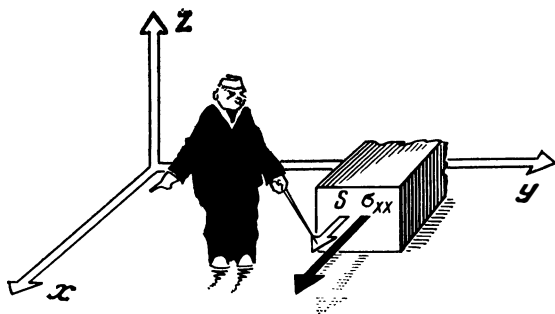


Рис. 3.1.

тору известны коэффициенты усиления вибрации в различных частях конструкции, то он может разместить менее виброустойчивые элементы в точках, где коэффициенты усиления незначительные. При расчетах коэффициентов усиления вырисовывается вся картина деформирования конструкции, и конструктор может целенаправленно ее изменять, чтобы уменьшить вибрации в некоторых частях. Попутно решается вопрос и о возникающих напряжениях. Это позволяет проверить прочность конструкции, сравнивая полученные значения с допустимыми. Зная одну категорию величин — перемещения, деформации, напряжения или ускорения, легко определить все остальные, поскольку они связаны простыми математическими зависимостями.

Большинство марок конструкционных материалов при определенных условиях представляют собой идеально упругие тела (тела Гука). Основным их свойством является способность восстанавливать свою форму после снятия внешних сил. У идеальных упругих тел между напряжением и деформацией существует линейная связь $\sigma = E\varepsilon$ (см. рис. 1.4).

Известно, что если резину растягивать, толщина ее уменьшается. То же происходит со всеми упругими телами.

Простым опытом можно установить, что уменьшение толщины почти прямо пропорционально увеличению длины. Другими словами, отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации есть примерно постоянная величина, она называется коэффициентом Пуассона ν .

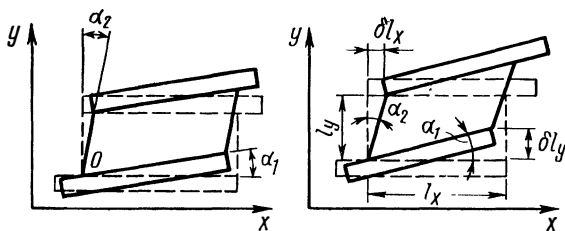


Рис. 3.2.

Чтобы различать направления действия сил («вдоль» или «поперек» тела), в буквенных обозначениях напряжений σ и относительных деформаций ϵ применим двойные индексы. Первым будем указывать направление действия внешней силы F . Силу всегда будем прикладывать так, чтобы она совпала с направлением одной из координатных осей (x , y , z). Вторым индексом обозначим направление нормали к площадке S , к которой приложено напряжение. Это направление также будем выбирать совпадающим с одной из координатных осей. Так, напряжение, действующее вдоль оси x на площадке с нормалью в направлении x , обозначаем как σ_{xx} (рис. 3.1). Теперь напишем формулу для определения коэффициента Пуассона ν , если растягивающие напряжения действуют в направлении оси x :

$$\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}} = -\nu. \quad (3.1)$$

Относительное сжатие в направлении осей y и z одинаково. Поэтому одинаковы будут и коэффициенты Пуассона для обоих направлений. Он будет иметь знак «минус», поскольку деформации сжатия, стоящие в числителе формулы (3.1), принято считать отрицательными. Если модуль Юнга у различных материалов может изменяться в очень широких пределах, то коэффициент Пуассона меняется мало.

Теоретически он может изменяться у разных материалов в пределах $0 \dots 0,5$. У большинства материалов он равен $0,3 \dots 0,4$. И только резина имеет коэффициент Пуассона, близкий к $0,5$, а это значит, что ее объем при деформациях почти не меняется.

Мы рассмотрели деформации растяжения и сжатия, при которых форма бруска остается прямоугольной. Если внешние силы действуют не по одной линии и

образуют момент сил, то углы бруска не остаются прямыми. Такие деформации называют сдвигом, а вызывающие их напряжения — касательными напряжениями. Чем больше касательные напряжения, тем больше углы деформированного бруска будут отличаться от прямых углов и тем больше будут деформации сдвига. Поэтому величину деформации сдвига определяют суммой тангенсов углов α_1 и α_2 , показывающих, на сколько угол при вершине бруска отклонился от прямого угла (рис. 3.2).

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (3.2)$$

Заменяв тангенсы углов отношением сторон треугольников, можно определить величину деформаций сдвига через отношения перемещений к соответствующим размерам (рис. 3.2).

Касательные напряжения направлены вдоль плоскости, для которой они вычисляются. Они, например, являются причиной среза заклепок, соединяющих металлические конструкции. Между касательными напряжениями и деформациями сдвига существует прямая пропорциональная зависимость: $\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy}$, где коэффициент пропорциональности G называют модулем сдвига.

3.2. Закон парности и сложное напряженное состояние

Для упрощения задачи предположим, что касательные напряжения приложены только к двум граням резинового куба. В результате создается крутящий момент, поворачивающий куб, а также нормальные напряжения, не одинаковые в различных точках грани (рис. 3.3). Такое состояние называют сложным напряженным состоянием; нам нужно простое напряженное

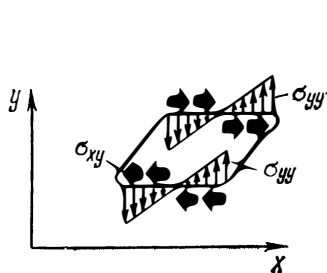


Рис. 3.3.

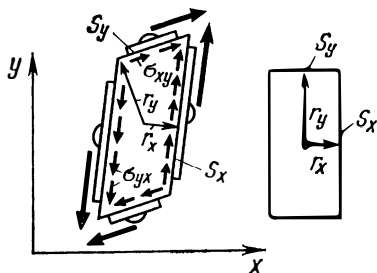


Рис. 3.4.

состояние, когда существуют только касательные напряжения. Для этого нужно приложить касательные напряжения еще к двум граням бруса. Крутящие моменты пар уравниваются и брус разворачиваться не будет, так как действуют только касательные напряжения.

В случае бруска кубической формы касательные напряжения, действующие в направлении x и y , должны быть равны, потому что только в этом случае создаваемые ими моменты будут уравниваться. Такое же положение будет, если брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.4).

Чтобы моменты, создаваемые напряжениями σ_{xy} и σ_{yx} , уравнивали друг друга, необходимо выполнение равенства

$$\sigma_{xy}S_yr_y = \sigma_{yx}S_xr_x,$$

где S_x и S_y — площади граней, а r_x и r_y — расстояния от центра до соответствующих граней. Но в недеформированном состоянии бруса $r_y = S_x/2h$ и $r_x = S_y/2h$, где h — высота бруса, поэтому $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Такое же соотношение будет и в деформированном состоянии. Равенство касательных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным граням, называют *законом парности касательных напряжений*.

Распространим наши выводы на общий случай сложного напряженного состояния, когда действуют все возможные напряжения. К каждой из шести граней бруса приложены три напряжения: одно нормальное и два касательных (рис. 3.5).

Напряжения, действующие по передним граням бруса, будем считать положительными, если их направления совпадают с направлением координатных осей. На-

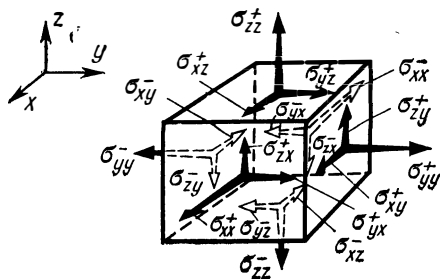


Рис. 3.5.

пряжения, действующие по задним граням, условимся считать положительными, если они направлены в сторону, обратную положительному направлению координатных осей.

Напряжения, действующие по противоположным граням, но имеющие одинаковые индексы, дополнительно будем отмечать знаками «плюс» или «минус».

Приняв, что процессы деформирования линейны, найдем общую деформацию, сложив отдельные деформации (принцип суперпозиций). Деформация растяжения в направлении каждой координатной оси определяется прежде всего нормальными напряжениями в направлении этой оси σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} . Кроме того, каждое нормальное напряжение вызывает деформацию сжатия в двух других направлениях, поэтому полная деформация растяжения в каждом направлении будет зависеть от трех напряжений:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz}, \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}, \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Деформации сдвигов, происходящих в различных плоскостях, не влияют друг на друга и не зависят от деформаций растяжения или сжатия:

$$\epsilon_{xy} = \sigma_{xy}/G; \quad \epsilon_{yz} = \sigma_{yz}/G, \quad \epsilon_{zx} = \sigma_{zx}/G.\tag{3.4}$$

Для расчетов процессов деформирования конструкций нам потребуется обратная зависимость напряжений от деформаций. Для деформаций сдвига и касательных напряжений она получается из уравнений (3.4): $\sigma_{xy} = G\epsilon_{xy}$, $\sigma_{yz} = G\epsilon_{yz}$, $\sigma_{zx} = G\epsilon_{zx}$.

Для получения аналогичной зависимости для нормальных напряжений нужно решить систему (3.3) относительно напряжений. После решения системы и выполнения алгебраических преобразований

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{E^3} (1 - \nu^3 - \nu^3 - \nu^2 - \\ &- \nu^2 - \nu^2) = \frac{1}{E^3} (1 - 3\nu^2 - \\ &- 2\nu^3) = \frac{1}{E^3} (1 + \nu)^2 \times \\ &\times (1 - 2\nu); \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ \epsilon_{yy} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ \epsilon_{zz} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \epsilon_{xx} \frac{1}{E^2} + \epsilon_{zz} \frac{\nu^2}{E^2} + \epsilon_{yy} \frac{\nu^2}{E^2} + \epsilon_{zz} \frac{\nu}{E^2} - \\ - \epsilon_{xx} \frac{\nu^2}{E^2} + \epsilon_{yy} \frac{\nu}{E^2} = [\epsilon_{xx} (1 - \nu^2) + \\ + \epsilon_{zz} (\nu^2 + \nu) + \epsilon_{yy} (\nu^2 + \nu)] \frac{1}{E^2}.$$

получим зависимость напряжений от деформаций в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{(1 - \nu^2) E}{(1 + \nu)^2 (1 - 2\nu)} \epsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1 + \nu) (1 - 2\nu)} \epsilon_{yy} + \\ + \frac{E\nu}{(1 + \nu) (1 - 2\nu)} \epsilon_{zz} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz}; \\ \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz} + \lambda \epsilon_{xx}; \\ \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{zz} + \lambda \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} \quad (3.5)$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе.

Коэффициенты Ламе выражают через модуль упругости (модуль Юнга) и коэффициент Пуассона

$$\lambda = E\nu / (1 + \nu) (1 - 2\nu), \quad \mu = E / 2(1 + \nu).$$

Коэффициент μ оказывается равным модулю сдвига G , и для определения упругих свойств материала нам в любом случае нужно знать две характеристики: E и ν или λ и μ .

3.3. Трудности при построении модели

Теперь мы можем приступить к построению расчетной модели конструкции. Для этого прежде всего разделяют конструкцию на элементы прямоугольной формы. Для каждого элемента записывают уравнения динамического равновесия и решают эти уравнения на ЦВМ. План простой, но реализовать его трудно. Дело в том, что для получения необходимой точности расчета необходимо разбить конструкцию на большое число элементов. Если, допустим, предстоит рассчитать вибрации блока прямоугольной формы и нас удовлетворяет точность в несколько процентов, то в каждом из трех на-

правлений нужно разделить блок примерно на 10 частей. Таким образом, получится 1000 элементов. Для каждого элемента надо записать три уравнения движения, т. е. решить систему из 3000 уравнений. Наиболее просто решить такую систему можно рассмотренным выше методом последовательных приближений или методом итерации. Каждое уравнение решают относительно одной неизвестной, при этом необходимо выполнить около 100 элементарных операций. Следовательно, чтобы прорешать один раз все уравнения, необходимо выполнить 300 000 операций.

При методе последовательных приближений для получения трех верных знаков результата нужно выполнить около тысячи операций. Чтобы получить результаты для всех элементов для одного шага по времени потребуется 300 000 000 ($3 \cdot 10^8$) операций. И такая процедура должна производиться в каждом шаге по времени. Если процесс занимает 1000 шагов, то число элементарных операций на ЦВМ достигнет $3 \cdot 10^{11}$.

Как легко заметить, расчет механических процессов в упругих телах требует огромного объема вычислений. Современные ЦВМ среднего класса выполняют в секунду $3 \cdot 10^4$ операций, следовательно, для нашего расчета потребуется 10^7 с или 116 сут. Решение такой задачи обойдется в 140 тыс. руб., если только машина не ошибется за это время и не придется решать задачу снова.

Совершенно очевидно, что обычный путь в данном случае не пригоден. Нужно искать более экономичные пути построения расчетных соотношений и прежде всего избавиться от решения систем алгебраических уравнений. Избежать решения систем можно, если расчетные соотношения построить в виде явных схем, как при расчетах тепловых процессов.

3.4. Равновесие сил

Любой элемент в упругом теле должен находиться в состоянии равновесия, т. е. алгебраическая сумма всех действующих на него сил должна быть равна нулю. Для тел, движущихся с ускорением, в соответствии с принципом Даламбера к внешним силам нужно добавлять еще силы инерции.

Внешними по отношению к каждому элементу являются силы упругости, действующие со стороны сосед-

них элементов (рис. 3.5), поэтому нужно записать сумму внешних сил и приравнять ее силам инерции. Каждая внешняя сила равна произведению соответствующего напряжения на площадку, по которой напряжение действует. Если элемент имеет размеры h_x , h_y и h_z , то сумма проекций всех сил на ось x запишется в виде

$$h_y h_z (\sigma_{xx}^+ - \sigma_{xx}^-) + h_x h_z (\sigma_{xy}^+ - \sigma_{xy}^-) + h_x h_y (\sigma_{xz}^+ - \sigma_{xz}^-) = m a_x,$$

где a_x — ускорение элемента в направлении оси x ; m — масса элемента.

Аналогично можно записать проекции сил на две другие оси, но прежде каждое из полученных таким образом уравнений разделим на объем элемента ($h_x h_y h_z$):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^+ - \sigma_{xx}^-}{h_x} + \frac{\sigma_{xy}^+ - \sigma_{xy}^-}{h_y} + \frac{\sigma_{xz}^+ - \sigma_{xz}^-}{h_z} &= \rho a_x, \\ \frac{\sigma_{yy}^+ - \sigma_{yy}^-}{h_y} + \frac{\sigma_{yz}^+ - \sigma_{yz}^-}{h_z} + \frac{\sigma_{yx}^+ - \sigma_{yx}^-}{h_x} &= \rho a_y, \\ \frac{\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-}{h_z} + \frac{\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-}{h_x} + \frac{\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-}{h_y} &= \rho a_z, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\rho = m / (h_x h_y h_z)$ — плотность материала, из которого сделана конструкция.

Нетрудно заметить, что все три уравнения (3.6) очень похожи. Каждое следующее уравнение можно получить из предыдущего простой заменой индексов: x на y , y на z , z на x . Такая аналогия говорит о том, что упругие свойства материала во всех направлениях одинаковы или, короче, что среда является изотропной. Мы воспользуемся свойством изотропности, чтобы вместо трех уравнений записать одно. Если в дальнейшем после приведенного уравнения будет напечатано «и т. д.», значит, два других уравнения не приведены, но их можно получить циклической перестановкой индексов.

В уравнениях (3.5) мы не учли сил тяжести. В некоторых областях, например, в строительной механике, эти силы играют большую роль, так как на строительные конструкции часто действует только сила собственного веса. В случае расчета вибраций радиоаппаратуры, когда ускорения в десятки и сотни раз превышают ускорение свободного падения, основными силами являются силы инерции, а вес существенного значения не имеет.

Если потребуется учет сил тяжести, то их можно ввести в уравнения равновесия сил.

Проекции ускорения на координатные оси можно выразить через перемещения какой-либо точки элемента. В качестве такой точки разумно взять центр тяжести элемента или его геометрический центр. В этой точке мы и будем помещать узел сетки и определять функции перемещений. Заметим, что точно такие же

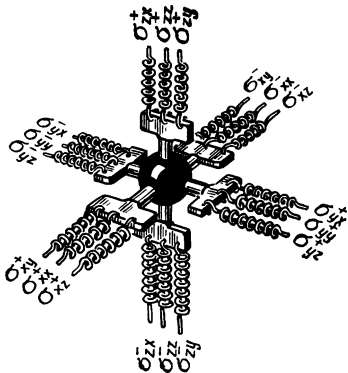


Рис. 3.6.

уравнения движения (3.6) получатся, если в узлах сетки сосредоточить всю массу элементов и соединить эти массы упругими связями, сила которых равна силам упругости (рис. 3.6). Таким образом, представление сплошного тела в виде отдельных элементов довольно больших размеров и запись для каждого элемента уравнений типа (3.5) равносильны замене этого тела моделью, состоящей из отдельных масс, соединенных пружинами. К сожалению, нарисовать такую картину не просто.

Замену сплошной среды конечным числом сосредоточенных масс называют *дискретизацией* среды. Разумеется, дискретная среда движется не так, как сплошная, непрерывная. Различие будет тем существенней, чем больше размеры элементов и чем меньше длины волн и частоты колебаний.

Если бесконечно уменьшать размеры элементов, то получится непрерывная среда, для которой и решается задача. Уравнения (3.5) превратятся в дифференциальные уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho a_x \text{ и т. д.}$$

Решение таких уравнений, если только его удастся получить, будет точным. Наше же решение будет приближенным вследствие погрешности дискретизации.

Вернемся к выражению проекций ускорения на координатные оси. Ускорение представляет собой приращение скорости. Поэтому вначале определим выражение скоростей через перемещения. Возьмем три момента

времени $t + \tau$, t и $t - \tau$, разделенные равными промежутками τ . Обозначим перемещения узла модели в направлении x в эти моменты времени через $u(t + \tau)$, u и $u(t - \tau)$. Приращения перемещений в секунду и соответствует скорости на интервалах $(t + \tau) \dots t$ и $t \dots (t - \tau)$:

$$\dot{u}(t + \tau/2) = [u(t + \tau) - u]/\tau,$$

$$\dot{u}(t - \tau/2) = [u - u(t - \tau)]/\tau.$$

Приращение скорости в секунду на интервале $(t + \tau/2) \dots (t - \tau/2)$ будет определять проекцию ускорения на соответствующую ось:

$$a_x = [u(t + \tau) - 2u + u(t - \tau)]/\tau^2. \quad (3.7)$$

Введенная выше система обозначений в разностных формулах, согласно которой величины, относящиеся к различным узлам сетки и различным моментам времени, имеют индексы, соответствующие номерам узлов и моментов времени, является удобной при программировании задачи для решения на ЦВМ. В программе организуются счетчики номеров узлов по координатам и времени, имеющие те же обозначения, что и индексы у величин в формулах, и не представляет труда чисто формально перейти от разностных формул к формулам в программе, записанной на одном из алгоритмических языков или в машинном коде. Однако в теории упругости используется своя система обозначения величин. Величины напряжений и деформаций снабжаются буквенными индексами, указывающими направление действия напряжений и направления нормалей к площадкам, к которым приложены напряжения [3]. Если к этим индексам добавить еще номера узлов сетки, то обозначение получится слишком сложным. Поэтому в дальнейшем мы примем другую систему обозначений. Индексы, принятые в теории упругости, сохраним, а индексы, соответствующие номерам узлов сетки, заменим обозначениями координат и времени в скобках, как это делается при обозначении аргументов функций в математике. Например, нормальные напряжения, действующие в направлении x и измеренные в узле сетки с координатами x , $y + h$, z в момент времени $t + \tau$ будут иметь обозначение

$$\sigma_{xx}(x, y + h, z, t + \tau).$$

При этом аргументы x , y , z и t будут принимать дискретные значения, соответствующие координатам

узлов сетки. Такая система не менее удобна, чем примененная выше. Например, при программировании задачи на алгоритмическом языке ФОРТРАН разностные формулы будут переписываться без существенных изменений.

Далее, для упрощения обозначений и сокращения занимаемого формулами места среди аргументов в скобках будем сохранять только те, которые отличны от координат центрального узла (x, y, z и t), т. е. будем записывать $\sigma_{xx}(y+h, t+\tau)$. В этих новых обозначениях и записана разностная формула для ускорения (3.7).

Перемещения u можно измерять относительно любой неподвижной точки, поскольку начало отсчета при вычислении разностей роли не играет, но его удобней вести от точки, где находился узел в положении равновесия тела. Однако если тело вдруг начинает двигаться в пространстве как единое целое, продолжая при этом деформироваться, то перемещения относительно первоначального положения могут быть велики, а разности перемещений соседних узлов — незначительны. Чтобы при этом получить достаточную точность расчета, нужно вычислять перемещения с большим количеством знаков. В этом случае системе координат удобнее сделать подвижной, движущейся вместе с телом, например с центром массы его. Если тело при этом не испытывает линейных или угловых ускорений, то в расчете ничего не изменится. Если же появляются ускорения, то их можно учесть в виде дополнительных сил в уравнениях (3.6).

3.5. Уравнения движения в перемещениях

Уравнения (3.6) связывают между собой силы и ускорения и являются уравнениями движения элемента. Если бы силы не зависели от перемещений, то проекции ускорений были бы постоянными величинами и элемент двигался равноускоренно. Но при движении элемента внутри упругого тела все происходит гораздо сложнее. Как только возникают напряжения, появляются ускорения и элементы начинают двигаться. Движение элементов друг относительно друга изменяет величину деформаций и, следовательно, напряжений. Изменение напряжений приводит к изменению ускорений, т. е. скоростей и перемещений. Круг замкнулся. Движение упругого тела и происходит вследствие взаимосвязи перемещений и ускорений. Чтобы разобраться в этой взаимосвязи,

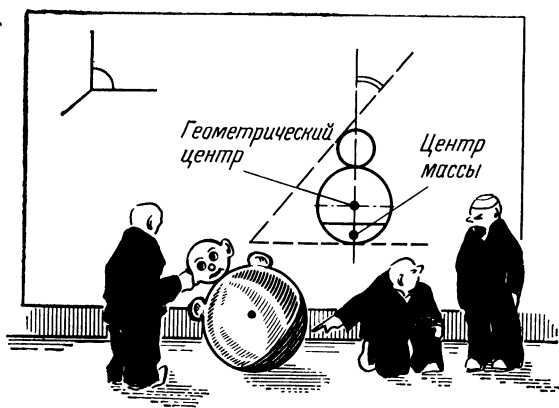


Рис. 3.7.

нужно в уравнениях (3.6) выразить напряжения через перемещения.

Мы уже знаем, как выражать перемещения через деформации (см. формулы (3.4) и (3.5)), следовательно, осталось определить деформации через перемещения. Нужно только условиться, в какой точке элемента брать эти перемещения. Ведь сам элемент деформируется и различные его точки движутся по-разному.

Вопрос, казалось бы, простой. Конечно, нужно брать перемещения в центре элемента. Но оказывается, у элемента по крайней мере два центра — центр массы и геометрический центр. Если элемент однороден, т. е. сделан из одного материала, то его геометрический центр и центр массы совпадают, а если элемент неоднороден (рис. 3.7), то не совпадают.

С физической точки зрения перемещения нужно вычислять в центре массы, где сосредоточиваются инерционные силы. Но, к сожалению, это затрудняет вычисления.

Оказывается, что в неоднородных конструкциях, каких в радиоаппаратуре много, центры масс располагаются не на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 3.8). Придется вычислять все эти расстояния, множить

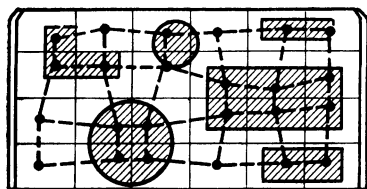


Рис. 3.8.

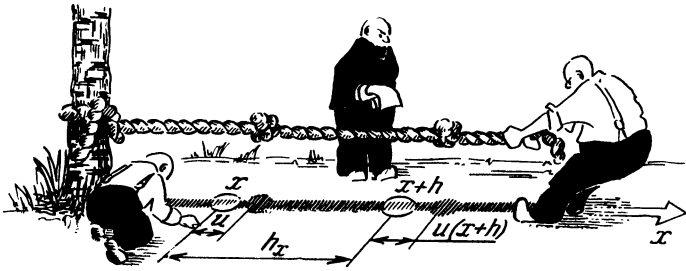


Рис. 3.9.

напряжения на направляющие косинусы и делать много других расчетов.

А что будет, если вычислять перемещения в геометрическом центре элемента, а не в центре массы? Очевидно, в расчете появятся погрешности, которые будут исчезать в однородных телах. Погрешности сократятся также при уменьшении размеров элементов. Нам придется примириться с этими погрешностями, но при расчетах неоднородных тел для получения той же точности расчета нужно брать размеры элементов меньшими, чем при расчетах однородных тел. Деформация растяжения есть относительное удлинение, т. е. отношение приращения длины к самой длине. Если, например, требуется определить деформации удлинения в направлении оси x между узлами $(x+h)$ и x (рис. 3.9), то сделать это очень просто. Предположим, что узел $(x+h)$ переместился в направлении x на расстояние $u(x+h)$, а узел x — на расстояние u . Тогда удлинение этого участка тела составит $\Delta l = u(x+h) - u$. Взяв отношение этого приращения длины к первоначальной длине $l = h_x$, получим величину деформации удлинения

$$\epsilon_{xx}^+ = \frac{u(x+h) - u}{h_x} \quad (3.8)$$

Теперь нужно отнести полученное удлинение к какой-либо точке участка между узлами x и $(x+h_x)$. Если бы мы растягивали резиновую полосу и других деформаций, кроме ϵ_{xx} , не было, то на всем рассматриваемом участке относительное удлинение было бы одинаковым. Если же процесс деформирования происходит быстро или, кроме растяжения в направлении x , имеются еще другие деформации, то деформации ϵ_{xx} в разных точках нашего

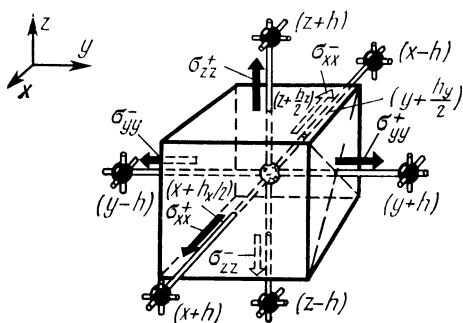


Рис. 3.10.

участка будут неодинаковыми и в какой именно точке деформации будут в точности равны вычисленному значению ϵ_{xx} , заранее сказать нельзя.

Заранее можно утверждать, что при деформировании упругого тела деформации будут непрерывно изменяться от точки к точке, т. е. деформации ϵ_{xx} будут некоторой плавной функцией координат, не имеющей изломов и ступенек, и между узлами найдется по крайней мере одна точка, где деформация будет равна вычисленной. В одних случаях эта точка будет смещена от центра участка влево, в других — вправо. Ошибка будет наименьшей, если считать, что вычисленное по формуле (3.8) значение деформации равно деформации в центре участка.

Если блок разбит на элементы с узлами в центре каждого из них (рис. 3.10), то легко заметить, что точки, в которых вычисляются деформации растяжения ϵ_{xx}^+ , ϵ_{xx}^- , ϵ_{yy}^+ , ϵ_{yy}^- , ϵ_{zz}^+ и ϵ_{zz}^- по формулам, аналогичным (3.8), совпадают с центрами граней, где приложены напряжения.

В формулы нормальных напряжений (3.5) входят три вида деформаций растяжения в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Уравнения (3.8) подходят только для одного вида деформации — растяжения в направлении действия напряжения. Для двух других деформаций растяжения нужны другие формулы.

Например, в формуле для напряжений σ_{xx}^+ деформации ϵ_{xx} можно вычислять по формуле (3.8), так как эти деформации определены для центра грани $(x+h_x/2)$. Если

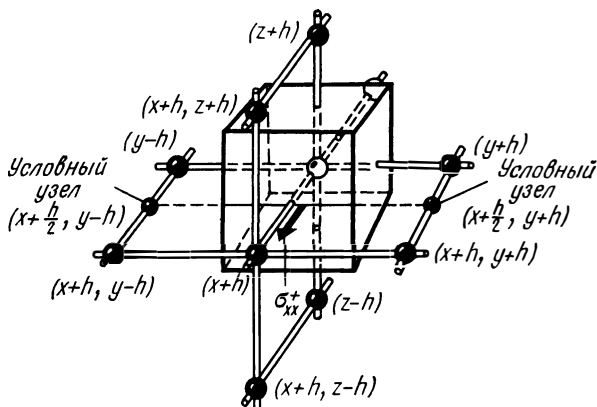


Рис. 3.11.

же в формулу (3.5) вместо ε_{yy} подставить значение $[v(y+h) - v] / h_y$ или $[v - v(y-h)] / h_y$, то вычисление будет неточно, так как эти деформации рассчитаны для центров других граней.

Как же вычислить деформации растяжения в направлении y и x в центре грани $(x+h_x/2)$? Для этого нужно использовать перемещения других узлов (рис. 3.11).

В направлении y на уровне центра передней грани $(x+h_x/2)$ нет узлов, поэтому наметим два условных узла $(x+h/2, y+h)$ и $(x+h/2, y-h)$. Перемещения в сторону y в этих узлах находим как средние арифметические между перемещениями двух соседних узлов:

$$v(x+h/2, y+h) = [v(x+h, y+h) + v(y+h)]/2,$$

$$v(x+h/2, y-h) = [v(x+h, y-h) + v(y-h)]/2.$$

Теперь с помощью этих узлов можно вычислить удлинение в направлении y для центра передней грани:

$$\varepsilon_{yy}^{+x} = [v(x+h, y+h) + v(y+h) - v(x+h, y-h) - v(y-h)] / 4h_y. \quad (3.9)$$

Нам потребуются выражения для деформаций растяжения в трех направлениях для центров всех шести граней элемента. Чтобы различать эти деформации, уже недостаточно отмечать их индексом «+» или «-», указывающим на смещение относительно центра элемента вперед или назад. Нужно еще указать, в каком направ-

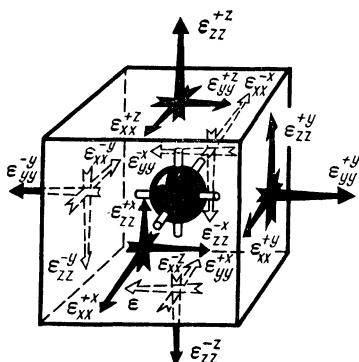
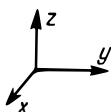


Рис. 3.12.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{xx}^{+x} = \frac{1}{h_x} [u(x+h) - u]; \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{xx}^{-x} = \frac{1}{h_x} [u - u(x-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{yy}^{-x} = \frac{1}{4h_y} [v(x+h, y+h) + v(y+h) - v(x+h, y-h) - v(y-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{zz}^{+x} = \frac{1}{4h_z} [w(x+h, z+h) + w(z+h) - w(x+h, z-h) - w(z-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{yy}^{-x} = \frac{1}{4h_y} [v(y+h) + v(x-h, y+h) - v(y-h) - v(x-h, y-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{zz}^{-x} = \frac{1}{4h_z} [w(z+h) + w(x-h, z+h) - w(z-h) - w(x-h, z-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{yy}^{+y} = \frac{1}{h_y} [v(y+h) - v]; \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{yy}^{-y} = \frac{1}{h_y} [v - v(y-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{zz}^{+y} = \frac{1}{4h_z} [w(y+h, z+h) + w(z+h) - w(y+h, z-h) - w(z-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{xx}^{+y} = \frac{1}{4h_x} [u(y+h, x+h) + u(x+h) - u(y+h, x-h) - u(x-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{zz}^{-y} = \frac{1}{4h_z} [w(z+h) + w(y-h, z+h) - w(z-h) - w(y-h, z-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{xx}^{-y} = \frac{1}{4h_x} [u(x+h) + u(x+h, y-h) - u(x-h) - u(x-h, y-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{zz}^{+z} = \frac{1}{h_z} [w(z+h) - w]; \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{zz}^{-z} = \frac{1}{h_z} [w - w(z-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{xx}^{+z} = \frac{1}{4h_x} [u(z+h, x+h) + u(x+h) - u(z+h, x-h) - u(x-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{yy}^{+z} = \frac{1}{4h_y} [v(z+h, y+h) + v(y+h) - v(z+h, y-h) - v(y-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{xx}^{-z} = \frac{1}{4h_x} [u(x+h) + u(z-h, x+h) - u(x-h) - u(z-h, x-h)]; \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \epsilon_{yy}^{-z} = \frac{1}{4h_y} [v(y+h) + v(y+h, z-h) - v(y-h) - v(y-h, z-h)];
 \end{aligned}$$

Рис. 3.13.

лении берется это смещение (рис. 3.12). Выражения для остальных деформаций растяжения можно записать по аналогии с выражениями (3.8) и (3.9) (рис. 3.13).

Ранее указывалось, что деформации сдвига определяются суммой тангенсов углов поворота сечений, расположенных до деформации под прямым углом (рис. 3.14).

Теперь нам предстоит выразить деформации сдвига через перемещения узлов модели-сетки. При этом нужно учитывать положение центра грани, для которой вычисляются деформации. Кроме того, нужно получить выражения, похожие на общепринятые в теории упругости. В противном случае мы не сможем проверить правильность наших выводов.

Вычислим деформации сдвига, по которым определяются касательные напряжения σ_{yx} в центре передней грани элемента (рис. 3.15).

Первую часть деформаций сдвига ($\text{tg } \alpha_1$) находят как разность перемещений узлов x и $(x+h)$ в направлении y , отнесенную к расстоянию между этими узлами: $[v(x+h) - v] / h$.

Вторая часть деформаций ($\text{tg } \alpha_2$) вычисляется несколько сложнее. По линии, проходящей через центр передней грани в направлении y , нет узлов. Поэтому введем условные узлы $(x+h/2, y+h)$ и $(x+h/2, y-h)$ (рис. 3.16). Перемещения этих узлов вычислим как средние арифметические между перемещениями соседних узлов:

$$u(x+h/2, y+h) = [u(x+h, y+h) + u(y+h)]/2;$$

$$u(x+h/2, y-h) = [u(x+h, y-h) + u(y-h)]/2.$$

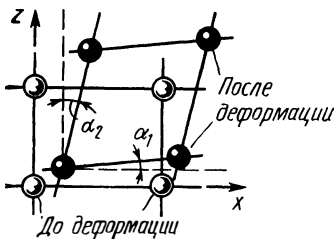


Рис. 3.14.

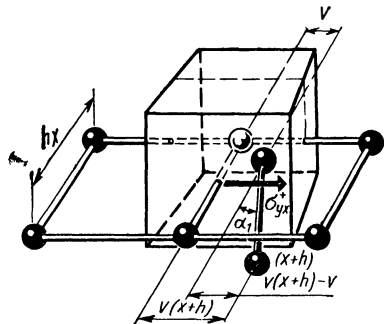


Рис. 3.15.

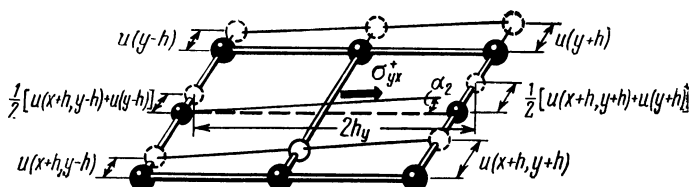


Рис. 3.16.

Определив разность между этими величинами и взяв ее отношение к расстоянию между условными узлами $2h_y$, получим вторую часть деформаций сдвига

$$[u(x+h, y+h) + u(y+h) - u(x+h, y-h) - u(y-h)] / 4h_y.$$

Сложив обе части, находим нужное нам выражение для деформаций сдвига

$$\varepsilon_{yx}^+ = [v(x+h) - v] / h_x + [u(x+h, y+h) + u(y+h) - u(x+h, y-h) - u(y-h)] / 4h_y. \quad (3.10)$$

Аналогично получают выражения для остальных деформаций сдвига (рис. 3.17). Если подставим полученные

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yx}^+ &= \frac{1}{h_x} [v(x+h) - v] + \frac{1}{4h_y} [u(x+h, y+h) + u(y+h) - u(x+h, y-h) - u(y-h)]; \\ \varepsilon_{yx}^- &= \frac{1}{h_x} [v - v(x-h)] + \frac{1}{4h_y} [u(y+h) + u(x-h, y+h) - u(y-h) - u(x-h, y-h)]; \\ \varepsilon_{zx}^+ &= \frac{1}{h_x} [w(x+h) - w] + \frac{1}{4h_y} [u(x+h, z+h) + u(z+h) - u(x+h, z-h) - u(z-h)]; \\ \varepsilon_{zx}^- &= \frac{1}{h_x} [w - w(x-h)] + \frac{1}{4h_y} [u(z+h) + u(x-h, z+h) - u(z-h) - u(x-h, z-h)]; \\ \varepsilon_{zy}^+ &= \frac{1}{h_y} [w(y+h) - w] + \frac{1}{4h_z} [v(y+h, z+h) + v(z+h) - v(y+h, z-h) - v(z-h)]; \\ \varepsilon_{zy}^- &= \frac{1}{h_y} [w - w(y-h)] + \frac{1}{4h_z} [v(z+h) + v(y-h, z+h) - v(z-h) - v(y-h, z-h)]; \\ \varepsilon_{xy}^+ &= \frac{1}{h_y} [u(y+h) - u] + \frac{1}{4h_z} [v(y+h, x+h) + v(x+h) + v(y+h, x-h) - v(x-h)]; \\ \varepsilon_{xy}^- &= \frac{1}{h_y} [u - u(y-h)] + \frac{1}{4h_z} [v(x+h) + v(y-h, x+h) - v(x-h) - v(y-h, x-h)]; \\ \varepsilon_{xz}^+ &= \frac{1}{h_z} [u(z+h) - u] + \frac{1}{4h_x} [w(z+h, x+h) + w(x+h) - w(z+h, x-h) - w(x-h)]; \\ \varepsilon_{xz}^- &= \frac{1}{h_z} [u - u(z-h)] + \frac{1}{4h_x} [w(x+h) + w(z-h, x+h) - w(x-h) - w(z-h, x-h)]; \\ \varepsilon_{yz}^+ &= \frac{1}{h_z} [v(z+h) - v] + \frac{1}{4h_x} [w(z+h, y+h) + w(y+h) - w(z+h, y-h) - w(y-h)]; \\ \varepsilon_{yz}^- &= \frac{1}{h_z} [v - v(z-h)] + \frac{1}{4h_x} [w(y+h) + w(z-h, y+h) - w(y-h) - w(z-h, y-h)]; \end{aligned}$$

Рис. 3.17.

выражения деформаций в уравнения (3.4) и (3.5), то найдем напряжения через перемещения узлов модели-сетки:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^+ &= \frac{\lambda + 2\mu}{h_x} [u(x+h) - u] + \frac{\lambda}{4h_y} [v(x+h, y+h) + v(y+h) - \\ &\quad - v(x+h, y-h) - v(y-h)] + \frac{\lambda}{4h_z} [\omega(x+h, z+h) + \\ &\quad + \omega(z+h) - \omega(x+h, z-h) - \omega(z-h)], \\ \sigma_{xx}^- &= \frac{\lambda + 2\mu}{h_x} [u - u(x-h)] + \frac{\lambda}{4h_y} [v(y+h) + \\ &\quad + v(x-h, y+h) - v(y-h) - v(x-h, y-h)] + \\ &\quad + \frac{\lambda}{4h_z} [\omega(z+h) + \omega(x-h, z+h) - \omega(z-h) - \\ &\quad - \omega(x-h, z-h)],\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\sigma_{yx}^+ = \frac{\mu}{h_x} [v(x+h) - v] + \frac{\mu}{4h_y} [u(x+h, y+h) + u(y+h) - u(x+h, y-h) - u(y-h)],$$

$$\sigma_{yx}^- = \frac{\mu}{h_x} [v - v(x-h)] + \frac{\mu}{4h_y} [u(y+h) + u(x-h, y+h) - u(y-h) - u(x-h, y-h)],$$

$$\sigma_{zx}^+ = \frac{\mu}{h_x} [\omega(x+h) - \omega] + \frac{\mu}{4h_z} [u(x+h, y+h) + u(z+h) - u(x+h, z-h) - u(z-h)],$$

$$\sigma_{zx}^- = \frac{\mu}{h_x} [\omega - \omega(x-h)] + \frac{\mu}{4h_z} [u(z+h) + u(x-h, z+h) - u(z-h) - u(x-h, z-h)] \text{ и т. д.}$$

Оставшиеся двенадцать выражений для напряжений можно получить из уравнений (3.11), если в них произвести циклическую перестановку $x \leftarrow y \leftarrow z \leftarrow x$. Только теперь одновременно с этой перестановкой нужно производить перестановку $u \leftarrow v \leftarrow \omega \leftarrow u$.

Подставим полученные значения напряжений (3.11) в уравнения равновесия (3.6) и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda + 2\mu}{h^2_x} [u(x+h) - 2u + u(x-h)] + \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4h_y h_z} [v(x+h, y+h) - v(x+h),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y - h) - v(x - h, y + h) + v(x - h, y - h)] + \\
& + \frac{\lambda + \mu}{4h_x h_x} [\omega(x + h, z + h) - \omega(x + h, z - h) - \\
& - \omega(x - h, z + h) + \omega(x - h, z - h)] + \\
& + \frac{\mu}{h_y^2} [u(y + h) - 2u + u(y - h)] + \\
& + \frac{\mu}{h_z^2} [u(z + h) - 2u + u(z - h)] = \\
& = \frac{\rho}{\tau^2} [u(t + \tau) - 2u + u(t - \tau)] \text{ и т. д.} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Если в уравнении (3.12) произвести указанную циклическую замену обозначений координат и перемещений, то получим два оставшихся уравнения движения. Эти уравнения содержат только три неизвестные функции u , v и w и называются *уравнениями движения в перемещениях*. Устремив в уравнениях движения шаги по координатам и времени к нулю, получим уравнения движения в перемещениях в дифференциальной форме

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \\
+ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Уравнения в частных производных (3.13) являются основными уравнениями теории упругости и называются *уравнениями Ламе*. Можно было бы чисто формально перейти от уравнений Ламе (3.13) к уравнениям в конечных разностях (3.12), заменив частные производные разностными аналогами. Такой путь был бы короче, но, во-первых, мы договорились, что не будем прибегать к уравнениям в дифференциальной форме как исходным, а во-вторых, при нашем подходе мы проследили все тонкости получения этих уравнений и нам ясна физическая картина деформирования элементов модели. Нам, например, очень просто будет задавать в расчете любые внешние воздействия на модель-сетку, о чем будет сказано ниже, а пока представим уравнения (3.12) в форме, удобной для решения на ЦВМ.

3.6. Явная схема

Уравнения движения (3.12) замечательны тем, что в каждом из них имеется только один член, определяющий один компонент перемещения на верхнем временном слое: $u(t+\tau)$, $v(t+\tau)$ и $w(t+\tau)$ (рис. 3.18). Благодаря этому вычисления можно вести в следующем порядке.

Прежде всего, должно быть задано начальное состояние тела, т. е. начальные перемещения и скорости всех узлов модели-сетки. Это равносильно заданию перемещений в два начальные момента времени ($t-\tau$) и t . Тогда для каждого узла модели сетки мы можем вычислить левые части в уравнениях (3.12). Там находятся только известные величины. Затем, используя перемещения на нижнем временном слое, можно вычислить для всех узлов перемещения на верхнем временном слое, применяя правую часть уравнений (3.12). Теперь

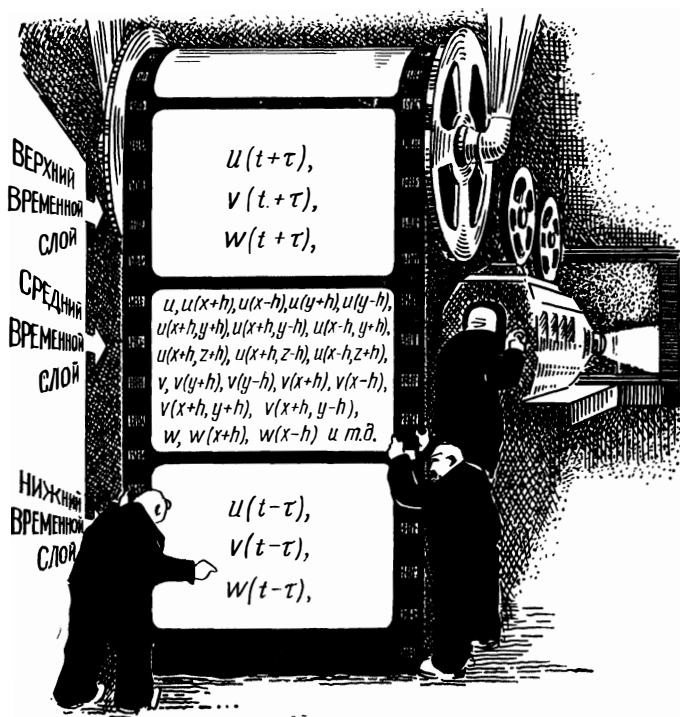


Рис. 3.18.

будут определены перемещения всех узлов на верхнем временном слое.

Можно продвинуться на один шаг по времени, т. е. сменить один кадр (см. рис. 3.18). Теперь нам вновь будут известны перемещения всех узлов модели на двух предыдущих слоях по времени и можно рассчитать перемещения на следующем временном слое. Так, двигаясь по временным слоям, находят перемещения всех узлов на интересующем отрезке времени. При этом на каждом временном слое надо решать не систему уравнений, а каждое уравнение в отдельности относительно одной неизвестной.

Чтобы легче было считать, заранее решим уравнения (3.12) относительно неизвестных перемещений в верхнем временном слое. Попутно с этим преобразованием выполним еще два. Во-первых, выделим члены, относящиеся к отдельным напряжениям, как сделано в уравнении (3.6), а во-вторых, перейдем к другим обозначениям, применяемым при программировании задач на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Этот язык является весьма удобным при программировании наших задач, поэтому для иллюстрации приведем формулы на этом языке.

Пока запомним простые правила: на ФОРТРАНЕ каждую величину можно обозначать одной или несколькими буквами или цифрами, причем можно использовать только большие (прописные) буквы латинского алфавита, скобки употребляют только круглые. Знак умножения, который мы часто пропускаем или заменяем точкой, на ФОРТРАНЕ обозначается звездочкой. Звездочка служит и для другой цели. Если формула не уместилась в одну строку, то можно сделать перенос на любом математическом знаке, но в начале следующей строки этот знак не повторяется, а ставится звездочка. Для этой звездочки отводится в начале строки специальное место. Символы x , y и z в обозначениях на языке ФОРТРАН будут выполнять ту же роль, что и в предыдущих формулах, т. е. определять расположение узла, для которого вычисляются перемещения. По этим значениям машина будет находить номер узла и соответственно выбирать из памяти числа, относящиеся к этому узлу. Поэтому x , y и z примут только целые значения, которые изменятся при переходе к следующему узлу на единицу. Вместо того чтобы прибавлять к соответствующей

координате шаг, будем прибавлять к номеру x , y или z единицу, т. е. вместо $(x+h)$ писать $(X+1)$.

Поскольку в каждом временном слое мы оперируем с величинами, относящимися к трем временным слоям, нет необходимости хранить в памяти ЦВМ все данные, которые получаются в результате расчета. Это потребовало бы очень большого объема памяти. Можно хранить в памяти данные только трех слоев и после вычислений в очередном временном слое записывать новые значения на место прежних, а нужные нам данные выводить на печать. Поэтому не будем в новых обозначениях писать $(t+\tau)$ или $(t-\tau)$. Величины, относящиеся к разным временным слоям, обозначим цифрами 1, 2 и 3, например, вместо $u(t-\tau)$, u и $u(t+\tau)$ запишем $U1$, $U2$ и $U3$ соответственно.

В новых обозначениях формулы (3.6) будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} U3 &= QXX1 - QXX2 + QXY1 - QXY2 + QXZ1 - \\ &\quad - QXZ2 + 2*U2 - U1, \\ V3 &= QYY1 - QYY2 + QYZ1 - QYZ2 + QYX1 - QYX2 + \\ &\quad + 2*V2 - V1, \\ W3 &= QZZ1 - QZZ2 + QZX1 - QZX2 + QZY1 - \\ &\quad - QZY2 + 2*W2 - W1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Сравнивая уравнения (3.14) с (3.6), можно заметить, что каждая величина, начинающаяся буквой Q, соответствует определенному напряжению. Это и есть напряжение, только умноженное на постоянный множитель, например:

$$QXX1 = \sigma_{xx}^+ \tau^2 / \rho \quad \text{или} \quad QXY2 = \sigma_{xy}^- \tau^2 / \rho.$$

Эти напряжения теперь будут иметь размерность перемещений и измеряться не в паскалях (согласно СИ), а в метрах.

Новые напряжения вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} QXX1 &= AX*(U2(X+1) - U2) + BXY*(V2(X+1, \\ &\quad Y+1) + V2(Y+1) - V2(X+1, Y-1) - \\ &\quad - V2(Y-1)) + BXZ*(W2(X+1, Z+1) + \\ &\quad + W2(Z+1) - W2(X+1, Z-1) - W2(Z-1)), \\ QXX2 &= AX*(U2 - U2(X-1)) + BXY*(V2(Y+1) + \\ &\quad + V2(X-1, Y+1) - V2(Y-1) - (V2(X-1, \end{aligned}$$

$$Y - 1)) + BXZ * (W2(Z + 1) + W2(X - 1, Z + 1) - \\ - W2(Z - 1) - W2(X - 1, Z - 1)),$$

$$QXY1 = CY * (U2(Y + 1) - U2) + DXY * (V2(X + \\ + 1, Y + 1) + V2(X + 1) - V2(X - 1, Y + 1) - \\ - V2(X - 1)),$$

$$QXY2 = CY * (U2 - U2(Y - 1)) + DXY * (Y(X + 1) + \\ + V2(X + 1, Y - 1) - V2(X - 1) - V2(X - 1, Y - 1)),$$

$$QXZ1 = CZ * (U2(Z + 1) - U2) + DXZ * (W2(X + 1, \\ Z + 1) + W2(X + 1) - W2(X - 1, Z + 1) - \\ - W2(X - 1)),$$

$$QXZ2 = CZ * (U2 - U2(Z - 1)) + DXZ * (W2(X + 1) + \\ + W2(X + 1, Z - 1) - W2(X - 1) - W2(X - 1, Z - 1))$$

и т. д. (3.15)

Остальные двенадцать новых выражений для напряжений можно, как и прежде, получить циклической перестановкой $X \leftarrow Y \leftarrow Z \leftarrow X$ и $U \leftarrow V \leftarrow W \leftarrow U$. Все коэффициенты, входящие в уравнения для напряжений (3.15), являются безразмерными и определяются характеристиками материалов (λ , μ и ρ) и выбранными шагами сетки h_x , h_y , h_z и τ . Коэффициенты

$$AX = (\lambda + 2\mu)\tau^2 / \rho h_x^2, \\ BXY = \lambda\tau^2 / 4\rho h_x h_y, CX = \mu\tau^2 / \rho h_x^2, \\ DXY = \mu\tau^2 / 4\rho h_x h_y \text{ и т. д.} \quad (3.16)$$

Значения остальных коэффициентов можно получить из (3.16) циклической перестановкой, причем перестановка обозначений координат не изменяет величины коэффициента, например, $BXY = BYX$.

3.7. Через границу

Деформация упругих тел может происходить под действием внутренних сил, например упругих воздействий, возникающих при расширении вследствие неравномерного нагрева, электрических и магнитных сил, если тела являются сегнетоэлектриками или магнитоэлектриками. При расчетах вибраций радиоконструкций эти силы во внимание не принимаются. Упругие тела могут деформироваться также под действием внешних сил. Эти силы мы и будем учитывать при расчетах. Внешние силы всегда возникают при взаимодействии упругого тела с другими твердыми, жидкими или газообразными телами. Чтобы определить эти силы, нужно рассматривать

Всю картину взаимодействий, например, учитывать взаимодействие радиоконструкции с корпусом корабля, на котором она установлена, а также корабля с морскими волнами и ветром, а ветра с водой. Столь сложные задачи мы решать не умеем. Поэтому искусственно разделим эту сложную картину на более простые, в которых силы взаимодействия принимаем известными.

Реальные условия, в которых придется работать конструкции, всегда известны приблизительно. Поэтому определение внешних сил производится экспериментально в примерно аналогичных условиях, а затем вводятся поправочные коэффициенты, учитывающие, что в реальных условиях силы могут быть большими. Часто картину упрощают еще больше, допуская, что объекты, которые воздействуют на конструкцию, являются абсолютно жесткими и не деформируются. Точки, в которых конструкция взаимодействует с другими телами, совершают такое же движение, как и эти абсолютно жесткие тела. В этом случае задаются не силы, действующие на упругое тело, а перемещения точек контакта.

Таким образом, внешние воздействия могут задаваться в виде перемещений граничных точек рассматриваемого упругого тела или в виде сосредоточенных или распределенных сил, действующих извне на поверхность тела. В первом случае говорят, что заданы граничные условия *первого рода*, а во втором — граничные условия *второго рода*. Если на всей поверхности или на части ее внешние силы отсутствуют, то это рассматривается как задание нулевых граничных условий второго рода. Следовательно, граничные условия должны быть заданы по всей внешней поверхности тела. В нашей дискретной модели тела нужно задать внешние силы или перемещения по всем граням элементов, которые выходят на поверхность тела.

Рассмотрим вначале задание граничных условий второго рода. При выводе уравнений равновесия (3.6) мы проектировали все силы, приложенные по граням элемента, на координатные оси. При этом рассматривался элемент внутри тела, и этими силами были произведения напряжений на площади граней. Если одна или большее число граней элемента выходит на поверхность тела, то нужно соответствующие напряжения заменить внешними напряжениями. Если на поверхности задана распределенная нагрузка (давление), то соответствующие напря-

Граничные условия:

- 1)...
- 2)...
- 3)...

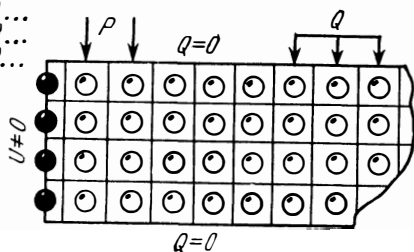


Рис. 3.19.

жения (3.15) заменяют этими значениями. При этом не следует забывать, что эту нагрузку нужно умножить на отношение (τ^2/ρ) согласно (3.16).

Если на поверхности задана сосредоточенная сила, то к наружной грани граничного элемента нужно приложить силу, приходящуюся на единицу площади грани.

При расчетах вибраций радиоконструкций внешние воздействия часто задают в виде граничных условий первого рода, т. е. в виде перемещений граничных узлов. Например, при воспроизведении в расчете испытаний конструкции на вибростенде в точках крепления ее к вибростенду задаются такие же перемещения, как и у стола вибростенда. Если в таких местах расположить узлы модели-сетки на поверхности тела, то перемещения узлов будут такими же, как и у поверхности. Таким образом, перемещения таких узлов не рассчитывают, а задают.

Но мы условились, что на поверхность тела выходят поверхности граней элементов, а узлы располагаются на расстоянии половины шага сетки от поверхности. Это облегчает задание граничных условий второго рода. Как же быть, если в одной задаче встречаются граничные условия и первого и второго рода?

Если граничные условия различны на поверхностях (рис. 3.19), то можно расположить узлы в тех местах, где задаются перемещения, и на расстоянии половины шага от поверхности, где задаются силы или напряжения.

Задача усложняется, если граничные условия первого и второго рода заданы на одной поверхности. В этом случае следует располагать узлы на расстоянии половины шага от нее и в тех местах, где заданы перемещения, переходить от перемещений к напряжениям, рассматривая деформации половины элемента у поверхности.

Однако при практических расчетах вибраций радио-

конструкций таких усложнений можно всегда избежать, если рассмотреть реальные способы крепления конструкций к источнику вибраций. Как правило, такое крепление производится с помощью винтов или болтов, и если уж считать абсолютно жестким источник вибраций, то логично считать абсолютно жестким и болт. В этом случае следует задавать одинаковые перемещения всем узлам, расположенным по оси болта.

При построении модели-сетки нужно только позаботиться о том, чтобы узлы располагались ближе к осям болтов, через которые передаются вибрации на конструкцию.

3.8. Монолитный блок РЭА

Мы рассмотрели построение дискретной модели для расчета вибраций однородных упругих тел прямоугольной формы или приближающихся по форме к прямоугольному параллелепипеду. В радиоконструкциях такими телами можно считать различные аморфные подложки, например, из стекла или керамики, на которые наносится напылением или другими способами электрические элементы. Те же модели можно применять для расчетов колебаний различных литых или штампованных деталей корпусов, кожухов и др.

В радиоконструкциях часто встречаются блоки, которые никак нельзя считать однородными с точки зрения их механических свойств. К ним относятся блоки, в которых промежутки между радиоэлементами залиты компаундом, пенопластом или резиной. Построение моделей для таких блоков можно производить на основе тех же принципов, что и для однородных тел, если научиться вычислять средние значения механических характеристик для неоднородных элементов моделей.

Предположим, что необходимо рассчитать вибрации неоднородного блока, содержащего множество радиоэлементов, укрепленных на платах, помещенных в кожух и залитых компаундом (рис. 3.20). Блок имеет прямоугольную форму, поэтому модель будем строить в прямоугольной системе координат.

При построении модели-сетки такого блока можно, например, представить его в виде нескольких однородных областей, соединенных границами сложной конфигурации, и для каждой области наметить свою сетку. При

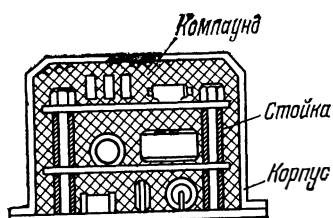


Рис. 3.20.

расчетах процессов деформирования модели необходимо учесть граничные условия на границах областей с разными свойствами. Эти граничные условия формулируются достаточно просто: напряжения в различных материалах вблизи граничной поверхности, действующие в

плоскости, касательной к поверхности, должны быть равны. Должны быть равны и перемещения точек соседних областей вблизи границы.

Однако такая попытка наталкивается на ряд трудностей, связанных с ограниченными возможностями вычислительных машин. Первая трудность определяется чрезмерно большим объемом памяти, необходимым для хранения информации о движении такой модели. Ведь нужно будет хранить множество чисел, определяющих движение каждого элемента модели. Поскольку элементы маленькие, таких чисел наберется много (около миллиона). Кроме того, потребуется указать элементы, стыкующиеся между собой по границам, и определить, к какой области эти элементы относятся. Это также потребует немалого объема памяти. Несмотря на то, что вычислительная техника в настоящее время располагает запоминающими устройствами с объемом памяти в несколько миллионов чисел, работать с такими большими массивами чисел, когда каждое из них потребуется в каждом шаге вычислений по времени, очень сложно. Привлечение для хранения информации о состоянии модели внешних запоминающих устройств, таких, как магнитные ленты, магнитные диски или барабаны, в подобных задачах крайне нежелательно, поскольку это повышает время вычислений, по крайней мере, в 10 раз. А оперативная память машин ограничена и составляет несколько десятков тысяч чисел.

Вторая трудность возникает в связи с ограниченным быстродействием машин. Ведь в каждом шаге по времени надо вычислить поведение каждого элемента модели, т. е. выполнить для каждого элемента около сотни арифметических операций. А если таких элементов будет миллион и столько же шагов по времени, то потребуется около 10^{14} арифметических операций. Если даже

вычислительная машина выполняет в секунду миллион операций, то на это уйдет более трех лет. Очевидно, что этот путь неприемлем не только для современных вычислительных машин, но и для машин обозримого будущего.

Можно пойти другим путем: использовать в расчете структурные особенности конструкции. В радиоконструкциях, например, встречается много плоских деталей или сочленений таких деталей в виде плат, кожухов. Встречаются также стержни в виде винтов, растяжек и т. п. Процессы деформирования таких деталей достаточно хорошо изучены, что позволяет упростить модель. Этот путь очень широко применяется при построении различных частных методик для расчета определенных конструкций.

Мы в дальнейшем также прибегнем к одному такому приему для построения моделей плат и стержневых конструкций. Но и этот путь оказывается достаточно сложным, если, помимо пластин и стержней, в конструкции еще много других деталей, влиянием которых на ход процесса нельзя пренебречь. К таким деталям, прежде всего, относится наполнитель, если его можно назвать деталью.

Мы пойдем третьим путем. При построении модели будем расчленять конструкцию на относительно большие элементы одинакового размера, независимо от того, что в эти элементы попадает один материал или части различных деталей. Затем заменим каждый неоднородный элемент однородным, обладающим в среднем теми же механическими свойствами.

Механические свойства материалов можно определить одним из двух наборов коэффициентов. Первый включает в себя модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , второй — коэффициенты Ламе λ и μ . Осреднение свойств элемента и сводится к вычислению средних значений этих коэффициентов. Заметим, что осреднение характеристики будет зависеть от направления, для которого они вычисляются, т. е. осредненный элемент будет обладать свойством анизотропии.

3.9. Элементы связей

При построении моделей для однородных областей выделялась только одна группа элементов, в центре которых сосредотачивалась масса элемента в виде узла

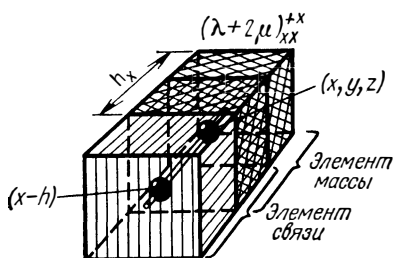


Рис. 3.21.

модели-сетки. Эти элементы определяют инерционные свойства узла, т. е. правую часть в уравнениях движения. Величина напряжений, входящих в левую часть уравнений, определяется деформацией других элементов, расположенных между узлами сетки. Эти элементы можно назвать элементами связей. В однородных областях выделять их не имело смысла, поскольку материал

везде одинаков. В неоднородных областях такое выделение повышает точность расчета.

Рассмотрим вновь порядок составления уравнений движения. Вначале выделяют элементы массы и для них записывают уравнения динамического равновесия через напряжения. Затем напряжения выражают через деформации, а деформации — через перемещения. Рассмотрим нормальные напряжения σ_{xx}^+ , действующие по фасадной грани элемента, имеющего форму параллелепипеда:

$$\sigma_{xx}^+ = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx}^{+x} + \lambda \varepsilon_{yy}^{+x} + \lambda \varepsilon_{zz}^{+x}.$$

Деформации растяжения ε_{xx}^{+x} находят через перемещения двух узлов с координатами $(x+h, y, z)$ и (x, y, z) . Таким образом, за элемент связи, определяющий растяжение в направлении x в центре фасадной грани, следует принять элемент, расположенный между этими двумя узлами (рис. 3.21), и для него рассчитать осредненное значение суммарного коэффициента $(\lambda + 2\mu)$.

Деформации ε_{yy}^{+x} и ε_{zz}^{+x} вычисляются также в центре передней грани, однако при этом используются по четыре узла (рис. 3.22). Эти элементы связей имеют вдвое больший объем, и для них должны вычисляться осредненные значения двух коэффициентов λ .

Нужно позаботиться о новых обозначениях коэффициентов Ламе, поскольку в обозначении теперь должно указываться направление деформации, ее вид (растяжение или сдвиг) и грань элемента массы, для которой этот коэффициент вычислен. Все эти указания содержатся в обозначениях деформаций, поэтому можно для

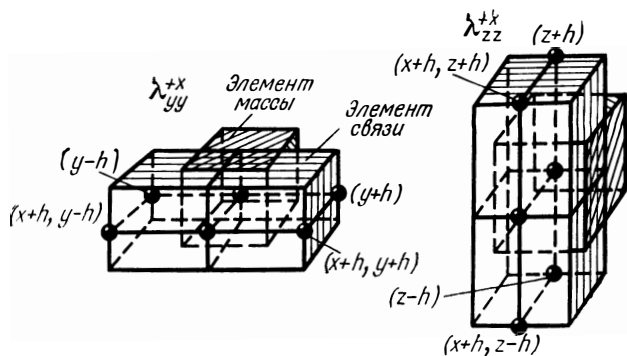


Рис. 3.22.

коэффициентов Ламе принять те же индексы, что и для деформаций.

Мы показали расположение и форму трех элементов связи для определения коэффициентов при вычислении нормальных напряжений σ_{xx}^+ . К каждой грани элемента массы приложено одно нормальное напряжение. Поэтому для расчета всех шести напряжений потребуется определить 18 элементов связи. Причем все эти элементы будут разными. Однако напряжения на смежных гранях двух соседних элементов одинаковы и определяются деформацией одинакового элемента связи, поэтому к каждому узлу можно отнести только девять элементов связи, а девять остальных — к соседним узлам. Усло-

Напряжения	Элементы связи		
σ_{xx}^+ 	$(\lambda + 2\mu)_{xx}^{+x}$ 	λ_{zz}^{+x} 	λ_{zz}^{+x}
σ_{yy}^+ 	$(\lambda + 2\mu)_{yy}^{+y}$ 	λ_{zz}^{+y} 	λ_{yy}^{+z}
σ_{zz}^+ 	$(\lambda + 2\mu)_{zz}^{+z}$ 	λ_{xx}^{+z} 	λ_{yy}^{+z}

Рис. 3.23.



















Напряжения	Элементы связи	
		
		
		
		
		
		

Рис. 3.24.

шести граням элемента массы приложено 12 касательных напряжений и для их вычисления нужно иметь 24 элемента связи. Двенадцать из них мы отнесем к данному узлу (рис. 3.24), а двенадцать — к соседним узлам.

Для коэффициентов μ , с помощью которых вычисляются касательные напряжения, введены те же обозначения, что и для коэффициентов $(\lambda + 2\mu)$ и λ , используемых для вычисления нормальных напряжений, но поскольку нижние индексы у коэффициентов μ разные, порядок их записи имеет определенный смысл.

Например, при вычислении касательного напряжения σ_{yx}^+ используются два коэффициента: μ_{yx}^{+x} и μ_{xy}^{+x} . Первый коэффициент умножается на угол сдвига, определяемый изменением перемещения v (первый индекс) вдоль оси x (второй индекс):

$$\mu_{yx}^{+x} [v(x+h) - v] / hx,$$

вися относительно к узлу элементы связи, расположенные в направлении координатных осей, а элементы, расположенные в противоположном направлении, — к соседним узлам в соответствующем направлении. Таким образом, каждому узлу будут принадлежать девять элементов связи для определения коэффициентов Ламе, имеющих верхний индекс с плюсом (рис. 3.23) и предназначенных для вычисления нормальных напряжений.

Касательные напряжения выражаются через деформации сдвига, а величина каждой деформации определяется с помощью двух углов поворота граней элементов. Следовательно, для определения коэффициентов Ламе при вычислении каждого значения касательного напряжения потребуется два элемента связи. Всего по

а второй умножается на угол, определяемый изменением перемещения u (первый индекс) вдоль направления y (второй индекс):

$$\mu_{xy}^{+x} [u(y+h) + u(x+h, y+h) - u(y-h) - u(x+h, y-h)]/4h_y.$$

Оба эти угла вычисляются для центра передней грани элемента массы, поэтому верхние индексы у них одинаковые: $+x$.

Среди элементов связей, изображенных на рис. 3.24, имеются одинаковые, однако способы вычисления средних значений коэффициентов упругости для этих элементов могут быть и разные, в зависимости от расположения границ между различными материалами, входящими в каждый элемент.

3.10. Осреднение механических характеристик

Теперь задача состоит в том, чтобы заменить неоднородные элементы модели однородными, обладающими в среднем теми же механическими характеристиками, что и неоднородные. Начнем с осреднения плотности ρ . Для вычисления среднего значения плотности необходимо сложить массы частей элемента массы и разделить на объем элемента:

$$\bar{\rho} = \sum_i m_i / h_x h_y h_z.$$

Масса каждой части элемента m_i равна произведению плотности на объем этой части ($m_i = \rho_i V_i$), поэтому выражение для средней плотности можно записать в виде

$$\bar{\rho} = \sum_i \frac{V_i}{h_x h_y h_z} \rho_i.$$

Множитель $V_i / (h_x h_y h_z)$ определяет относительный объем части элемента, который можно обозначить через α_i , тогда выражение для среднего значения плотности примет более компактный вид

$$\bar{\rho} = \sum_i \alpha_i \rho_i.$$

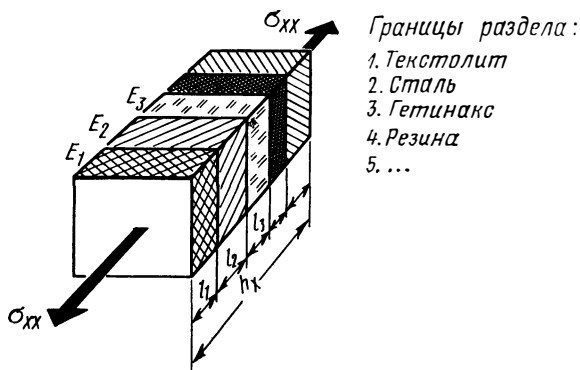


Рис. 3.25.

Вычисление средних значений коэффициентов упругости несколько сложнее, чем вычисление средней плотности. Средние коэффициенты упругости зависят от расположения границ раздела между различными материалами в элементе связи и от напряжения и вида деформации.

Начнем наш анализ с наиболее простого случая, когда в элементе связи границы раздела между материалами проходят параллельно граням элемента (рис. 3.25). Приложим к двум противоположным граням растягивающие напряжения σ_{xx} . В этом случае можно считать, что растягивающие напряжения в любом сечении, параллельном передней и задней граням, одинаковы. Зная эти напряжения, можно вычислить деформации каждой части элемента.

Поскольку по остальным граням элемента никаких напряжений не приложено, относительное удлинение каждой части будет пропорционально растягивающему напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга:

$$\epsilon_{xxi} = \sigma_{xx} / E_i. \quad (3.17)$$

Абсолютное удлинение каждой части будет пропорционально ее длине: $\Delta l_i = \epsilon_{xxi} l_i$. Складывая абсолютные удлинения частей, получают абсолютное удлинение всего элемента связи:

$$\Delta l = \sum_i \Delta l_i = \sigma_{xx} \sum_i \frac{l_i}{E_i}. \quad (3.18)$$

Относительное удлинение всего элемента, или величина деформации растяжения, будет равна:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{h_x} = \sigma_{xx} \sum_i \frac{l_i}{h_x E_i}. \quad (3.19)$$

Для однородного элемента связь между деформациями растяжения и нормальными напряжениями определяется законом Гука (3.17). Сравнивая выражения (3.17) и (3.19), замечаем, что неоднородный элемент в среднем будет растягиваться так же, как и однородный, если среднее значение модуля Юнга вычислить по формуле

$$\frac{1}{\bar{E}} = \sum_i \frac{l_i}{h_x E_i}. \quad (3.20)$$

Если обозначить относительную длину каждой части через β_i , то формула для среднего значения модуля Юнга примет вид

$$\frac{1}{\bar{E}} = \sum_i \beta_i / E_i. \quad (3.21)$$

Мы рассмотрели случай, когда направление нормалей к плоскостям раздела между разными материалами и направление нормальных напряжений совпадают. Теперь рассмотрим случай, когда нормальные напряжения лежат в плоскости раздела (рис. 3.26) к различным частям элемента приложим различные напряжения, чтобы деформации растяжения частей были одинаковыми. Напряжение, приложенное к каждой части, определяется деформацией растяжения

$$\sigma_{yui} = \epsilon_{yy} E_i. \quad (3.22)$$

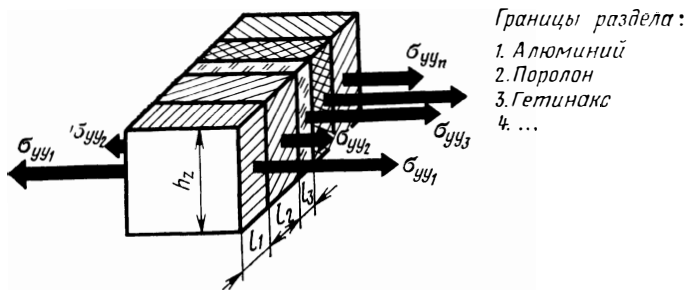


Рис. 3.26.

Вычислим среднее значение напряжений, действующих по правой и левой граням элемента связи. Для этого вначале найдем равнодействующие напряжений, приложенных к каждой части:

$$F_i = \sigma_{yy} l_i h_z.$$

Затем сумму этих равнодействующих разделим на площадь грани:

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{\sum_i F_i}{h_z h_x} = \epsilon_{yy} \sum_i \frac{E_i l_i}{h_x}. \quad (3.23)$$

Сравнивая (3.23) с (3.22) для однородного элемента, получаем для осредненного значения модуля Юнга

$$\bar{E} = \sum_i \beta_i E_i. \quad (3.24)$$

Мы нашли две основные формулы для вычисления средних значений модуля Юнга при растяжении (сжатии) в направлении нормали к границам раздела (3.21) и в направлении, параллельном границам (3.24). В первом случае среднее значение модуля Юнга будет определяться в основном материалом, у которого модуль Юнга наименьший. Например, если одна из областей представляет собой воздушную прослойку между упругими телами и модуль Юнга ее можно принять равным нулю, то среднее значение модуля Юнга также будет равно нулю. Во втором случае большее влияние на величину среднего значения модуля Юнга оказывает материал с наибольшим модулем Юнга. Например, если один из материалов можно считать абсолютно жестким (модуль Юнга равен бесконечности), то и среднее значение модуля Юнга будет равно бесконечности.

Далее можно было бы поставить мысленные эксперименты для вычисления средних значений коэффициента Пуассона. Затем вычислить значения деформаций растяжения в случае действия напряжений во всех трех направлениях. Уравнения в этом случае получились бы аналогичными выражениям (3.3):

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{\bar{E}} \sigma_{xx} - \frac{\bar{\nu}_{yx}}{\bar{E}_{yy}} \sigma_{yy} - \frac{\bar{\nu}_{zx}}{\bar{E}_{zz}} \sigma_{zz} \text{ и т. д.} \quad (3.25)$$

Решив три уравнения (3.25) относительно напряжений, мы получили бы средние значения коэффициентов

Ламе, которые нам и нужны при составлении уравнений движения. Однако теперь в системе уравнений (3.25) почти все коэффициенты при напряжениях будут различными, и выражения для коэффициентов Ламе сложными и малоприменимыми для практического пользования.

Можно упростить задачу вычисления средних значений коэффициентов Ламе, если при вычислении коэффициента Пуассона не учитывать направления границ. В реальных материалах, встречающихся в радиоконструкциях, значение коэффициента Пуассона колеблется от 0,3 до 0,4. Это позволяет вычислять среднее значение коэффициента Пуассона так же, как мы вычисляли среднее значение плотности, т. е. учитывать относительный объем, занимаемый каждым материалом:

$$\bar{\nu} = \sum_i \alpha_i \nu_i, \text{ где } \alpha_i \text{ — относительный объем каждого ма-}$$

териала в элементе связи.

Подсчеты показывают, что относительная погрешность от такого упрощения при вычислении коэффициентов Ламе не превышает 10 ... 15% при самом неблагоприятном сочетании модулей Юнга и коэффициентов Пуассона различных материалов. Заметим, что это не погрешность решения самой задачи расчета вибраций, а только погрешность вычисления упругих характеристик отдельных элементов модели. Примерно с такой точностью модуль Юнга и коэффициент Пуассона определяются экспериментально.

После приближенного определения среднего значения коэффициента Пуассона решение системы (3.25) упрощается, и для средних значений коэффициентов Ламе в выражениях нормальных напряжений получаются следующие формулы:

$$\bar{\lambda}_{xx} = \frac{\bar{E}_{xx}\bar{\nu}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})}, \quad \bar{\mu}_{xx} = \frac{\bar{E}_{xx}}{2(1-\bar{\nu})}. \quad (3.26)$$

Средние значения коэффициента μ в формулах касательных напряжений лучше определять, не прибегая к его выражению через E и ν . В этих формулах коэффициент $\mu = G$ является коэффициентом пропорциональности между касательными напряжениями и деформациями сдвига (модуль сдвига). Среднее значение модуля сдвига вычисляется на основании таких же простых

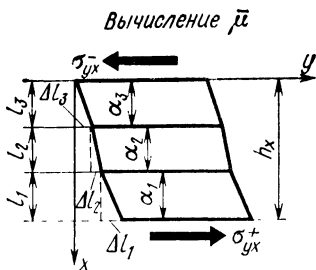


Рис. 3.27.

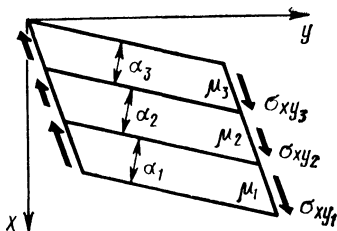


Рис. 3.28.

экспериментов, к каким мы прибегли при определении среднего значения модуля Юнга.

Предположим, что к неоднородному элементу связи приложены касательные напряжения в плоскостях, параллельных границам раздела между материалами (рис. 3.27).

Так как касательные напряжения в любом сечении, параллельном границам, одинаковы, деформации сдвига каждой части элемента можно вычислить по формуле для однородного материала:

$$\epsilon_{yxi} = \sigma_{yx} / \mu_i. \quad (3.27)$$

Сдвиг каждой части вследствие такой деформации пропорционален толщине этой части: $\Delta l_i = \epsilon_{yxi} l_i$. Полный сдвиг будет равен сумме частных сдвигов $l = \sum_i \Delta l_i$,

а полная деформация сдвига — отношению сдвига к толщине элемента:

$$\epsilon_{yx} = \sigma_{yx} \sum_i \frac{l_i}{\mu_i h_x} = \sigma_{yx} \sum_i \beta_i / \mu_i. \quad (3.28)$$

Сравнивая полученное выражение с (3.27), получаем среднее значение модуля сдвига

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \sum_i \frac{\beta_i}{\mu_i}.$$

Если касательные напряжения приложены по нормаль к границам раздела (рис. 3.28), то, чтобы деформации сдвига частей элемента были одинаковыми, касательные напряжения, приложенные к каждой части, должны быть различны:

$$\sigma_{xyi} = \mu_i \epsilon_{xy}.$$

Равнодействующая касательных напряжений, приложенная к каждой части, определяется произведением $F_i = \sigma_{xy} l_i h_z$. Средняя величина касательных напряжений равна отношению суммы равнодействующих к площади грани:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_i F_i}{h_x h_z} = \varepsilon_{xy} \sum_i \beta_i \mu_i,$$

а среднее значение модуля сдвига при вычислении касательных напряжений можно найти по формуле

$$\bar{\mu} = \sum_i \beta_i \mu_i.$$

Теперь мы имеем полный набор формул для вычисления средних значений коэффициентов Ламе для границ раздела, параллельных граням элемента связи. Если границы сложные, полученные формулы можно применять последовательно к частям элемента связи. Пусть элемент связи имеет сложные границы раздела между отдельными материалами (рис. 3.29). Криволинейные поверхности в таком элементе заменяем плоскостями, параллельными граням. Разумеется, используя конечное число плоскостей, можно произвести такую замену только приближенно. Разрежем наш элемент на части так, чтобы в каждой остались границы, параллельные одной грани (рис. 3.30).

С помощью полученных формул осредним механические свойства каждой части, т. е. заменим неоднородные части однородными. Затем сложим части в более крупные куски, но так, чтобы остались границы раздела, параллельные одной грани, и снова проведем осреднение.

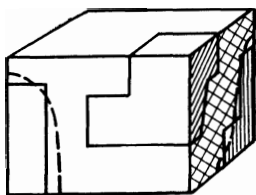


Рис. 3.29.

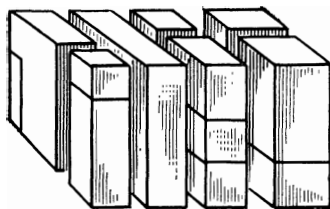


Рис. 3.30.

После повторения этой операции несколько раз получим осредненные характеристики всего элемента связи.

В связи с введением операции осреднения возникает вопрос: а нельзя ли осреднить весь блок и вместо неоднородного блока получить однородный? По-видимому, можно. При расчетах вибраций такого осредненного блока получим средние характеристики движения. Но что будут означать эти характеристики — сказать трудно. Во всяком случае, при каждом осреднении мы допускаем целый ряд погрешностей. Например, при рассмотрении рис. 3.25 и 3.26 не учитывались краевые эффекты. Вследствие этих эффектов границы раздела между материалами будут искривляться.

Вследствие искривления напряжения нельзя считать одинаковыми в каждом сечении. Будет происходить концентрация напряжений в отдельных местах. Начинает сказываться взаимодействие с соседними элементами. Ничего этого мы не учитывали и допускали появление погрешностей. Чем меньше размеры элементов связей, тем меньше и погрешности. Поэтому размеры приходится выбирать минимально допустимыми исходя из возможностей современных вычислительных машин. И следует заметить, что точность расчета неоднородных областей получается значительно менее высокой, чем однородных. Но ничего более подходящего для расчета вибраций неоднородных блоков РЭА еще пока не придумали.

3.11. Потери энергии на внутреннее трение

До сих пор мы рассматривали только одну сторону процессов деформирования упругих тел, а именно упругие деформации. Но процесс деформирования всегда сопровождается потерями энергии на внутреннее трение в материалах конструкции. Это другая сторона процессов деформирования. В металлических материалах эти потери невелики, и в большинстве случаев их можно не учитывать. Но при рассмотрении моделей неоднородных блоков РЭА приходится вводить эти потери в модель. Ведь многие материалы, и в первую очередь наполнитель, вводятся в блок специально для гашения вибраций и имеют большие потери на внутреннее трение.

При учете в модели потерь возникает целый ряд теоретических и практических трудностей. Теоретические

трудности определяются недостаточной изученностью природы этих потерь и отсутствием хороших моделей. Практические трудности возникают при экспериментальном определении характеристик потерь.

При выборе модели учета потерь, а таких моделей существует достаточно много, нужно прежде всего руководствоваться ее применимостью в расчетах вибраций конструкций.

В этом отношении, по-видимому, наиболее подходящей является модель, в которой потери учитываются в виде вязкости.

Что такое вязкость твердого материала?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что такое вязкость жидких материалов. Динамической вязкостью называется свойство жидкостей или газов, характеризующее их сопротивляемость скольжению или сдвигу. В простейшем случае, когда все слои жидкости движутся параллельно друг другу, сила сопротивления движению, приходящаяся на единицу площади в плоскости слоя, равна коэффициенту вязкости η , умноженному на градиент скорости в перпендикулярном направлении. Таким образом, за единицу измерения динамической вязкости принимается вязкость потока жидкости, в которой линейная скорость под действием давления сдвига в 1 Па имеет градиент 1 м/с на метр расстояния, перпендикулярного к плоскости сдвига. В более сложном случае движения жидкости, когда скорости частиц в разных точках объема не параллельны друг другу, силы сопротивления движению будут иметь различное направление. Если выделить в жидкости произвольно ориентированную площадку, то силы сопротивления можно разложить на нормальные и касательные к ней. Отнесенные к единице площади, эти силы называют нормальными и касательными напряжениями в жидкости. В соответствии с законом Стокса нормальные и касательные напряжения пропорциональны первым производным от деформаций по времени. Коэффициентами пропорциональности служат два коэффициента динамической вязкости η и ξ .

Ту же модель можно применить для учета потерь энергии на внутреннее трение в твердых телах.

Такое представление потерь удобно уже тем, что в уравнения равновесия (3.6) входят напряжения упругости, и не представляет труда параллельно с каждым

таким напряжением поставить напряжения потерь (рис. 3.31):

$$\frac{\sigma_{xx}^+ - \sigma_{xx}^-}{h_x} + \frac{\sigma_{\eta xx}^+ - \sigma_{\eta xx}^-}{h_x} + \frac{\sigma_{xy}^+ - \sigma_{xy}^-}{h_y} + \frac{\sigma_{\eta xy}^+ - \sigma_{\eta xy}^-}{h_y} +$$

$$+ \frac{\sigma_{\eta xz}^+ - \sigma_{\eta xz}^-}{h_z} + \frac{\sigma_{\eta zy}^+ - \sigma_{\eta zy}^-}{h_z} = \rho a_x.$$

Выразим напряжения потерь через скорости деформаций, используя для коэффициентов вязкости в твердом теле обозначения ξ и η , применяемые в гидродинамике для той же цели. Если нормальные упругие напряжения и деформации растяжения (3.5) связаны с помощью двух коэффициентов пропорциональности, то и нормальные напряжения потерь должны выражаться через скорости деформаций с помощью двух коэффициентов:

$$\sigma_{\eta xx}^+ = (\xi + 2\eta) \dot{\varepsilon}_{xx}^{+x} + \xi \dot{\varepsilon}_{yy}^{+x} + \xi \dot{\varepsilon}_{zz}^{+x},$$

где $\dot{\varepsilon}$ — скорости изменения деформаций во времени.

Сразу же заметим, что экспериментальное определение коэффициентов вязкости чрезвычайно сложно: их можно измерить только в динамике, т. е. во время движения. К тому же напряжения потерь неотделимы от упругих напряжений и последние, как правило, гораздо больше по величине. Поэтому коэффициенты вязкости твердых тел измеряют косвенно, по затуханию колебаний или по выделяемому во время колебаний теплу. При этом

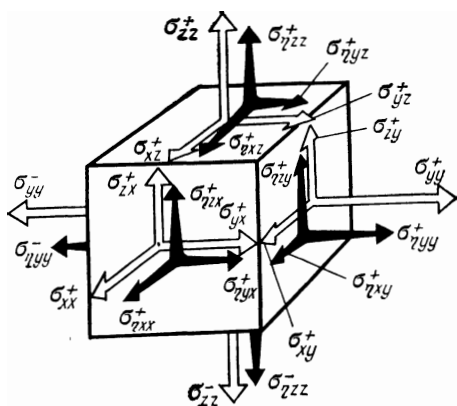


Рис. 3.31.

стараятся избавиться от одного из двух коэффициентов вязкости, строя гипотезы относительно величины и взаимосвязи потерь при различных видах деформаций.

Мы также избавимся от одного из коэффициентов. Для этого будем считать, что отношение между коэффициентами вязкости будет таким же, как между коэффициентами упругости:

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{1}{(1/2\nu) - 1}. \quad (3.29)$$

Трудно доказать, что такое соотношение на самом деле имеет место в твердых телах, но, во всяком случае, следование этой гипотезе приводит к более точным результатам, чем отбрасывание одного из коэффициентов вязкости. Для нас же соотношение удобно тем, что позволяет рационально строить расчетную схему.

Вначале выразим первую производную от деформаций по времени в виде конечной разности по времени. Ранее мы указывали, что для повышения порядка аппроксимации первые производные в дифференциальных уравнениях следует заменять центральными разностями. Теперь нам сознательно придется понизить порядок аппроксимации уравнений движения, взяв в качестве первой разности «разность назад».

Если в качестве разности от деформаций по времени взять «центральную разность»

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx}(t + \tau) - \varepsilon_{xx}(t - \tau)}{2\tau}, \quad (3.30)$$

то, поскольку деформации выражаются через перемещения данного и соседних узлов сетки, в уравнениях появятся несколько членов с перемещениями на верхнем временном слое $(t + \tau)$. Построить явную схему для расчетов по таким формулам нам не удастся. Если пойти по пути решения задачи с помощью неявной схемы (о неявных схемах говорится в конце главы), то можно оставить при вычислении разности от деформаций и центральную разность. Но если использовать явную схему, то мы должны вычислять скорость деформаций как «разность назад».

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}(t - \tau)}{\tau}. \quad (3.31)$$

Теперь сгруппируем попарно упругие и вязкие напряжения, например:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^+ + \sigma_{\eta xx}^+ &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx}^{+x} + \lambda \varepsilon_{yy}^{+x} + \lambda \varepsilon_{zz}^{+x} + \frac{\xi + 2\eta}{\tau} [\varepsilon_{xx}^{+x} - \\ &- \varepsilon_{xx}^{+x} (t - \tau)] + \frac{\eta}{\tau} [\varepsilon_{yy}^{+x} - \varepsilon_{yy}^{+x} (t - \tau) + \varepsilon_{zz}^{+x} - \\ &- \varepsilon_{zz}^{+x} (t - \tau)] = (\lambda + 2\mu + \xi + 2\eta) \varepsilon_{xx}^{+x} + \\ &+ (\lambda + \eta) (\varepsilon_{yy}^{+x} + \varepsilon_{zz}^{+x}) - \frac{\xi + 2\eta}{\tau} \varepsilon_{xx}^{+x} (t - \tau) - \\ &- \frac{\eta}{\tau} \varepsilon_{yy}^{+x} (t - \tau) - \frac{\eta}{\tau} \varepsilon_{zz}^{+x} (t - \tau). \end{aligned}$$

Если теперь ввести обозначение для отношения коэффициентов упругости к коэффициентам вязкости A_η , то в силу равенства (3.30) этот коэффициент будет универсальным:

$$\frac{\xi}{\lambda} = A_\eta \tau, \quad \frac{\eta}{\mu} = A_\eta \tau, \quad \frac{\xi + 2\eta}{\lambda + 2\mu} = A_\eta \tau$$

и можно исключить прежние коэффициенты потерь ξ и η и оставить один коэффициент A_η . Тогда сумма упругих и вязких напряжений переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^+ + \sigma_{\eta xx}^+ &= (1 + A_\eta) [(\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx}^{+x} + \lambda \varepsilon_{yy}^{+x} + \lambda \varepsilon_{zz}^{+x}] - \\ &- A_\eta [(\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx}^{+x} (t - \tau) + \lambda \varepsilon_{yy}^{+x} (t - \tau) + \lambda \varepsilon_{zz}^{+x} (t - \tau)] = \\ &= (1 + A_\eta) \sigma_{xx}^+ - A_\eta \sigma_{xx}^+ (t - \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью нового коэффициента удалось выразить сумму упругих и вязких напряжений через одни упругие напряжения, вычисленные в два последующих момента времени $(t - \tau)$ и t . Прделав ту же операцию со всеми напряжениями в выражениях (3.6), можно получить уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} (1 + A_\eta) U - A_\eta U (t - \tau) &= \rho a_x, \\ (1 + A_\eta) V + A_\eta V (t - \tau) &= \rho a_y, \\ (1 + A_\eta) W - A_\eta W (t - \tau) &= \rho a_z, \end{aligned}$$

где большими буквами U , V и W обозначены выражения, соответствующие левым частям уравнений равновесия (3.6), вычисленные в два момента времени.

Величины U , V и W при расчетах по формулам, где вязкость не учитывается, вычисляются в каждом шаге по времени, поэтому при расчетах по формулам с учетом вязкости их не надо вычислять два раза. Доста-

точно запомнить выражение, получившееся в предыдущем шаге вычислений, и использовать его в последующем шаге.

Теперь можно записать уравнения (3.13), для которых мы будем составлять программы вычислений с тем, чтобы в этих уравнениях учитывалась вязкость. Введем обозначения, удобные для программирования на языке ФОРТРАН:

$$D1 = \frac{\tau^2}{\rho} U(t - \tau), \quad D2 = \frac{\tau^2}{\rho} V(t - \tau),$$

$$D3 = \frac{\tau^2}{\rho} W(t - \tau), \quad D4 = \frac{\tau^2}{\rho} U,$$

$$D5 = \frac{\tau^2}{\rho} V, \quad D6 = \frac{\tau^2}{\rho} W,$$

$$A1 = 1 + A_\eta, \quad A2 = A_\eta.$$

Уравнение (3.13) запишется в виде

$$U3 = A1 * D4 - A2 * D1 + 2 * U2 - U1,$$

$$V3 = A1 * D5 - A2 * D2 + 2 * V2 - V1,$$

$$W3 = A1 * D6 - A2 * D3 + 2 * W2 - W1,$$

где

$$D4 = QXX1 - QXX2 + QXY1 - QXY2 + QXZ1 - QXZ2,$$

$$D5 = QYY1 - QYY2 + QYZ1 - QYZ2 + QYX1 - QYX2,$$

$$D6 = QZZ1 - QZZ2 + QZX1 - QZX2 + QZY1 - QZY2.$$

Теперь расскажем о том, как определить числовое значение коэффициента A_η . В выражение этого коэффициента $A_\eta = \eta/\mu\tau$ входит коэффициент динамической вязкости твердого материала η . В справочной литературе числовых значений η не встречается, но можно выразить η через логарифмический декремент затухания γ , который можно получить экспериментально, а его значения для разных материалов можно найти в справочниках.

Выражение η через γ получается при точном решении простых уравнений: колебание струны, продольные колебания стержня или пластины. Можно, например, воспользоваться решением задач о колебаниях стержня и пластины, приведенными в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория упругости», где приводится выражение для коэффициента затухания колебаний β . Эти выражения довольно громоздки, но если перейти к нашим обозначениям, учесть гипотезу (3.29) и то, что коэффициент вязкости ξ равен $\xi + 2/3\eta$, то выражения для β чрезвычайно упрощаются и получаются в задачах для стержня и пластины одинаковыми: $\beta = \omega^2 \eta / 2\mu$. Учитывая, что $\gamma = 2\ln\beta/\omega$, легко получить выражения для нашего коэффициента

вязкости $\eta = \gamma \mu / \rho \omega$. Учитывая, что частота колебаний ω , как правило, заранее известна, вычислить коэффициент вязкости не представляет труда.

3.12. Подготовка исходных данных

Подготовка задачи для решения ее на ЦВМ состоит из двух частей: подготовки исходных данных и программирования.

На вопросах программирования задач при цифровом моделировании механических и тепловых процессов в радиоконструкциях мы останавливаться не будем. Ограничимся только записью формул на алгоритмическом языке ФОРТРАН, поскольку эта запись мало чем отличается от записи обычных алгебраических выражений в принятой нами системе обозначений.

Если при постановке задач на ЦВМ программирование может быть поручено специалистам по программированию, то подготовка исходных данных задачи должна быть выполнена самим конструктором. К таким исходным данным относятся в первую очередь коэффициенты, которые используются в уравнениях движения.

В случае неоднородного блока таких коэффициентов получается довольно много. К каждому элементу массы мы отнесли 9 элементов связей для вычисления нормальных напряжений и 12 для вычисления касательных напряжений. Для каждого элемента связи вычисляется свой коэффициент. Один коэффициент должен учитывать среднее значение плотности, а другой (A_{η}) — отношение сил вязкости к силам упругости. Таким образом, для каждого элемента массы нужно вычислить 23 коэффициента. Если в модели 1000 узлов, то получается 23 000 коэффициентов.

Вычисление коэффициентов вручную занимает много времени. У опытного расчетчика такая работа отнимет около месяца. А поскольку эта работа однообразна и утомительна, то нужно еще примерно столько же времени, чтобы обнаружить сделанные им ошибки. Поэтому при подготовке задачи представляет интерес машинное вычисление коэффициентов. Основные идеи составления программы для такой операции состоят в следующем:

- 1) Задаются размерами блока, что особенно просто, если он имеет прямоугольную форму.

2) Задают шаги сетки в направлении всех трех координат.

3) Составляют таблицу всех однородных областей. Границы областей можно задать в виде коэффициентов в уравнениях наружных поверхностей области. В радио-конструкциях, как правило, можно выделить два типа областей: прямоугольные параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям, и цилиндры, ориентированные по направлению одной из координатных осей. В таблицу заносят для каждой области значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона, плотности и отношение A_{η} , наполнитель в таблице не указывают.

4) В процессе расчета коэффициентов для каждого узла вначале вычисляют его координаты.

5) Проверкой всех областей устанавливают принадлежность узла к одной из областей. Если узел не попадает ни в одну из областей таблицы, значит, он относится к области наполнителя.

6) Проверяют наличие границ раздела между материалами на расстоянии шага от узла. По этим расстояниям вычисляют относительные объемы α_i и относительные длины β_i .

7) По формулам для осредненных значений характеристик вычисляют средние значения коэффициентов.

Алгоритмизация и программирование такой задачи затруднительное дело, но зато однажды составленная программа может служить для вычисления коэффициентов при расчетах любых блоков.

Другая трудность состоит в том, что для хранения всех коэффициентов потребуется довольно большой объем оперативной памяти. А как мы указывали выше, применение внешних запоминающих устройств резко увеличивает время вычислений. Поэтому представляет большой интерес при расчетах неоднородных блоков различное упрощение модели.

3.13. Упрощение задачи

Упрощение задачи всегда основывается на особенностях конструкций, поэтому в каждом конкретном случае нужно искать такие особенности.

Мы остановимся на упрощенных, которые можно ввести в модель двух типов монолитных блоков, встречающихся в практике конструирования радиоаппаратуры.

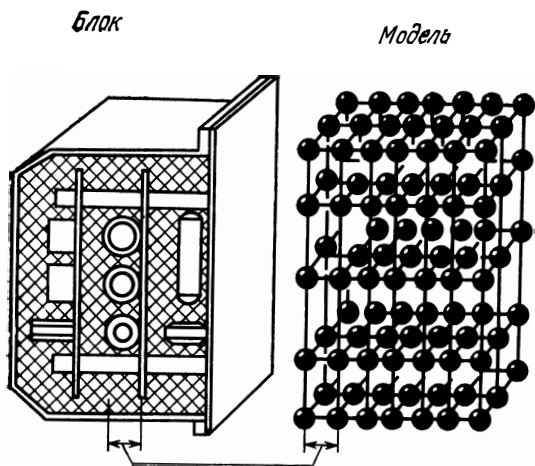


Рис. 3.32.

К первому типу относятся блоки, где механическую нагрузку несут в основном платы с радиоэлементами, и платы располагаются в виде «слоеного пирога» (рис. 3.32). Если при построении модели такой конструкции расположить узлы сетки с тем же периодом, что и расстояние между платами, или взять расстояние между узлами в два раза меньшим, то число различных типов элементов связи резко сокращается. Их можно разбить на несколько групп и соответственно вычислить несколько групп коэффициентов. При составлении программы для каждого узла нужно будет только указать признак, по которому следует выбирать коэффициенты.

Часто встречаются также конструкции блоков, где механическую нагрузку несет сам наполнитель. Если наполнителем служит компаунд, и его механические свойства мало отличаются от механических свойств плат. Такой блок в первом приближении является однородным, и все коэффициенты упругости и потерь на внутреннее трение можно считать одинаковыми. Исключение составляет осредненное значение плотности. Плотность металлических деталей, являющихся частью радиоэлементов, можно учесть в расчете введением одного для каждого узла коэффициента.

Можно использовать для упрощения модели идеи построения двумерных моделей для расчета плоских и коробчатых деталей, которые излагаются ниже.

3.14. Модели плоских и коробчатых конструкций

Мы уже встречались со случаем областей прямоугольной формы (см. гл. 2), когда один из размеров области значительно меньше двух других. К таким областям относились тепловые экраны, кожуха и другие детали. Для них мы строили двумерные модели-сетки и исключали из расчетных соотношений одну из координат.

При расчетах процессов вибраций плоские и коробчатые детали играют особую роль. Поперечные или изгибные колебания таких деталей в радиоконструкциях наиболее опасны, поскольку амплитуда колебаний у них, как правило, значительно больше, чем в монолитных блоках. Радиоэлементы, смонтированные непосредственно на плоских деталях, например платах или шасси, воспринимают полностью эти колебания.

При построении моделей для расчетов процессов теплопроводности в пластинах исключение одной координаты производилось на основе предположения, что температура по толщине пластины изменяется по линейному закону. Такое допущение можно использовать и при построении моделей для расчетов вибраций.

3.15. Гипотеза прямых нормалей

Эта гипотеза говорит о том, что все прямые, нормальные к срединной плоскости пластины до деформирования остаются прямыми и нормальными к ней после деформирования. Сама срединная поверхность искривляется, но не испытывает растяжения. Гипотеза прямых нормалей позволяет построить для пластин двумерные модели, в которых узлы располагаются в одной плоскости. Кроме того, в расчетных соотношениях для пластин остается одна переменная — перемещение в направлении нормали к пластине (прогиб), что значительно упрощает расчет.

3.16. Уравнение изгибных колебаний

Для составления уравнения движения пластины разобьем ее на элементы прямоугольной формы. Рассмотрим случай регулярной сетки, когда все элементы име-

ют одинаковые размеры. Эти элементы можно назвать элементами массы (рис. 3.33). По боковым граням элемента массы со стороны соседних элементов действуют нормальные и касательные напряжения. Нам неизвестен закон распределения этих напряжений по плоскости грани, но мы можем суммарное действие каждого вида напряжений заменить равнодействующей силой.

Нам потребуется одно уравнение движения, которое получается, если спроектировать равнодействующие на направление вертикальной оси z .

Отличными от нуля получаются только проекции на вертикаль равнодействующих касательных напряжений σ_{zx}^+ , σ_{zx}^- , σ_{zy}^+ , σ_{zy}^- . Обозначим эти проекции символами $Q(x+h/2)$, $Q(x-h/2)$, $Q(y+h/2)$ и $Q(y-h/2)$ соответственно, тогда уравнение динамического равновесия можно будет записать в виде

$$Q(x+h/2) - Q(x-h/2) + Q(y+h/2) - Q(y-h/2) = ma_z, \quad (3.32)$$

где m — масса элемента.

Равнодействующие, деленные на объем элемента массы, обычно называют перерезывающими силами. Для определения равнодействующих выделим для каждого элемента массы четыре элемента, которые назовем элементами перерезывающих сил (рис. 3.34). Элементы перерезывающих сил смещены относительно элемента массы на половину шага и наложены один на другой.

Рассмотрим отдельно элемент для определения равнодействующей $Q(x+0,5)$ (рис. 3.35), она приложена посередине нового элемента. Но напряжения можно считать внешними по отношению к элементу только в том

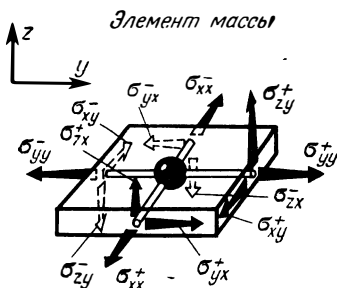


Рис. 3.33.

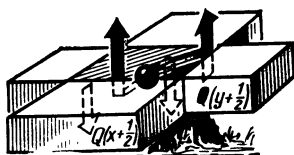


Рис. 3.34.

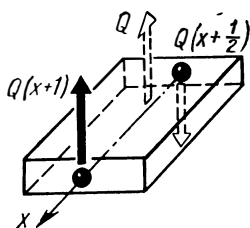


Рис. 3.35.

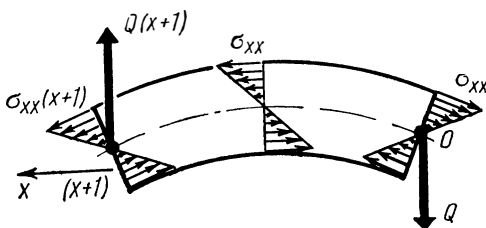


Рис. 3.36.

случае, если отброшена часть области по сечению, где указаны напряжения. Поэтому приложим две новые равнодействующие $Q(x+1)$ и Q по граням нового элемента и будем считать, что равнодействующая $Q(x+0,5)$ равна среднему арифметическому новых равнодействующих:

$$Q(x+0,5) = [Q(x+1) - Q] / 2.$$

Составим уравнение равновесия нового элемента. Поскольку равнодействующие образуют момент сил, то уравновесить их можно только с помощью другого момента или нескольких моментов сил. Такими моментами, приложенными к элементу перерезывающих сил, будут моменты нормальных и касательных напряжений σ_{xx} и σ_{xy} (рис. 3.36). При изгибе пластины вверх верхние слои будут растягиваться, а нижние — сжиматься, поэтому выше срединной поверхности напряжения будут направлены от центра пластины, а ниже — к центру. Таким образом, напряжения будут создавать моменты. Чтобы вычислить величину момента, вначале вычисляют величину нормальных напряжений в зависимости от удаления слоя от срединной поверхности. Для этого нам и послужит гипотеза прямых нормалей.

Запишем новое выражение для нормальных напряжений через деформации растяжения. Прежние выражения (3.5) теперь непригодны, так как из трех деформаций растяжения, входящих в каждое уравнение, можем определить только две, лежащие в плоскости пластины и определяемые с помощью гипотезы прямых нормалей. О деформации в направлении нормали к плоскости пластины мы ничего сказать не можем. Ясней вопрос с напряжениями. Если на пластину не действуют внешние силы, нормальные к поверхности, или такие силы

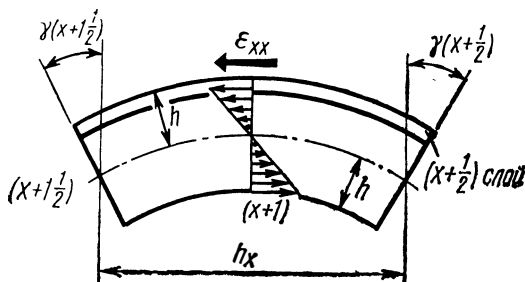


Рис. 3.37.

приложены с одной стороны, то можно считать, что напряжения σ_{zz} по всей толщине отсутствуют. А для двух оставшихся нормальных напряжений можно по аналогии с уравнениями (3.3) записать

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}.$$

Решив эту систему относительно неизвестных напряжений, получим

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}).$$

В полученные выражения, естественно, не входит относительное удлинение в направлении z . Нам нужно только первое из этих уравнений.

Теперь исходя из гипотезы прямых нормалей определим деформации ϵ_{xx} и ϵ_{yy} в нужных сечениях. Эти деформации зависят от удаления слоя, для которого они вычисляются, от поверхности пластины. Возьмем слой, находящийся на самой поверхности (рис. 3.37). Нужно определить деформации ϵ_{xx} в точках x и $(x+1)$. Для этого выделим новые элементы, которые можно назвать элементами изгибающих моментов. Для определения деформаций растяжения нам потребуется восемь таких элементов, из которых четыре совпадут с элементом массы.

Абсолютное удлинение у поверхности нового элемента выражается через углы поворота сечений. Если за положительное направление отсчета углов принять направление против часовой стрелки (см. рис. 3.37), то абсолютное удлинение составит $h[\gamma(x+1,5) - \gamma(x+0,5)]$, а относительное будет в h_x раз меньше:

$$\epsilon_{xx}(x+1) = h[\gamma(x+1,5) - \gamma(x+0,5)]/h_x. \quad (3.33)$$

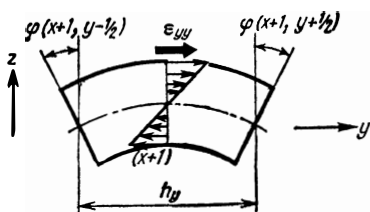


Рис. 3.38.

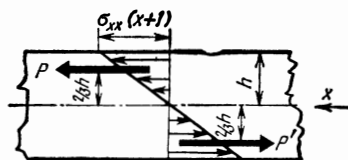


Рис. 3.39.

Теперь нужно определить относительное удлинение в той же точке $(x+1)$, но в направлении нормали к плоскости чертежа (см. рис. 3.37). Для этого рассмотрим изгиб тех же элементов изгибающих моментов в плоскости yOz (рис. 3.38). Относительное удлинение в направлении y будет у поверхности определяться выражением

$$\epsilon_{yy}(x+1) = h[\varphi(x+1, y-0,5) - \varphi(x-1, y+0,5)]/h_y.$$

Подставив полученные значения относительных удлинений в первое выражение для нормальных напряжений, получим

$$\sigma_{xx}(x+1) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\gamma(x+1,5) - \gamma(x+0,5)}{h_x} + \nu \frac{\varphi(x+1, y-0,5) - \varphi(x+1, y+0,5)}{h_y} \right]. \quad (3.34)$$

Относительные удлинения согласно гипотезе прямых нормалей распределены по сечению по линейному закону, поэтому также будут распределены и напряжения σ_{xx} (рис. 3.39). Это позволяет легко рассчитать изгибающий момент в сечении. Заменяем напряжения двумя равнодействующими (для верхнего и нижнего треугольника). Они будут равны площади треугольников, образованных диаграммой напряжений, умноженной на ширину элемента h_y :

$$P = P' = 0,5\sigma_{xx}(x+1)hh_y.$$

Эти равнодействующие будут приложены в центре треугольников, т. е. на расстоянии $2h/3$ от срединной поверхности. Поэтому создаваемый ими момент $M_y(x+1) = -P h/3 = -2h^2 h_y \sigma_{xx}(x+1)/3$.

Подставив сюда значение нормальных напряжений (3.34), получим выражение изгибающего момента через

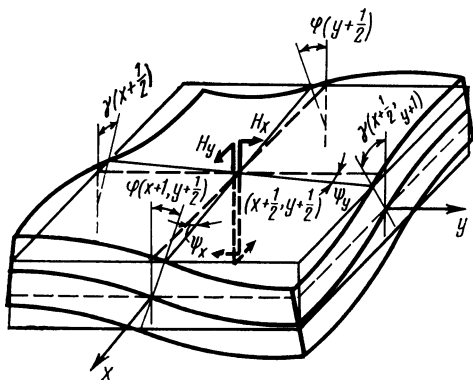


Рис. 3.40.

углы поворота сечений:

$$M_y(x+1) = \frac{2}{3} \frac{Eh^3h_y}{1-\nu^2} \left[\frac{\gamma(x+1,5) - \gamma(x+0,5)}{h_x} - \nu \frac{\varphi(x+1, y-0,5) - \varphi(x+1, y+0,5)}{h_y} \right]. \quad (3.34a)$$

Касательные напряжения возникают на боковых поверхностях элемента перерезывающих сил вследствие закручивания пластины (в виде пропеллера). Они образуют моменты сил, которые называют крутящими. Для их нахождения выделяют четыре элемента (рис. 3.40). С помощью каждого такого элемента определяют два крутящих момента в двух взаимно перпендикулярных вертикальных плоскостях.

Касательные напряжения, действующие по граням с нормальными x и y , определяются одной и той же суммой углов ψ_x и ψ_y . Вблизи поверхности элемента касательные напряжения

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\psi_x + \psi_y).$$

Нормальные напряжения определялись через модуль Юнга и коэффициент Пуассона, поэтому касательные напряжения выражены не через модуль сдвига μ , а через модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Углы ψ_x и ψ_y на поверхности пластины следует определять через углы поворота сечений, например:

$$\begin{aligned} \psi_x &= h [-\varphi(x+1; y+0,5) + \varphi(y+0,5)]/h_x, \\ \psi_y &= h [\gamma(x+0,5; y+1) - \gamma(x+0,5)]/h_y. \end{aligned}$$

Крутящие моменты, создаваемые касательными напряжениями, вычисляются так же, как и изгибающие моменты:

$$H_y(x+0,5; y+0,5) = \frac{2h^2 h_x \sigma_{xy}(x+0,5; y+0,5)}{3} = \frac{Eh^2 h_x}{3(1+\nu)} \times$$

$$\times \left[\frac{\gamma(x+0,5; y+1) - \gamma(x+0,5)}{h_y} - \frac{\varphi(x+1; y+0,5) - \varphi(y+0,5)}{h_x} \right], \quad (3.35)$$

$$H_x(x+0,5; y+0,5) = -2h^2 h_y \sigma_{xx}(x+0,5; y+0,5)/3.$$

Напомним, что моменты считаются положительными, если они вызывают вращение против часовой стрелки, поэтому положительные касательные напряжения σ_{yx} создают отрицательный момент H_x .

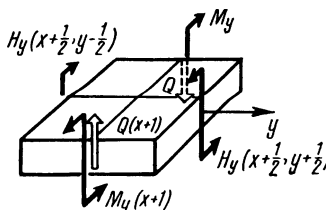


Рис. 3.41.

Теперь, когда определены все изгибающие и крутящие моменты через углы поворота сечений, можно приступить к вычислению перерезывающих сил. Для этого вернемся к равновесию элемента перерезывающих сил (рис. 3.41).

Проектируя моменты на ось y , получаем:

$$[Q(x+1)h_y + Qh_y]/2 = M_y(x+1) - M_y + H_y(x+0,5; y+0,5) - H_y(x+0,5; y-0,5).$$

Учитывая, что перерезывающая сила, приложенная к элементу массы, равна полусумме перерезывающих сил Q и $Q(x+1)$, можно записать

$$Q(x+1) = [M_y(x+1) - M_y + H_y(x+0,5; y+0,5) + H_y(x+0,5; y-0,5)]. \quad (3.36)$$

Теперь остается только выразить углы поворота сечений через перемещения узлов модели-сетки в вертикальном направлении, или, что то же самое, через прогибы пластины. В выражения шести изгибающих моментов входит 24 угла поворота. Для их определения выделяется 24 элемента углов поворота сечений (рис. 3.42).

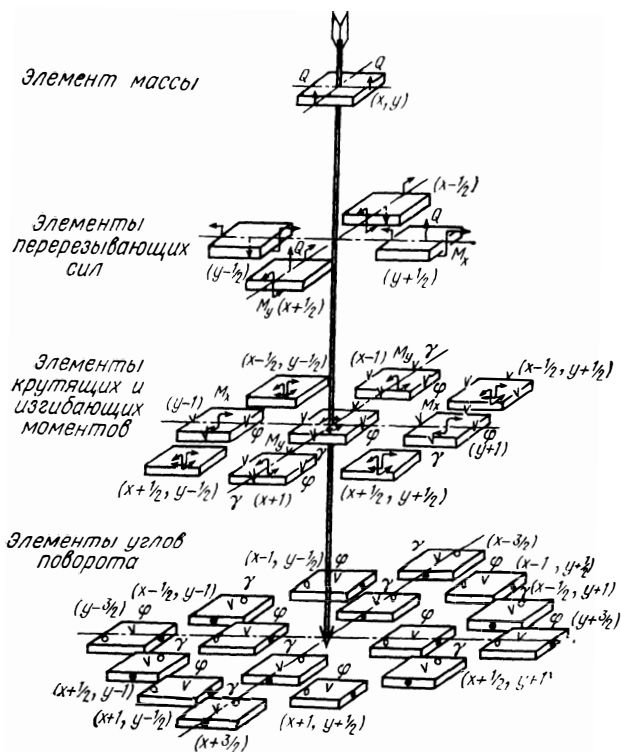


Рис. 3.42.

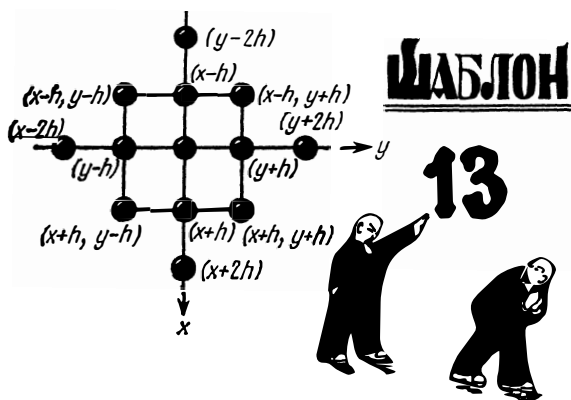


Рис. 3.43.

$\gamma(x-3/2) = \frac{w(x-h) - w(x-2h)}{h_x}$			
$\varphi(x-1, y-1/2) = \frac{w(x-h) - w(x-h, y-h)}{h_y}$		$\varphi(x-1, y+1/2) = \frac{w(x-h, y+h) - w(x-h)}{h_y}$	
$\gamma(x-1/2, y-1) = \frac{w(y-h) - w(x-h, y-h)}{h_x}$	$\gamma(x-1/2) = \frac{w - w(x-h)}{h_x}$	$\gamma(x-1/2, y+1) = \frac{w(y+h) - w(x-h, y+h)}{h_x}$	
$\varphi(y-3/2) = \frac{w(y-h) - w(y-2h)}{h_y}$	$\varphi(y-1/2) = \frac{w - w(y-h)}{h_y}$	$\varphi(y+1/2) = \frac{w(y+h) - w}{h_y}$	$\varphi(y+3/2) = \frac{w(y+2h) - w(y+h)}{h_y}$
$\gamma(x+1/2, y-1) = \frac{w(x+h, y-h) - w(y-h)}{h_x}$	$\gamma(x+1/2) = \frac{w(x+h) - w}{h_x}$	$\gamma(x+1/2, y+1) = \frac{w(x+h, y+h) - w(y+h)}{h_x}$	
$\varphi(x+1, y-1/2) = \frac{w(x+h) - w(x+h, y-h)}{h_y}$		$\varphi(x+1/2, y+1) = \frac{w(x+h, y+h) - w(x+h)}{h_y}$	
$\gamma(x+3/2) = \frac{w(x+2h) - w(x+h)}{h_x}$			

Рис. 3.44.

Некоторые элементы совпадают друг с другом, и останется 16 независимых элементов. Поскольку сечения нормальны к срединной поверхности, то углы поворота выражаются в виде первых разностей от перемещений по соответствующим координатам, например:

$$\gamma(x+1, 5) = - \frac{w(x+2) - w(x+1)}{h_x}.$$

Для определения всех необходимых нам углов поворота потребуется 13 узлов модели-сетки (рис. 3.43). Такое сочетание узлов для расчета пластин называют 13-точечным шаблоном. Полный набор необходимых углов показан на рис. 3.44.

Подставив значения углов в выражения (3.34а), получают значения изгибающих моментов (рис. 3.45). Изгибающие моменты выражаются через третьи разности от прогибов по координатам.

Если подставить значения углов в уравнение (3.34), то получается выражение для крутящих моментов (рис. 3.46). В эти выражения также входят вторые раз-

$M_x(y-1) = \frac{2Eh^3h_x}{3(1-\nu^2)} \times$ $\times \left[\frac{\omega - 2\omega(y-h) + \omega(y-2h)}{h^2y} + \right.$ $\left. + \nu \frac{\omega(x+h, y-h) - 2\omega(-y-h) + \omega(x-h, y-h)}{h^2x} \right]$	$M_y(x-1) = \frac{2Eh^3h_y}{3(1-\nu^2)} \times$ $\times \left[\frac{-\omega + 2\omega(x-h) - \omega(x-2h)}{h^2x} + \right.$ $\left. + \nu \frac{-\omega(x-h, y+h) + 2\omega(x-h) - \omega(x-h, y-h)}{h^2y} \right]$	$M_x(y+1) = \frac{2Eh^3h_x}{3(1-\nu^2)} \times$ $\times \left[\frac{\omega(y+2h) - 2\omega(y+h) + \omega}{h^2y} + \right.$ $\left. + \nu \frac{\omega(x+h, y+h) - 2\omega(y+h) + \omega(x-h, y+h)}{h^2x} \right]$
$M_y = \frac{2Eh^3h_y}{3(1-\nu^2)} \left[\frac{-\omega(x+h) + 2\omega - \omega(x-h)}{h^2x} + \right.$ $\left. + \nu \frac{-\omega(y+h) + 2\omega - \omega(y-h)}{h^2y} \right]$	$M_x = \frac{2Eh^3h_x}{3(1-\nu^2)} \left[\frac{\omega(y+h) - 2\omega + \omega(y-h)}{h^2y} + \right.$ $\left. + \nu \frac{\omega(x+h) - 2\omega + \omega(x-h)}{h^2x} \right]$	
	$M_y(x+1) = \frac{2Eh^3h_y}{3(1-\nu^2)} \times$ $\times \left[\frac{-\omega(x+2h) + 2\omega(x+h) - \omega}{h^2x} + \right.$ $\left. + \nu \frac{-\omega(x+h, y+h) + 2\omega(x+h) - \omega(x+h, y-h)}{h^2y} \right]$	

Рис. 3.45.

$H_y \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2} \right) =$ $= \frac{2Eh^2h_x}{3(1+\nu)} \times$ $\times \frac{-w + w(y-h) + w(x-h)}{h_x h_y}$ $\times \frac{-w(x-h, y-h)}{-h) - w(x-h, y-h)},$ $H_x \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2} \right) = -$ $-\frac{hy}{hx} H_y \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2} \right)$	$H_y \left(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right) =$ $= \frac{2Eh^2h_x}{3(1+\nu)} \times$ $\times \frac{-w(y+h) + w + w(x-h, y+)}{h_x h_y}$ $\times \frac{+h) - w(x-h)}{+h) - w(x-h)},$ $H_x \left(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right) = -$ $-\frac{hy}{hx} H_x \left(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right)$
$H_y \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2} \right) =$ $= \frac{2Eh^2h_x}{3(1+\nu)} \times$ $\times \frac{-w(x+h) + w(x+h, y-h)}{h_x h_y}$ $\times \frac{-h) + w - w(y-h)}{-h) + w - w(y-h)},$ $H_x \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2} \right) = -$ $-\frac{hy}{hx} H_y \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2} \right)$	$H_y \left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right) =$ $= \frac{2Eh^2h_x}{3(1+\nu)} \times$ $\times \frac{-w(x+h, y+h) + w(x+h) +}{h_x h_y}$ $\times \frac{+w(y+h) - w}{+w(y+h) - w}$ $H_x \left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right) = -$ $-\frac{hy}{hx} H_y \left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right)$

Рис. 3.46.

ности от прогибов по координатам, эти разности называются смешанными.

Подставив значения изгибающих и крутящих моментов в уравнение (3.36) и выполнив алгебраические преобразования, получим формулу для перерезывающих сил. Они выражаются через третьи разности от прогибов по координатам (рис. 3.47).

Заметим, что в выражения моментов входят шаги сетки h_x и h_y . При устремлении шагов к нулю моменты также обращаются в нуль, и это понятно, так как они пропорциональны площади боковых граней элементов. Чтобы этого не происходило, при решении дифференциальных уравнений вычисляют не сам момент, а его величину, деленную на шаг сетки, т. е. приходящуюся на

$$Q_x \left(x - \frac{1}{2} \right) = Dh_x h_y \times$$

$$\times \left[\frac{-w(x+h) + 3w - 3w(x-h) + w(x-2h)}{h^2_x} + \right.$$

$$\left. + \frac{-w(y+h) + 2w - w(y-h)}{h_x h^2_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{w(x-h, y+h) - 2w(x-h) + w(x-h, y-h)}{h_x h^2_y} \right]$$

$$Q_y \left(y - \frac{1}{2} \right) = Dh_x h_y \times$$

$$\times \left[\frac{-w(y+h) + 3w - 3w(y-h) + w(y-2h)}{h^2_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{-w(x+h) + 2w - w(x-h)}{h^2_x h_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{w(x+h, y-h) - 2w(y-h) + w(x-h, y-h)}{h^2_x h_y} \right]$$

$$Q_y \left(y + \frac{1}{2} \right) = Dh_x h_y \times$$

$$\times \left[\frac{-w(y+2h) + 3w(y+h) - 3w + w(y-h)}{h^2_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{-w(x+h, y+h) + 2w - w(x-h, y+h)}{h^2_x h_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{w(x-h) - 2w + w(x-h)}{h^2_x h_y} \right]$$

$$Q_x \left(x + \frac{1}{2} \right) = Dh_x h_y \times$$

$$\times \left[\frac{-w(x+2h) + 3w(x+h) - 3w + w(x-h)}{h^2_x} + \right.$$

$$\left. + \frac{-w(x+h, y+h) + 2w(x+h) - w(x+h, y-h)}{h_x h^2_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{w(y+h) - 2w + w(y-h)}{h_x h^2_y} \right]$$

Рис. 3.47.

единицу длины грани. Эту величину называют интенсивностью момента.

То же самое происходит и со значением перерезывающей силы. Она пропорциональна площади $h_x h_y$, поэтому вычисляют величину силы, приходящейся на единицу площади, т. е. давление. Подставив теперь значения перерезывающих сил в уравнение равновесия (3.32) и разделив его на площадь $h_x h_y$, получим уравнение изгибных колебаний пластины

$$\begin{aligned}
 -D \left[\frac{w(x+2h) - 4w(x+h) - 6w + 4w(x-h) + w(x-2h)}{h_x^4} + \right. \\
 + 2 \frac{w(x+h, y+h) - 2w(y+h) + w(x-h, y+h)}{h_x^2 h_y^2} - \\
 - 4 \frac{w(x+h) - 2w + w(x-h)}{h_x^2 h_y^2} + \\
 + 2 \frac{w(x+h, y-h) - 2w(y-h) + w(x-h, y-h)}{h_x^2 h_y^2} + \\
 \left. + \frac{w(y+2h) - 4w(y+h) + 6w - 4w(y-h) + w(y-2h)}{h_y^4} \right] = \\
 = \rho a_z, \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

где ρ — поверхностная плотность материала, т. е. масса пластины, приходящаяся на единицу поверхности: $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Запишем для сравнения дифференциальный аналог разностного выражения (3.37):

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3.38)$$

Представив в разностном выражении ускорение a_z в виде второй разности от прогибов по времени и решив уравнение относительно прогиба на верхнем временном слое, получим явное уравнение

$$\begin{aligned}
 w(t+\tau) = & -A[w(x+2h) - 4w(x+h) + 6w - \\
 & - 4w(x-h) + w(x-2h)] - 2B[w(x+h, y+h) - \\
 & - 2w(x+h, y) + w(x-h, y+h) - 2w(x+h) + \\
 & + 4w - 2w(x-h) + w(x+h, y-h) - 2w(y-h) + \\
 & + w(x-h, y-h)] - C[w(y+2h) - 4w(y+h) + \\
 & + 6w - 4w(y-h) + w(y-2h)] + 2w - w(t-\tau), \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

где $A = D\tau^2/\rho h_x^4$, $B = D\tau^2/\rho h_x^2 h_y^2$, $C = D\tau^2/\rho h_y^4$.

Уравнение (3.39) позволяет производить расчет по явной схеме. Для получения явной схемы уравнение

должно быть дополнено начальными и граничными условиями. В начальных условиях должны быть указаны прогибы всех узлов в два начальных момента времени. Задание граничных условий в этом случае довольно сложно, и на нем следует остановиться подробнее.

3.17. Граничные условия

Если при расчете вибрации монолитного блока можно было задавать на поверхности только перемещения или силы (напряжения), то при расчетах колебаний пластин можно задавать четыре вида величин: прогибы, углы поворота сечений, изгибающие и крутящие моменты и перерезывающие силы. Нужно обязательно задавать два вида величин. При этом возможны следующие комбинации: 1) прогиб и угол поворота сечения, 2) прогиб и изгибающий момент, 3) угол поворота сечения и перерезывающая сила, 4) изгибающий момент и перерезывающая сила.

Рассмотрим те случаи задания граничных условий, которые встречаются при расчетах изгибных колебаний плат в конструкциях РЭА.

Заземленный край (рис. 3.48). Плата вставлена в металлический паз без зазора. Если при этом паз неподвижен, то очевидно, что перемещения узлов $(y+h)$, $(x+h, y+h)$ и $(x-h, y+h)$ и угол поворота сечения $\varphi(y+1,5h)$ должны оставаться равными нулю.

Записывать уравнения движения (3.39) для узлов на линии $(y+h)$ не нужно, поскольку прогибы там равны нулю. При составлении уравнений движения узлов на линии y нужно приравнять нулю угол $\varphi(y+1,5h) = [\omega(y+2h) - \omega(y+h)]/h_y$.

Тогда в уравнении (3.39) член в скобках с множителем C будет иметь вид

$$-C [(-3\omega(y+h) + 6\omega + 4\omega(y-h) + \omega(y-2h))].$$

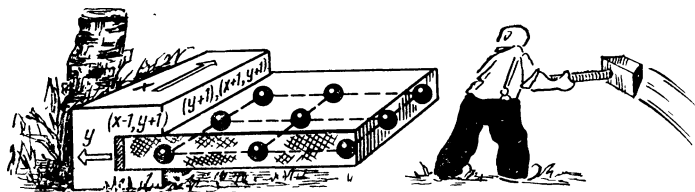


Рис. 3.48.

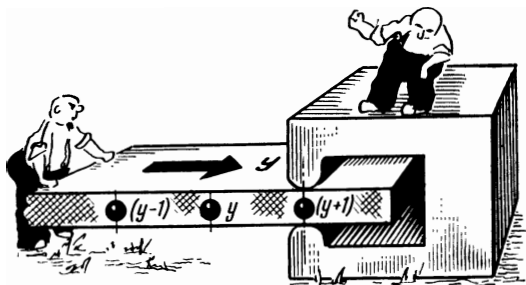


Рис. 3.49.

Таким образом, в узлах вблизи границы решается не все уравнение (3.39), а только часть его, причем в эту часть не входит перемещение законтурного узла $(y + 2h)$, а перемещения граничных узлов $(y + h)$ будут приравняться нулю автоматически, если в ячейки памяти, где хранятся перемещения $w(y + h)$, записывать нули.

Может случиться, что движение защемленного края задано, например, ему передаются колебания в вертикальном направлении. Здесь возможны два случая. Если край платы остается параллельным горизонтальной плоскости и угол $\varphi(y + 1,5)$ сохраняется равным нулю, то его нужно из расчетных соотношений исключить и задавать только перемещения. Если и угол φ изменяется со временем по заданному закону, то в уравнение (3.39) вместо разности $[w(y + 2h) - w(y + h)]/h_y$ нужно подставить заданное значение угла.

Шарнирно-опертый край (рис. 3.49). В сечении $(y + h)$ прогибы и изгибающие моменты $M_x(y + 1)$ равны нулю. При вычислении перемещений узлов, находящихся на линии y , нужно величину момента из уравнения (3.39) исключить. Тогда уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 w(t + \tau) = & -A[w(x + 2h) - 4w(x + h) + 6w - \\
 & - 4w(x - h) + w(x - 2h)] - B(2 - \nu)[w(x + h, \\
 & y + h) - 2w(y + h) + w(x - h, y + h)] - \\
 & - 2B[-2w(x + h) + 4w - 2w(x - h) + w(x + h, \\
 & y - h) - 2w(y - h) + w(x - h, y - h)] - \\
 & - C[-2w(y + h) + 5w - 4w(y - h) + w(y - 2h)] + \\
 & + 2w - w(t - \tau).
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

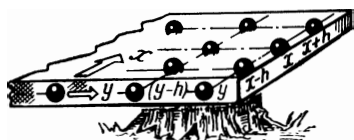


Рис. 3.50.

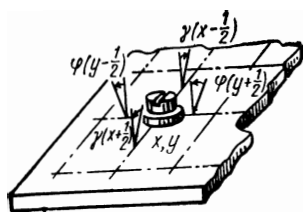


Рис. 3.51.

Может случиться так, что через шарнир задается движение на плату в виде перемещений узлов на линии $(y+h)$. В этом случае соответствующие значения прогибов записываются в ячейки для прогибов граничных узлов. В уравнении (3.40) ничего менять не надо.

Свободный край (рис. 3.50). По сечению на свободном краю пластины не приложены ни нормальные, ни касательные напряжения. Поэтому в сечении должна отсутствовать перерезывающая сила $Q_y(y+0,5)$ и крутящие моменты $H_y(x+0,5, y+0,5)$, $H_y(x-0,5, y+0,5)$. Кроме того, на свободном краю нет растяжения слоев в направлении y , так как края не искривляются, поэтому в уравнениях моментов $M_y(x+1)$, M_y , $M_y(x-1)$ и M_x будут отсутствовать члены

$$\begin{aligned} & \nu[w(x-h, y+h) - 2w(x-h) + \\ & \quad + w(x-h, y-h)]/h^2_y, \\ & \nu[w(y+h) - 2w + w(y-h)]/h^2_y, \\ & \nu[w(x+h, y+h) - 2w(x+h) + w(x+h, y-h)]/h^2_y, \\ & \nu[w(y+h) - 2w + w(y-h)]/h^2_y. \end{aligned}$$

Изгибающий момент M_y действует на два соседних элемента перерезывающих сил, поэтому входящий в него член нужно вычитать из уравнения (3.39) два раза. В результате после исключения указанных членов из уравнения (3.39) получаем уравнения движения узлов, находящихся на линии y :

$$\begin{aligned} w(t+\tau) = & -A[w(x+2h) - 4w(x+h) + 6w - \\ & - 4w(x-h) + w(x-2h)] - B[-(2-\nu)w(x+h) + \\ & + (4-2\nu)w - (2-\nu)w(x-h) + (2-\nu)w(x+h, \\ & y-h) - (4-2\nu)w(y-h) + (2-\nu)w(x-h, y-h)] - \\ & - C[w - 2w(y-h) + w(y-2h)] + 2w - w(t-\tau). \end{aligned}$$

В полученное уравнение не входят отсутствующие узлы на линии $(y+h)$ и $(y+2h)$. Чтобы не ошибиться при выводе уравнений граничных узлов, нужно следить за коэффициентами при прогибах. Алгебраическая сумма всех коэффициентов в каждой квадратной скобке должна быть равна нулю.

В случае свободного края узлы на линии $(y-h)$ также становятся граничными, так как по отношению к ним нет узла $(y+2h)$. В уравнениях для этих узлов нужно исключить в выражении момента $M(y+1)$ член

$$[\omega(y+2h) - 2\omega(y+h) + \omega] / h^2 y,$$

учитывающий растяжение слоев в направлении y .

Закрепление в точке. В радиоконструкциях часто применяют крепление с помощью винтов или болтов. В зависимости от момента затяжки винта, зазоров и конфигурации шайб в одних случаях такое крепление можно считать шарнирным, а в других — жестким. Если крепление рассматривается как шарнирное, т. е. не препятствующее повороту платы, то для расчета прогибов окружающих узлов используются расчетные соотношения (3.39) без изменений, только в ячейку прогиба, где располагается винт, записывается прогиб, равный нулю.

Если крепление считается жестким, то нужно исключить из расчетных соотношений углы поворота сечений вблизи точки крепления. Углы поворота при составлении уравнений (3.39) вычислялись в промежутках между узлами, поэтому нужно будет приравнять нулю четыре соседних угла (рис. 3.51).

3.18. Учет инерции вращения

Недостатком уравнений (3.37) и (3.38) является то, что в них не учитывается инерция вращения элементов и эти уравнения не являются волновыми. Отличие волновых уравнений от неволновых состоит в том, что волновые описывают колебательные процессы, в которых скорость распространения волн не зависит от их длины и частоты. В них порядок разностей или производных по координатам и времени одинаков. Наши уравнения имеют второй порядок по времени и четвертый порядок по координатам. В результате скорость распространения волн в решении получается тем большей, чем короче волны. Если длина волны становится соизмеримой с тол-

щиной пластины, то скорость действительного процесса начинает все более отставать от скорости решений. Например, частоты резонансов в расчетах получаются завышенными, и трудно оценить погрешность такого завышения.

Чтобы устранить этот недостаток, сделаем вывод уравнений движения пластин с учетом инерции вращения элементов. Запишем три уравнения движения: одно уравнение проекций сил на вертикальную ось и два уравнения проекций моментов на горизонтальные оси. В качестве неизвестных возьмем прогиб w и углы поворота сечений φ и γ относительно горизонтальных осей.

При выводе таких уравнений нельзя руководствоваться гипотезой прямых нормалей, поскольку, как мы видели, такая гипотеза оставляет место только одной неизвестной. Введем в эту гипотезу некоторые изменения. Будем считать, что нормали к срединной плоскости, проведенные до деформации, остаются после деформации прямыми, но не обязательно нормальными к срединной поверхности. Это позволяет нормальям поворачиваться в двух перпендикулярных плоскостях и допускает появление двух неизвестных углов поворота. Такое предположение называют гипотезой прямых сечений и используют в технической теории изгиба пластин (теория Тимошенко).

Разобьем, как и прежде, пластину на прямоугольные элементы и будем составлять уравнения движения для каждого элемента. По четырем боковым граням элемен-

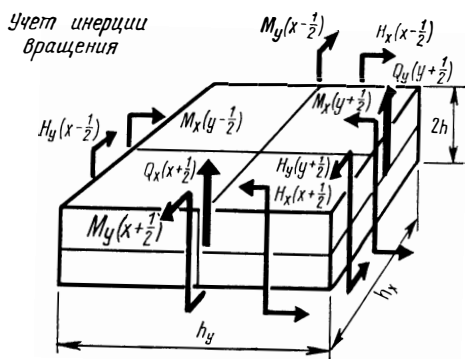


Рис. 3.52.

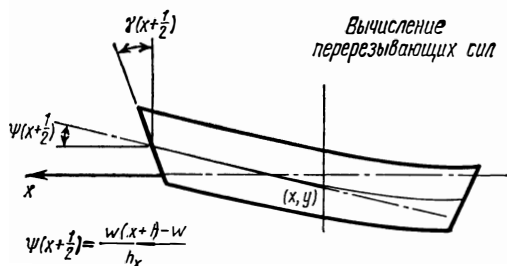


Рис. 3.53.

та будут действовать нормальные и касательные напряжения (рис. 3.52).

Нормальные напряжения σ_{xx} и σ_{yy} создают изгибающие моменты M_y и M_x , касательные напряжения σ_{yx} и σ_{xy} — крутящие моменты H_x и H_y , а касательные напряжения σ_{zx} и σ_{zy} — перерезывающие силы Q . Начнем вычисление с перерезывающих сил (рис. 3.53).

Величина касательных напряжений определяется суммой углов:

$$\sigma_{zx}^+ = \mu [\gamma(x + 0,5) + \psi(x + 0,5)]. \quad (3.41)$$

Угол наклона касательной к срединной поверхности выражается через прогибы в двух соседних узлах: $\psi(x + 0,5) = [w(x + h) - w] / h_x$.

Углы поворота сечений теперь определяются так же, как и прогибы в узлах модели. Поэтому угол $\gamma(x + 0,5)$ выразим как среднеарифметическое между углами в соседних узлах:

$$\gamma(x + 0,5) = [\gamma + \gamma(x + h)] / 2.$$

Подставив значения углов в выражение (3.41) и умножив на площадь сечения грани, получим значение перерезывающей силы

$$Q_x(x + 0,5) = \mu h_y h \left[2 \frac{w(x + h) - w}{h_x} + \gamma + \gamma(x + h) \right]. \quad (3.42)$$

По аналогии можно записать значения перерезывающих сил, действующих по трем остальным граням элемента:

$$Q_x(x - 0,5) = \mu h_y h \left[2 \frac{w - w(x - h)}{h_x} + \gamma(x - h) + \gamma \right],$$

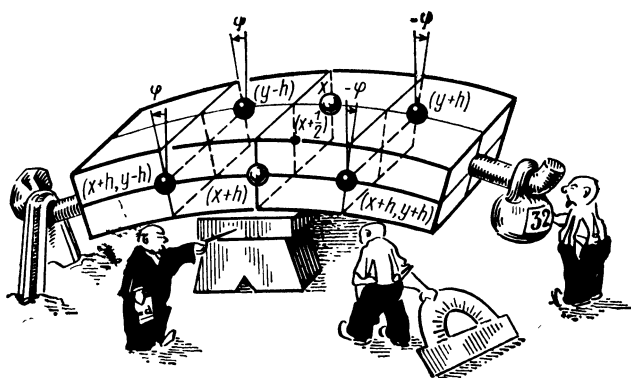


Рис. 3.54.

$$Q_y(y+0,5) = \mu h_x h \left[2 \frac{w(y+h) - w}{h_y} - \varphi - \varphi(y+h) \right],$$

$$Q_y(y-0,5) = \mu h_x h \left[2 \frac{w - w(y-h)}{h_y} - \varphi(y-h) - \varphi \right]. \quad (3.43)$$

В отличие от углов γ увеличение углов φ не увеличивает, а уменьшает величину перерезывающей силы, поэтому эти углы входят в выражения (3.42) с минусом.

Спроектировав все силы Q на ось z и приравняв их силам инерции, получим после деления на объем элемента $h_x h_y 2h$ первое уравнение движения

$$\mu \left[\frac{w(x+h) - 2w + w(x-h)}{h_x^2} + \frac{\gamma(x+h) - \gamma(x-h)}{2h_x} + \frac{w(y+h) - 2w + w(y-h)}{h_y^2} - \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y-h)}{2h_y} \right] =$$

$$= \rho \frac{w(t+\tau) - 2w + w(t-\tau)}{\tau^2}, \quad (3.44)$$

Для вычисления изгибающих моментов найдем значения нормальных напряжений на боковых гранях элемента. В качестве исходных уравнений возьмем следующие:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy}, \quad \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{xx},$$

считая, что деформации растяжения в направлении z в пластине отсутствуют.

Относительное растяжение верхнего слоя пластины в направлении x в точке $(x+0,5)$ можно записать по

аналогии с формулой (3.33): $\epsilon_{xx}(x+0,5) = h[\gamma(x+h) - \gamma]/h_x$.

Относительное растяжение в той же точке в направлении y выражается через углы поворота сечений в четырех узлах (рис. 3.54):

$$\epsilon_{xx}(x+0,5) = -h[\varphi(x+h, y+h) + \varphi(y+h) - \varphi(x+h, y-h) - \varphi(y-h)].$$

Таким образом, изгибающий момент, создаваемый нормальными напряжениями в точке $(x+0,5)$, будет

$$\begin{aligned} M_y(x+0,5) &= \frac{2}{3} h^2 h_y \sigma_{xx}(x+0,5) = \\ &= \frac{2}{3} h^2 h_y \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\gamma(x+h) - \gamma}{h_x} - \lambda \frac{\varphi(x+h, y+h) + \varphi(y+h) - \varphi(x+h, y-h) - \varphi(y-h)}{4h_y} \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

По аналогии можно записать выражение для изгибающего момента в точке $(x-0,5)$. Для этого нужно произвести «сдвиг» уравнения (3.45) на один шаг h_x «назад»:

$$\begin{aligned} M_y(x-0,5) &= \frac{2}{3} \cdot h^2 h_y \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\gamma - \gamma(x-h)}{h_x} - \lambda \frac{\varphi(y+h) + \varphi(x-h, y+h) - \varphi(y-h) - \varphi(x-h, y-h)}{4h_y} \right]. \end{aligned}$$

Для определения крутящих моментов можно воспользоваться рис. 3.40, только следует учесть, что углы ψ_x и ψ_y определяются не в точке $(x+0,5, y+0,5)$, а в точке $(y+0,5)$, поэтому значения углов будут выражаться следующими формулами:

$$\psi_x = h \frac{-\varphi(x+h, y+h) - \varphi(x+h) + \varphi(x-h, y+h) + \varphi(x-h)}{4h_x},$$

$$\psi_y = h \frac{\gamma(y+h) - \gamma}{h_y}.$$

Величина касательных напряжений у поверхности пластины определится суммой этих углов:

$$\sigma_{xy}(y+0,5) = \mu(\psi_x + \psi_y).$$

А крутящий момент в этом сечении будет равен

$$\begin{aligned} H_y(y+0,5) &= \frac{2}{3} h^2 h_x \sigma_{xy}(y+0,5) = \\ &= \frac{2}{3} h^2 h_x \mu \left[\frac{\gamma(y+h) - \gamma}{h_y} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\varphi(x+h, y+h) + \varphi(x+h) - \varphi(x-h, y+h) - \varphi(x-h)}{4h_x} \right]. \quad (3.46)$$

По аналогии записывается значение крутящего момента в сечении $(y=0,5)$. Для этого формула (3.46) «сдвигается» влево на шаг h_y .

Теперь мы имеем все значения моментов относительно оси x и можем составить уравнение моментов. При этом нужно учесть, что перерезывающие силы $Q_x(x+0,5)$ и $Q_x(x-0,5)$ также создают момент относительно оси y , а в правой части уравнения моментов должно стоять произведение момента инерции элемента на угловое ускорение. Момент инерции элемента прямоугольной формы относительно оси симметрии

$$J = \frac{2}{3} \rho h_x h_y h^3 (1 + h_x^2/4h^2).$$

После деления левой и правой частей уравнения на $2h_x h_y h^3/3$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda + 2\mu}{h^2_x} [\gamma(x+h) - 2\gamma + \gamma(x-h)] - \\ & - \frac{\lambda + \mu}{4h_x h_y} [\varphi(x+h, y+h) - \varphi(x+h, y-h) - \\ & - \varphi(x-h, y+h) + \varphi(x-h, y-h)] + \\ & + \frac{\mu}{h^2_y} [\gamma(y+h) - 2\gamma + \\ & + \gamma(y-h)] - \frac{3\mu}{2h^2_x} [\omega(x+h) - \omega(x-h)] - \\ & - \frac{3\mu}{4h^2} [\gamma(x+h) + 2\gamma + \gamma(x-h)] = \\ & = \frac{\rho}{\tau^2} \left(1 + \frac{h_x^2}{4h^2}\right) [\gamma(t+\tau) - 2\gamma + \gamma(t-\tau)]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Третье уравнение движения можно получить из уравнения (3.47) циклической перестановкой $x \leftarrow y \leftarrow x$. При этом γ изменяется на $-\varphi$, φ на $-\gamma$:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda + 2\mu}{h^2_y} [\varphi(y+h) - 2\varphi + \varphi(y-h)] - \frac{\lambda + \mu}{4h_x h_y} [\gamma(x+h, \\ & y+h) - \gamma(x-h, y+h) - \gamma(x+h, y-h) + \\ & + \gamma(x-h, y-h)] + \frac{\mu}{h^2_x} [\varphi(x+h) - 2\varphi + \\ & + \varphi(x-h)] + \frac{3\mu}{2h^2_y} [\omega(y+h) - \omega(y-h)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3\mu}{4h^2} [\varphi(y+h) + 2\varphi + \varphi(y-h)] = \\
 & = \frac{\rho}{\tau^2} \left(1 + \frac{h^2 y}{h^2} \right) [\varphi(t+\tau) - 2\varphi + \varphi(t-\tau)]. \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Для сравнения приведем дифференциальный аналог уравнений движения:

$$\begin{aligned}
 \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - \\
 - 3 \frac{\mu}{h^2} \frac{\partial w}{\partial x} - 3 \frac{\mu}{h^2} \gamma &= \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\
 + 3 \frac{\mu}{h^2} \frac{\partial w}{\partial y} - 3 \frac{\mu}{h^2} \varphi &= \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

Точно такие уравнения получаются, если применяют разложение перемещений в ряд по полиномам Лежандра в уравнениях Ламэ [9]. При этом в разложении в ряд по полиномам сохраняются члены w_0 , u_1 и v_1 . Связь этих членов разложения с нашими переменными: $w_0 = 2w$, $u_1 = 2\gamma h/3$, $v_1 = -2\varphi h/3$.

Уравнения (3.43), (3.47) и (3.48) можно представить в виде явной разностной схемы, если решить их относительно неизвестных $w(t+\tau)$, $\gamma(t+\tau)$ и $\varphi(t+\tau)$ и дополнить полученные соотношения начальными и граничными условиями. В начальных условиях задаются все прогибы и углы поворота в два начальных момента времени. При задании граничных условий нужно руководствоваться теми же правилами, что и при решении уравнения (3.39), однако теперь это делать проще, поскольку прогибы и углы поворота представляются разными величинами.

Например, при защемленном крае в узлах, расположенных на границе, прогиб и соответствующий угол принимаются равными нулю. В случае шарнирно-опертого края равными нулю задаются только перемещения. А в случае свободного края в свободном сечении приравниваются нулю соответствующая перерезывающая сила и изгибающий момент.

3.19. Модель коробки

В радиоаппаратуре часто применяют коробчатые конструкции (шасси, кожуха и т. д.). Поскольку коробки включают в себя несколько пластин, в качестве основных уравнений для расчета перемещений узлов, отстоящих от ребер коробки на шаг и более, используются те же уравнения движения, что и для пластин. Для узлов, расположенных на ребрах (рис. 3.55) нужно составить свои уравнения движения.

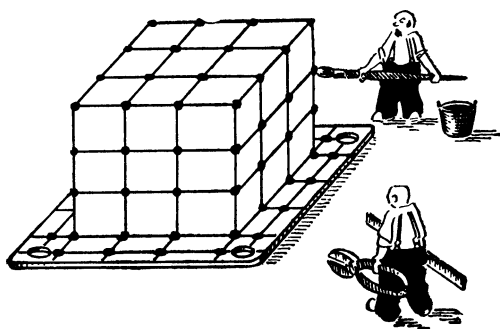


Рис. 3.55.

Сделаем простое предположение о характере деформирования ребер, которое позволит нам для расчета всех узлов коробки использовать уже полученные уравнения. Это предположение состоит в том, что в ребрах пластины не прогибаются, а только поворачиваются относительно линии ребра. При этом прямой угол между двумя соседними пластинами сохраняется. По линии изгиба пластины можно распрямить, т. е. можно сделать развертку коробки (рис. 3.56).

Теперь прогибы во всех узлах модели измеряются в одном направлении — вверх. В узлах по линиям разреза, которых стало вдвое больше, нужно задать прогибы равными нулю. Если используется уравнение

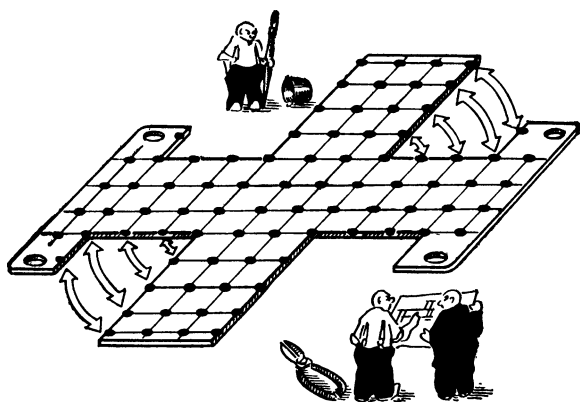


Рис. 3.56.

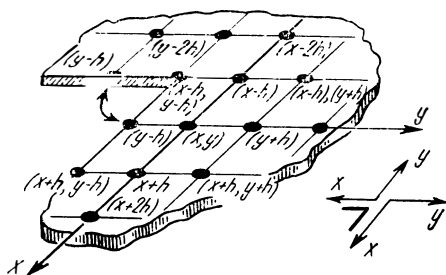


Рис. 3.57.

(3.39), то в этих узлах расчет не производится. При расчете прогибов в соседних узлах нужно учитывать изменение направления координатных осей по линиям разреза (рис. 3.57).

Если используются расчетные формулы (3.44), (3.47) и (3.48), то в узлах на ребрах вычисляются углы поворота φ и γ . При этом вследствие поворота координатных осей за линией разреза следует брать вместо угла φ угол γ и наоборот с соответствующими знаками.

Мы рассмотрели способы построения моделей пластин и коробчатых конструкций в том случае, когда эти конструкции движутся самостоятельно и их движение не связано с другими деталями. При выполнении расчетов вибраций часто приходится такие связи учитывать.

Наиболее часто приходится учитывать массу радиоэлементов, укрепленных на поверхности платы. Если элементы расположены по поверхности равномерно, то можно учесть их массу соответствующим увеличением плотности материала платы. Если же детали на поверхности не одинаковы или расположены неравномерно, то приходится учитывать дополнительную массу в каждом узле модели-сетки.

Встречаются случаи, когда детали, деформации которых следует учитывать, соединяются с пластинами. В этом случае пластине передаются силы или моменты со стороны этих деталей. Можно выразить эти силы и моменты через перемещения близлежащих узлов пластины и детали и ввести в уравнения движения наравне с силами и моментами в самой пластине. В результате получатся уравнения движения для мест сочленения.

3.20. Модель стержневого каркаса

Стержневые каркасы в радиоконструкциях несут механическую нагрузку, это стойки, части блоков, кронштейны и фермы.

Построение для отдельных стержней и их сочленений моделей-сеток по принципу моделей трехмерных тел наталкивается на большие трудности, связанные с большим количеством элементов и малыми их размерами. Поэтому для стержней, так же как и для пластин, вводится упрощение в модель на основе различных гипотез о распределении перемещений и напряжений по сечению стержня. Это позволяет строить для стержней одномерные модели в виде цепочки узлов. Однако для радиоконструктора расчет отдельных стержней представляет только теоретический интерес. На практике приходится рассчитывать достаточно сложные стержневые конструкции, состоящие из десятков стержней. При построении расчетных соотношений для мест сочленения записываются свои уравнения движения. В общем случае, когда стержни приходят в места сочленения под произвольным углом, такие уравнения получаются довольно сложными, поэтому мы ограничимся только случаем, когда все стержни в перекрестии ориентированы по отношению друг к другу под прямым углом. Этот случай встречается в конструкциях наиболее часто.

3.21. Модель отдельного стержня

В радиоконструкциях встречаются стержни прямоугольного сечения, а также выполненные из уголка или другого профилированного материала. Строго говоря, гипотезы, на основании которых производится упрощение модели, справедливы только для стержней прямоугольного сечения. Однако часто эти гипотезы распространяют и на сечения другой формы. Это, разумеется, приводит к погрешностям, которые трудно оценить, но другого способа не придумали, и нам придется пойти по тому же пути. Мы получим уравнения движения для прямоугольных стержней, а затем укажем на те изменения, которые нужно произвести для стержней иного профиля.

Для пластин были приведены два способа построения модели. Первый способ основывался на гипотезе прямых нормалей, и в нем не учитывалась инерция вра-

щения элементов. При втором способе учитывалась инерция вращения, но вместо одного уравнения получалось три. При построении моделей стержней можно также следовать одним из этих путей. Однако при построении расчетных соотношений для перекрестий стержней второй путь предпочтительнее. Поэтому мы ограничимся только этим случаем.

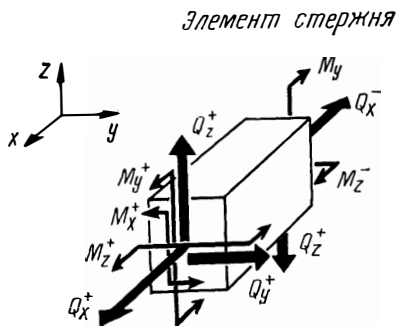


Рис. 3.58.

В расчетах стержней рассматриваются независимо друг от друга четыре вида деформации: растяжение, два изгиба во взаимно перпендикулярных плоскостях и кручение относительно оси стержня. Считают, например, что деформации изгиба не зависят от растяжения, а деформации кручения — от деформаций изгиба. В местах сочленения стержней одни виды деформаций переходят в другие. Например, изгибные колебания одного стержня переходят в деформации растяжения другого стержня. Все четыре вида деформаций отдельных стержней получаются взаимосвязанными. Поэтому необходимо получить соотношения для всех четырех видов деформаций.

Разделим стержень на элементы одинакового размера. По двум сечениям в местах разреза действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 3.58). Нормальные напряжения создают два изгибных момента и растягивающую силу. Касательные напряжения создают две перерезывающие силы и крутящий момент.

Для составления уравнений продольных колебаний рассматриваем проекцию растягивающих сил на ось x :

$$Q_x^+ - Q_x^- = ma_x. \quad (3.49)$$

Растягивающая сила определяется произведением нормальных напряжений на площадь сечения:

$$Q_x^+ = \sigma_{xx} 4h_y h_z, \quad (3.50)$$

где h_y и h_z половина толщины стержня в направлениях y и z .

В уравнении (3.50) нужно взять только ту часть нормальных напряжений, которая создается деформациями растяжения. Эта часть определяется законом Гука

$$\sigma_{xx}^+ = E\varepsilon_{xx}^+.$$

Деформации растяжения, в свою очередь, находят через перемещения узлов модели-сетки $\varepsilon_{xx}^+ = [u(x+h) - u]/h_x$.

После подстановки полученных выражений в уравнение (3.49) и деления левой и правой части уравнения на объем элемента получаем

$$\begin{aligned} E \frac{u(x+h) - 2u + u(x-h)}{h_x^2} &= \\ &= \rho \frac{u(t+\tau) - 2u + u(t-\tau)}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Это и есть уравнение продольных колебаний упругого стержня для вычисления перемещений узлов в направлении оси стержня. Чтобы рассчитать перемещения в двух других направлениях, нужно составить проекции перерезывающих сил на оси y и z . Уравнения для перерезывающих сил можно записать по аналогии с уравнением (3.42), которое получено для расчета изгибных колебаний пластин:

$$\begin{aligned} Q_y^+ &= 4\mu h_y h_z \left[\frac{v(x+h) - v}{h_x} - \frac{\varphi(x+h) + \varphi}{2} \right], \\ Q_z^+ &= 4\mu h_y h_z \left[-\frac{w(x+h) - w}{h_x} + \frac{\gamma(x+h) + \gamma}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Спроектировав перерезывающие силы на оси y и z и разделив полученное уравнение на объем элемента, получим

$$\begin{aligned} \mu \left[\frac{v(x+h) - 2v + v(x-h)}{h_x^2} - \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h_x} \right] &= \\ &= \rho \frac{v(t+\tau) - 2v + v(t-\tau)}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \mu \left[-\frac{w(x+h) - 2w + w(x-h)}{h_x^2} + \frac{\gamma(x+h) - \gamma(x-h)}{2h_x} \right] &= \\ &= \rho \frac{w(t+\tau) - 2w + w(t-\tau)}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Эти два уравнения служат для вычисления перемещений (прогибов) v и w в направлениях нормалей к оси стержня. Для расчета изгибных колебаний стержня, по-

мимо уравнений проекций перерезывающих сил (3.53) и (3.54), нужны еще уравнения изгибающих моментов для вычисления углов поворота γ и φ . Изгибающие моменты выражаются через номинальные напряжения, как мы это делали при выводе формулы (3.45):

$$M_y^+ = 4h^3_z h_y \sigma_{xx}^+ / 3 = \frac{4Eh^3_z h_y [\gamma(x+h) - \gamma]}{3h_x}, \quad (3.55)$$

$$M_z^+ = \frac{4Eh^3_y h_z [\varphi(x+h) - \varphi]}{3h_x}. \quad (3.56)$$

Спроектировав изгибающие моменты и моменты от перерезывающих сил на координатные оси y и z , получим

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} E h^3_y h_z \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi + \varphi(x-h)}{h_x} + \\ & + 2\mu h_y h_z h_x \left[\frac{\omega(x+h) - \omega(x-h)}{h_x} - \right. \\ & \left. - \frac{\varphi(x+h) + 2\varphi + \varphi(x-h)}{2} \right] = J_z \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} E h^3_z h_y \frac{\gamma(x+h) - 2\gamma + \gamma(x-h)}{h_x} - \\ & - 2\mu h_y h_z h_x \left[\frac{\omega(x+h) - \omega(x-h)}{h_x} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma(x+h) + 2\gamma + \gamma(x-h)}{2} \right] = J_y \varepsilon_y, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где J_y и J_z — моменты инерции элемента относительно осей y и z соответственно; ε_y и ε_z — угловые ускорения относительно тех же осей.

Моменты инерции в этом случае можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} J_y &= \rho 4h_x h_y h_z^3 (1 + h_x^2 / 4h_z^2) / 3, \\ J_z &= \rho 4h_x h_y^3 h_z (1 + h_x^2 / 4h_y^2) / 3. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Подставив значения моментов инерции (3.54) в уравнения (3.52) и (3.53), произведем сокращения и представим угловые ускорения в виде вторых разностей от углов поворота по времени. В результате получим

$$\begin{aligned} & E \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi + \varphi(x-h)}{h_x^2} + \frac{3\mu}{h_y^2} \times \\ & \times \left[\frac{\omega(x+h) - \omega(x-h)}{2h_x} - \frac{\varphi(x+h) + 2\varphi + \varphi(x-h)}{4} \right] = \end{aligned}$$

$$= \rho \left(1 + \frac{h_x^2}{4h_y^2} \right) \frac{\varphi(t + \tau) - 2\varphi + \varphi(t - \tau)}{\tau^2}, \quad (3.60)$$

$$E \frac{\gamma(x+h) - 2\gamma + \gamma(x-h)}{h_x^2} - \frac{3\mu}{h_z^2} \left[\frac{\omega(x+h) - \omega(x-h)}{2h_x} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma(x+h) + 2\gamma + \gamma(x-h)}{4} \right] = \\ = \rho \left(1 + \frac{h_x^2}{4h_z^2} \right) \frac{\gamma(t + \tau) - 2\gamma + \gamma(t - \tau)}{\tau^2}. \quad (3.61)$$

Это и есть два вторых уравнения для расчета изгибных колебаний стержня в плоскостях xy и xz .

Теперь нам осталось только получить уравнение для расчета крутильных колебаний стержня относительно оси x . Для этого нужно прежде всего определить величину крутящих моментов M_x .

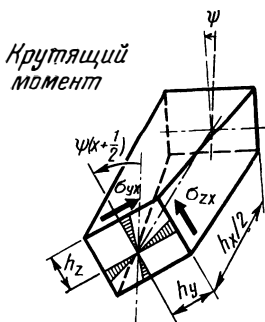


Рис. 3.59.

Крутящий момент в каждом сечении стержня состоит из двух частей. Первая часть определяется касательными напряжениями σ_{zx} , а вторая — касательными напряжениями σ_{yx} (рис. 3.59). Касательные напряжения σ_{zx} у поверхности стержня имеют величину $\sigma_{zx}(x+0,5) = 2\mu h_y [\psi(x+h) - \psi] / h_x$.

Касательные напряжения σ_{yx} у поверхности чего определяются аналогичным выражением $\sigma_{yx}(x+0,5) = -2\mu h_z [\psi(x+h) - \psi] / h_x$.

Знак «минус» здесь появляется потому, что поворот сечения против часовой стрелки, т. е. в сторону увеличения угла ψ , вызывает появление отрицательных напряжений σ_{yx} у верхней грани элемента.

Вычислив площади треугольников диаграммы касательных напряжений и умножив их на плечи $2h_y/3$ и $2h_z/3$ соответственно, находим значение крутящего момента

$$M_x(x+0,5) = 4\mu h_y h_z (h_y^2 + h_z^2) [\psi(x+h) - \psi] / 3h_x. \quad (3.62)$$

Спроектировав крутящие моменты и моменты инерционных сил на ось x , получим:

$$4\mu h_y h_z (h_y^2 + h_z^2) [\psi(x+h) - 2\psi + \psi(x-h)] / 3h_x = J_x \varepsilon_x, \quad (3.63)$$

где

$$J_x = 4\rho h_x h_y h_z (h_y^2 + h_z^2) / 3 \quad (3.64)$$

— момент инерции элемента относительно оси x .

Подставим значение момента инерции в уравнение (3.63), проведем сокращение и представим угловое ускорение в разностной форме

$$\mu \frac{\psi(x+h) - 2\psi + \psi(x-h)}{h^2_x} = \rho \frac{\psi(t+\tau) - 2\psi + \psi(t-\tau)}{\tau^2}. \quad (3.65)$$

Теперь мы получили полный набор формул для расчета вибраций стержня:

(3.51) — продольные колебания;

(3.53) и (3.60) — изгибные колебания в плоскости xy ;

(3.54) и (3.61) — изгибные колебания в плоскости xz ;

(3.65) — крутильные колебания.

В шесть полученных уравнений входит шесть неизвестных: три перемещения (u , v и w) и три угла поворота элемента (ψ , φ и γ).

Для сравнения приведем полученные уравнения движения в дифференциальной форме

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$E \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 3\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$E \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - 3 \frac{\mu}{h^2_z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \right) = \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2},$$

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Можно получить аналогичные уравнения, если в уравнениях Ламе произвести разложение перемещений в ряд по полиномам Лежандра в направлениях y и z , исключить из расчетных соотношений эти две координаты и ограничиться в разложении только нулевым и первыми членами: u_{00} , v_{00} , w_{00} , v_{10} , u_{10} и w_{10} [9]. Единственное отличие состояло бы в том, что вместо коэффициента $(\lambda + 2\mu)$ в уравнении продольных колебаний был взят модуль Юнга E .

Если решить полученные разностные уравнения относительно неизвестных на верхнем временном слое $(t+\tau)$ и дополнить их начальными и граничными условиями, то получится явная разностная схема, с помо-

стью которой можно производить расчеты вибраций отдельных стержней. Но прежде чем говорить о граничных условиях, найдем уравнения движения перекрестий стержней.

3.22. Уравнения движения перекрестий стержней

Стержневые каркасы в радиоконструкциях часто представляют собой периодические структуры. Периодичность заключается в том, что при повороте конструкции на определенные углы или при смещении ее в определенных направлениях можно совместить одни элементы конструкции с другими. А это значит, что, используя одни и те же соотношения, можно рассчитывать различные элементы. Так, если у каждого стержня направить ось x вдоль его оси, а оси y и z — нормально к боковым граням, то полученные выше уравнения движения окажутся пригодными для расчетов перемещений и углов поворота элементов любого стержня.

Элементы перекрестий будут отличаться друг от друга только числом пересекающихся стержней. Если выбрать наиболее сложное перекрестие и записать для него уравнение движения, то переход к более простым перекрестиям будет осуществляться только исключением сил и моментов, соответствующих отсутствующим стержням. Для радиоконструкций наиболее сложным перекрестием можно считать такое, в котором встречаются четыре стержня (рис. 3.60). Рассмотрим наиболее общий случай, когда все стержни имеют различное сечение и различную длину. По длине стержня будем брать одинако-

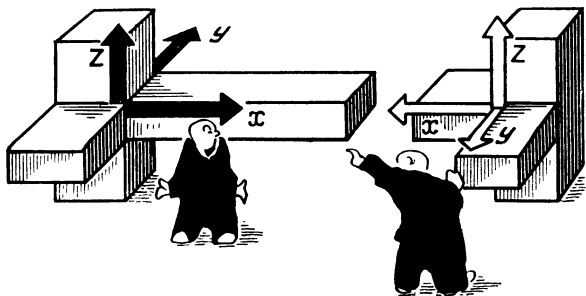


Рис. 3.60.

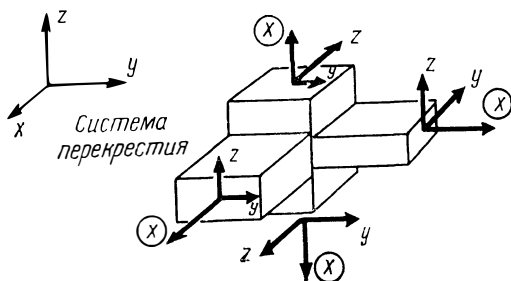


Рис. 3.61.

вое число шагов h_x , поэтому шаги y у всех стержней будут различными.

Определим для каждого стержня свою локальную систему координат. Возникает вопрос: в какую сторону у каких стержней направить ось x ? В общем, для вывода уравнений это безразлично, но при программировании задачи правильный выбор направления осей может значительно облегчить задачу. Рационально направить оси всех стержней от перекрестия. Это обеспечивает симметрию при построении алгоритма расчета. Но спрашивается: как направить оси x у других перекрестий, к которым стержни подходят? У них также будем направлять оси x от перекрестия. Таким образом, в центре каждого стержня встретятся две системы координат с взаимно противоположным направлением осей x (см. рис. 3.60). Такую «стыковку» легче произвести в центре каждого стержня, чем у каждого перекрестия, где расчетные соотношения получаются более сложными.

Таким образом, оси x всех стержней у перекрестия будут направлены от его центра, а оси y и z , как показано на рис. 3.61.

Локальная система координат самого перекрестия, в которой будем записывать уравнения движения, совпадет с системой координат одного из стержней. Этот стержень назовем основным.

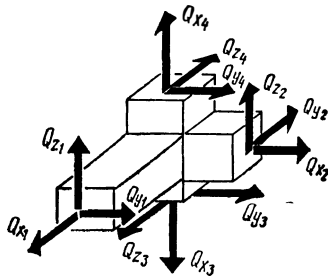


Рис. 3.62.

Начало координат совместим с точкой пересечения осей x стержней. Будем считать, что центр массы элемента перекрестия совпадает с началом координат. Это предположение не точно, но значительно облегчает математические выкладки.

Наметим направление перерезывающих и растягивающих сил для сечений всех стержней, как это делалось для отдельного стержня (рис. 3.62). Спроектируем эти силы и силы инерции на координатные оси элемента перекрестия:

$$\begin{aligned} Q_{x_1} - Q_{y_2} + Q_{z_3} - Q_{z_4} &= m \frac{u(t+\tau) - 2u + u(t-\tau)}{\tau^2}, \\ Q_{y_1} + Q_{x_2} + Q_{y_3} + Q_{y_4} &= m \frac{v(t+\tau) - 2v + v(t-\tau)}{\tau^2}, \\ Q_{z_1} + Q_{z_2} - Q_{x_3} + Q_{x_4} &= m \frac{\omega(t+\tau) - 2\omega + \omega(t-\tau)}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

где m — масса элемента перекрестия.

Уравнения (3.66) служат для вычисления перемещений узла перекрестия u , v и ω . Значения сил определяются формулами (3.50) и (3.52). В этих формулах величины с аргументом $(x+h)$ относятся к соседним узлам примыкающих стержней, а величины без аргумента — к узлу перекрестия. При вычислении сил первого стержня формулы (3.50) и (3.52) остаются без изменения, поскольку системы координат первого стержня и перекрестия совпадают. При вычислении сил остальных стержней в эти формулы нужно внести изменения, связанные с поворотом локальных систем координат стержней относительно системы перекрестия:

для второго стержня — $u \leftarrow v$, $v \leftarrow -u$, $\omega \leftarrow \omega$,

для третьего — $u \leftarrow -\omega$, $v \leftarrow v$, $\omega \leftarrow -u$,

для четвертого — $u \leftarrow \omega$, $v \leftarrow v$, $\omega \leftarrow -v$.

Изменения, обратные этим, нужно вводить и в уравнения движения отдельных стержней при расчетах перемещений элементов, примыкающих к перекрестиям.

Теперь составим уравнения равновесия элемента перекрестия под действием изгибающих и крутящих моментов, моментов от перерезывающих сил и моментов инерционных сил. Направление моментов, приложенных в сечениях перекрестия, показано на рис. 3.63.

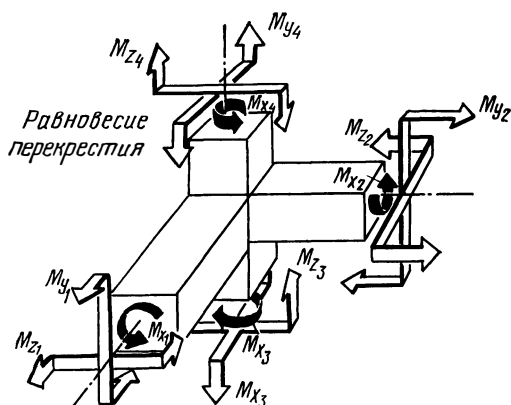


Рис. 3.63.

Уравнения моментов будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 M_{x_1} - M_{y_2} + M_{z_3} - M_{z_4} - Q_{z_2}h_{x_2}/2 + Q_{y_3}h_{x_3}/2 - \\
 - Q_{y_4}h_{x_4}/2 = J_x [\psi(t + \tau) - 2\psi + \psi(t - \tau)]/\tau^2, \\
 M_{y_1} + M_{x_2} + M_{y_3} + M_{y_4} - Q_{z_1}h_{x_1}/2 - Q_{z_3}h_{x_3}/2 - \\
 - Q_{z_4}h_{x_4}/2 = J_y [\varphi(t + \tau) - 2\varphi + \varphi(t - \tau)]/\tau^2, \\
 M_{z_1} + M_{z_2} - M_{x_3} + M_{x_4} + Q_{y_1}h_{x_1}/2 + Q_{y_2}h_{x_2}/2 = \\
 = J_z [\gamma(t + \tau) - 2\gamma + \gamma(t - \tau)]/\tau^2,
 \end{aligned}$$

где J_x , J_y и J_z — моменты инерции элемента перекрестия относительно координатных осей; ψ , φ и γ — углы поворота перекрестия относительно осей.

Значения изгибающих и крутящих моментов будут теми же, что и в уравнениях для отдельных стержней (3.55), (3.56) и (3.62). При переходе от формул для стержней к формулам для перекрестий следует помимо изменения перемещений, указанного выше, произвести также изменение углов:

для второго стержня $\psi \leftarrow \varphi$, $\varphi \leftarrow -\psi$, $\gamma \leftarrow \gamma$,

для третьего $\psi \leftarrow -\gamma$, $\varphi \leftarrow \varphi$, $\gamma \leftarrow \psi$,

для четвертого $\psi \leftarrow \gamma$, $\varphi \leftarrow \varphi$, $\gamma \leftarrow -\psi$.

Стержневые конструкции крепят к корпусу автомобиля или самолета в отдельных точках. Через эти точки на них передается внешнее воздействие в виде периодических колебаний или импульсов. В точки крепления помещают узлы сетки. При шарнирном соединении этих точек с корпусом в них задаются перемещения u , v и w ,

а углы поворота вычисляются по полученным формулам. При жестком закреплении этих точек должны задаваться и перемещения и углы поворота сечений. В частном случае, когда точки крепления совершают поступательное движение, углы поворота принимаются равными нулю.

3.23. Случай стержней непрямоугольного сечения

Посмотрим, как изменятся уравнения, если стержни имеют непрямоугольное сечение. Наиболее часто в конструкциях применяют уголки, поэтому мы ограничимся только этим случаем.

Начнем с уравнения (3.51) для продольных колебаний стержня. Изменения начнутся с выражения для растягивающих сил (3.50), где должна быть записана площадь сечения уголка (рис. 3.64):

$$\begin{aligned} Q_x^+ &= \sigma_{xx}^+ h (a + b - h) = \\ &= h (a + b - h) E [u(x+h) - u] / h_x. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Объем элемента также будет пропорционален площади $(a+b-h)h$, поэтому после деления левой и правой части уравнения (3.49) на объем элемента уравнение продольных колебаний уголка получится таким же, как и для продольных колебаний стержня прямоугольного сечения (3.52).

Перерезывающие силы (3.53) и (3.54) также пропорциональны площади сечения:

$$\begin{aligned} Q_y^+ &= \mu h (a + b - h) \left[\frac{v(x+h) - v}{h_x} - \frac{\varphi(x+h) + \varphi}{2} \right], \\ Q_z^+ &= \mu h (a + b - h) \left[\frac{w(x+h) - w}{h_x} + \frac{\gamma(x+h) - \gamma}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

а уравнения равновесия (3.53) и (3.54) получаются после деления левой и правой части на объем элемента. Поэтому эти уравнения также останутся без изменения.

Сложнее обстоит дело с уравнениями моментов (3.57) и (3.58). Сами изгибающие моменты были получены из условия растяжения слоев вблизи поверхности стержня. Причем поворот сечений происходил относительно срединной поверхности, проходящей через ось симметрии стержня. Теперь сечение стержня несимметрично. Пово-

рот сечений будет происходить относительно плоскостей, параллельных полкам уголка и отстоящим от них на расстояния d_y и d_z (рис. 3.65). Эти плоскости также называют срединными.

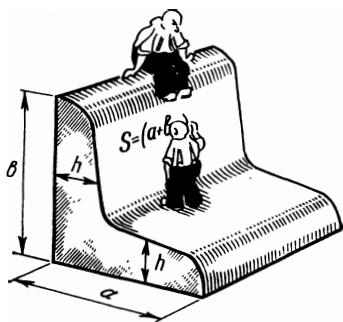


Рис. 3.64.

Изгиб уголка происходит таким образом, что моменты нормальных напряжений по обе стороны от этих плоскостей будут одинаковыми. Из этих условий и определяются расстояния d_y и d_z . В справочниках по сопротивлению материалов для уголков разного сечения приводятся значения величин d_y и d_z , и мы будем считать эти величины заданными.

Изгибающие моменты будут теперь определяться формулами

$$M_y^+ = 2Eh(b - d_z)^3 [\psi(x+h) - \psi] / 3h_x,$$

$$M_z^+ = 2Eh(a - d_y)^3 [\varphi(x+h) - \varphi] / 3h_x. \quad (3.69)$$

Моменты инерции элемента относительно осей, параллельных координатным осям y и z и проходящих в срединных плоскостях, можно вычислять с помощью выражений

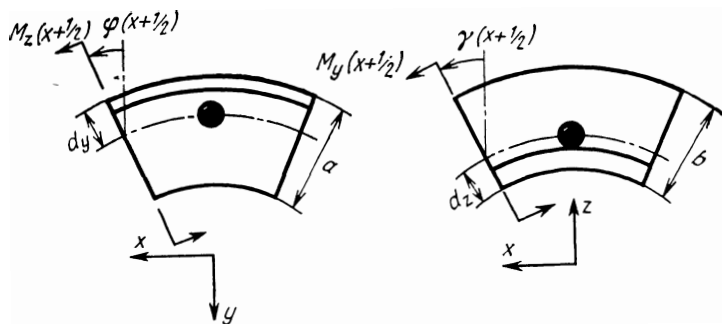


Рис. 3.65.

$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{2}{3} \rho h (b - d_z)^3 \left[1 + \frac{h^2 x}{4(b - d_z)^2} \right], \\
 J_z &= \frac{2}{3} \rho h (a - d_y)^3 \left[1 + \frac{h^2 x}{4(a - d_y)^2} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

Теперь мы имеем новые значения изгибающих моментов и перерезывающих сил и можем составить уравнения проекций моментов на координатные оси y и z :

$$\begin{aligned}
 E \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi + \varphi(x-h)}{h^2 x} + \frac{3}{2} \mu \frac{a+b-h}{(a-d_y)^3} \times \\
 \times \left[\frac{\omega(x+h) - \omega(x-h)}{2h_x} - \frac{\varphi(x+h) + 2\varphi + \varphi(x-h)}{4} \right] = \\
 = \rho \left[1 + \frac{h^2 x}{4(a-d_y)^2} \right] \varepsilon_z, \\
 E \frac{\gamma(x+h) - 2\gamma + \gamma(x-h)}{h^2 x} - \frac{3}{2} \mu \frac{a+b-h}{(b-d_z)^3} \times \\
 \times \left[\frac{\omega(x+h) - \omega(x-h)}{2h_x} + \frac{\gamma(x+h) + 2\gamma + \gamma(x-h)}{4} \right] = \\
 = \rho \left[1 + \frac{h^2 x}{4(b-d_z)^2} \right] \varepsilon_y.
 \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения с уравнениями (3.60) и (3.61), видим, что для расчета изгибных колебаний уголков можно пользоваться теми же уравнениями, что и для расчета стержней прямоугольного сечения. Изменение коснулось только коэффициентов в уравнениях для определения углов поворота сечений перед членами, определяемыми перерезывающими силами, и коэффициентов в правой части уравнений.

Уравнение крутящих моментов (3.65) также останется без изменения, поскольку центральный момент инерции сечения и момент инерции элемента относительно оси x — величины пропорциональные, но значение крутящего момента будет другим:

$$M_x(x+0,5) = \mu h [(a-d_y)^3 + (b-d_z)^3] [\psi(x+h) - \psi] / 3h_x.
 \tag{3.71}$$

Без изменения остаются и уравнения для расчета движения перекрестий стержней, только в случае уголков вместо прежних значений сил и моментов нужно брать новые значения (3.67) ... (3.71).

Строго говоря, полученные уравнения изгибных колебаний верны, только когда направление осей координат

стержня совпадает с направлением главных осей инерции сечений. В наших примерах такого совпадения нет, и это означает, что мы не учитываем кручения стержней при изгибных колебаниях. В нашем случае конструкция получается более жесткой, что приводит к некоторому завышению скоростей протекания процессов.

3.24. Допустимый шаг по времени из условия устойчивости

Мы уже касались вопросов устойчивости (см. гл. 1). Теперь мы располагаем многими моделями и можем распространить выводы на более широкий круг задач.

Все без исключения разностные уравнения, которые мы получили, характеризуются периодическим чередованием знаков перед членами в левой и правой частях. Например, в уравнении продольных колебаний стержня (3.51) знаки чередовались, как показано на рис. 3.66,а. Чередование знаков в уравнении изгибных колебаний пластин происходит в направлении двух координат и времени (рис. 3.66,б).

В уравнениях для расчета процессов деформирования трехмерных упругих тел (3.12) чередование знаков происходит в направлении трех координат и времени, знаки чередуются по правилу шахматной доски (рис. 3.67). Такое чередование не случайно. Оно определяется физиче-

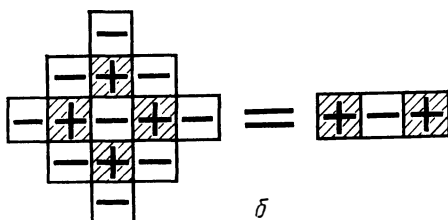
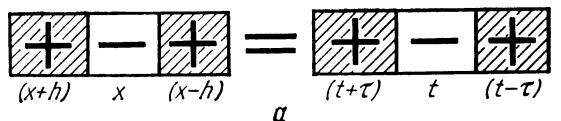


Рис. 3.66.



*Трехмерные тела.
Чередование знаков.*

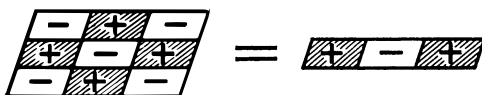


Рис. 3.67.

скими законами, которые используются при составлении уравнений. Например, при выводе уравнений движения пластин использовались следующие представления: углы поворота сечений определялись разностью перемещений, кривизна или деформации растяжения на поверхности — разностью углов поворота, вторая разность определяла также нормальные напряжения и изгибающие моменты, перерезывающие силы определялись разностью изгибающих и крутящих моментов, а в уравнение движения входила разность перерезывающих сил.

Рассмотрим уравнение продольных колебаний стержня (3.51), записанное в разностной форме. Преобразуем это уравнение к виду

$$u(t+\tau) = (2-2A)u + Au(x+h) + Au(x-h) - u(t-\tau),$$

где $A = E\tau^2 / \rho h^2$.

Будем решать задачу о свободных колебаниях стержня. Для этого закрепим стержень по краям, т. е. введем граничные условия: при $x=0$ $u=0$ и при $x=l$ $u=0$. В качестве начальных условий возьмем отклонение узлов стержня от положения равновесия по закону синуса, а скорости всех узлов примем равными нулю (рис. 3.68). Чтобы объем вычислений получился небольшим и можно было обойтись без вычислительной машины, возьмем по длине стержня только семь узлов. А чтобы удобней было строить график перемещений, будем их откладывать перпендикулярно оси стержня.

Задать указанные начальные условия можно следующим образом: в два начальных момента времени t и

$(t-\tau)$ задать в каждом узле одинаковые перемещения (рис. 3.68). Тогда скорость каждого узла, определяемая разностью перемещений по времени, будет равна нулю.

Теперь нам нужно выбрать шаг по времени. Для определенности положим, что длина стержня имеет 6 м, модуль Юнга материала 10^{10} Па, плотность $8 \cdot 10^3$ кг/м³. Шаг по координате 1 м, а шаг по времени выберем так, чтобы безразмерный коэффициент A принимал значения $0,5^2=0,25$; $1^2=1$ и $1,5^2=2,25$, т. е. выполним три варианта расчета с шагами τ , равными 316, 632 и 948 мкс. Шаги выбраны кратными наименьшему шагу, чтобы можно было сравнивать результаты трех вариантов расчета.

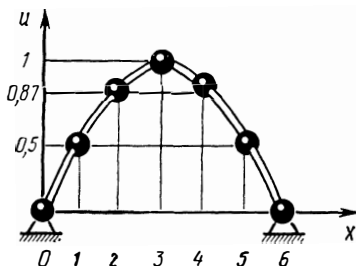


Рис. 3.68.

Юнга имеет 6 м, модуль Юнга материала 10^{10} Па, плотность $8 \cdot 10^3$ кг/м³. Шаг по координате 1 м, а шаг по времени выберем так, чтобы безразмерный коэффициент A принимал значения $0,5^2=0,25$; $1^2=1$ и $1,5^2=2,25$, т. е. выполним три варианта расчета с шагами τ , равными 316, 632 и 948 мкс. Шаги выбраны кратными наименьшему шагу, чтобы можно было сравнивать результаты трех вариантов расчета.

Таблица 3.1

t	0	h_x	$2h_x$	$3h_x$	$4h_x$	$5h_x$	$6h_x$
0	0	0,5	0,87	1,00	0,87	0,5	0
τ	0	0,5	0,87	1,00	0,87	0,5	0
2τ	0						
3τ							
4τ							

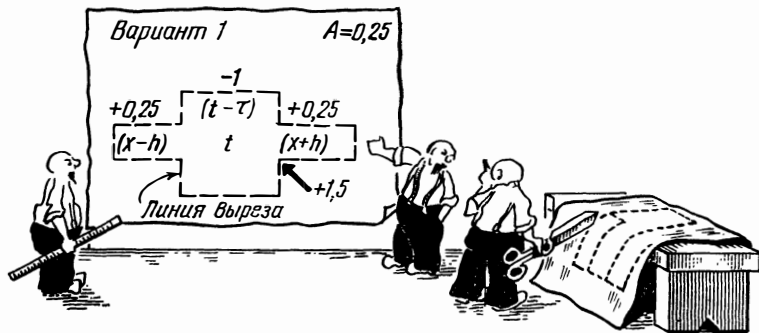


Рис. 3.69.



Рис. 3.70.

Вычисления можно продолжить, занося результаты в табл. 3.1. Для удобства вычислений можно вырезать шаблон (рис. 3.69). Шаблон накладывают на таблицу так, чтобы в нижней клетке шаблона открывалась очередная пустая клетка таблицы (рис. 3.70), а в четырех верхних клетках были цифры. Эти цифры умножают на соответствующие коэффициенты и складывают. Результат записывают в нижнюю клетку. После этого шаблон сдвигают на шаг вправо и вычисляется следующее значение U . После вычисления всех значений перемещений в очередной строке таблицы, т. е. в одном временном слое, шаблон опускают на шаг по времени, т. е. на следующую строку, и т. д.

Результаты вычислений для трех значений шагов по времени приведены в табл. 3.2—3.4. В табл. 3.2 и 3.3 на

Таблица 3.2

t	x						
	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0,50	0,87	1,00	0,87	0,50	0
1	0	0,50	0,87	1,00	0,87	0,50	0
2	0	0,47	0,81	0,94	0,81	0,47	0
3	0	0,41	0,70	0,82	0,70	0,41	0
4	0	0,32	0,54	0,64	0,54	0,32	0
5	0	0,20	0,35	0,41	0,35	0,20	0
6	0	0,07	0,14	0,15	0,14	0,07	0
7	0	-0,06	-0,09	-0,12	-0,09	-0,06	0
8	0	-0,18	-0,32	-0,37	-0,32	-0,18	0
9	0	-0,29	-0,53	-0,60	-0,53	-0,29	0

Таблица 3.3

t	x						
	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0,46	0,80	0,92	0,80	0,46	0
1	0	0,46	0,80	0,92	0,80	0,46	0
2	0	0,34	0,58	0,68	0,58	0,34	0
3	0	0,12	0,22	0,24	0,22	0,12	0
4	0	-0,12	-0,22	-0,24	-0,22	-0,12	0
5	0	-0,34	-0,58	-0,68	-0,58	-0,34	0

Таблица 3.4

t	x						
	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0,40	0,69	0,80	0,69	0,40	0
1	0	0,40	0,69	0,80	0,69	0,40	0
2	0	0,15	0,28	0,30	0,28	0,15	0
3	0	-0,15	-0,38	-0,29	-0,38	-0,15	0
4	0	-0,63	0,02	-1,29	0,02	-0,63	0
5	0	1,77	-3,99	3,60	-3,99	1,77	0

чальные условия были скорректированы в соответствии с увеличением шага по времени. Расчет вели до тех пор, пока значения перемещений во всех узлах не становились отрицательными, т. е. несколько больше, чем на четверть периода. В двух первых случаях это удалось. Графики перемещений для этих случаев показаны на

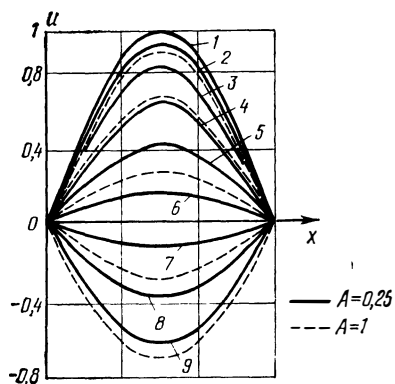


Рис. 3.71.

12*

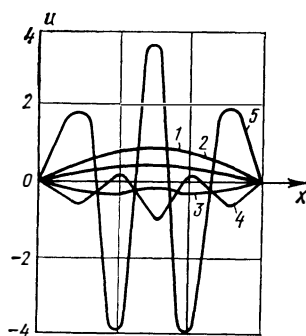


Рис. 3.72.

рис. 3.71. Причем процесс колебаний в обоих вариантах проходит примерно одинаково. Наблюдается только некоторое отклонение в скорости протекания процесса. Кстати, в случае свободных колебаний стержня имеется точное решение дифференциального уравнения, соответствующего нашему разностному уравнению.

Решение при $A=1$ соответствует точному решению и не содержит погрешностей дискретизации.

Разностное решение в этом случае позволяет определить такую важную характеристику движения, как резонансная частота. Период колебаний во втором случае равен 12 шагам τ , следовательно, резонансная частота будет 131 Гц. В третьем случае наблюдается неустойчивость решения. Уже в четвертом-пятом шагах вычислений амплитуды начинают быстро нарастать, причем появляется чередование знаков в решении по координатам и времени (рис. 3.72).

Приведенные примеры расчетов показывают, что устойчивость решения зависит от величины коэффициента A , который определяется характеристиками материала стержня и отношением шага во времени к шагу по координате. Неустойчивость появляется при коэффициенте A , превышающем единицу, следовательно, критерий устойчивости разностного решения имеет вид

$$A = E\tau^2 / (\rho h_x^2) \leq 1.$$

Интересно то, что этот «математический» критерий совпадает с некоторым «физическим» критерием. Действительно, при расчетах с помощью полученных рекуррентных соотношений возмущение может передаваться от узла к узлу со скоростью, не превышающей отношения h_x/τ , поскольку в каждое такое уравнение входят перемещения только ближайших соседних узлов. Но это отношение мы выбираем сами. А что будет, если скорость распространения возмущений в действительности выше этого отношения? Тогда ничего похожего на действительный процесс в расчете не получим. Следовательно, физический критерий состоит в том, что «скорость счета» не должна быть меньше скорости распространения возмущений в среде.

В упругих средах скорость распространения постоянна и равна $\sqrt{E/\rho}$, отсюда физический критерий можно записать в виде $h_x/\tau \geq \sqrt{E/\rho}$ или $1 \leq E\tau^2 / (\rho h_x^2)$, т. е. физический и математический критерии совпадают.

Физический критерий можно сформулировать более строго, если вместо скорости распространения возмущений использовать понятие области определения функции. В таком виде он называется критерием Фридрикса, Куранта и Леви [2]. Этот критерий является необходимым, но не достаточным. Чтобы определить достаточное условие устойчивости, применяется «испытание» разностной схемы с помощью теста «шахматная доска». Для этого всем искомым функциям на временных слоях t и $(t-\tau)$ даются единичные значения со знаками, чередующимися по правилу «шахматной доски», и вычисляется искомая функция в следующий момент времени $(t+\tau)$. Если эта функция окажется больше единицы по абсолютной величине, то решение будет неустойчивым.

Покажем, как анализируется устойчивость полученного разностного уравнения с помощью теста «шахматная доска» на примере уравнения (3.39) для пластин. Подставив в это уравнение единичные значения функций со знаками, как на рис. 3.66, получим $\omega(t+\tau) = 16(A+2B+C) - 3 \leq 1$.

Это и есть достаточный критерий устойчивости. Если шаги сетки по осям x и y выбраны одинаковыми, то $A=B=C$ и можно записать выражение для максимально допустимого значения коэффициента $A \leq 1/16$.

Можно показать, что указанный способ определения устойчивости является необходимым и достаточным, т. е. если этот критерий не выполняется, то решение всегда будет неустойчивым и наоборот.

3.25. Неявные схемы

Шаги по времени, выбранные из условия устойчивости вычислительного процесса, очень малы. Поэтому рассмотренные явные расчетные схемы пригодны лишь при решении задач, в которых интересующий нас процесс заканчивается в доли секунды. Эти схемы непригодны, если процесс протекает медленно.

Возникает вопрос: как усовершенствовать расчетную схему, чтобы повысить устойчивость процесса вычислений? Абсолютно устойчивыми разностными схемами, некритичными к выбору шагов по времени, являются так называемые неявные схемы. Неявные схемы имеют по сравнению с явными ряд существенных преимуществ, в частности дают монотонные решения, не содержащие

погрешностей в виде «ряби». Такие схемы позволяют вести расчеты с гораздо большими шагами по времени, чем явные. Неявные схемы легко получить из явных схем. Покажем, как это делается.

Любое из рассмотренных выше разностных уравнений для расчета вибраций представляет собой второй закон Ньютона ($P=ma$), записанный в разностной форме.

Силу вычисляют в момент времени t , а для нахождения ускорения a используют перемещения в узле модели-сетки в три момента времени или на трех временных слоях ($t-\tau$), t и $(t+\tau)$, например:

$$[u(t-\tau) - 2u + u(t+\tau)] / \tau^2.$$

В каждом уравнении получается одна неизвестная на верхнем временном слое ($t+\tau$), и это позволяет легко производить вычисления последовательно по временным слоям. В каждом шаге по времени по известным значениям перемещений на двух предыдущих временных слоях отыскиваются перемещения всех узлов модели на следующем временном слое ($t+\tau$).

Чтобы из явной схемы получить неявную, можно, например, вычислять силу, как среднюю арифметическую от значения сил в два момента времени ($t+\tau$) и ($t-\tau$):

$$0,5[F(t+\tau) + F(t-\tau)] = ma. \quad (3.72)$$

Во всех рассмотренных выше механических моделях правая часть в уравнениях движения однотипна. Она сохраняется и в уравнениях для неявной схемы (3.72). Основной задачей построения расчетной модели является указание способа вычисления сил, действующих во всех узлах. Если разработан способ для вычисления сил в уравнениях типа $P=ma$, то он легко переносится на уравнения для неявных схем (3.72). Физическая картина взаимодействия элементов в модели не изменяется. Таким образом, в явных и неявных схемах используется одна и та же модель конструкции.

Если изложенные выше способы построения моделей можно целиком распространить и на неявные схемы, то техника вычислений при использовании неявных схем совершенно меняется. Если в уравнения вида $P=ma$ входит по одной неизвестной на верхнем временном слое ($t+\tau$), то теперь их в каждом уравнении вида (3.72) будет несколько. Эти неизвестные будут входить в выражение силы на верхнем временном слое.

Число неизвестных в каждом уравнении будет равно числу непосредственно связанных между собой элементов в модели или количеству точек в используемом шаблоне. Например, при расчете упругих колебаний продольного стержня используется трехточечный шаблон и число неизвестных в каждом уравнении для внутренних узлов модели будет равно трем. Для расчета изгибных колебаний стержня используется 5-точечный шаблон, а в общем случае трехмерного напряженного состояния — 19-точечный. Число неизвестных в каждом уравнении будет соответственно 5 или 19.

Если при использовании явных схем приходится решать отдельные уравнения, каждое относительно одного неизвестного, то при использовании неявных схем — системы из многих уравнений с многими неизвестными. Количество уравнений в системе будет равно числу узлов в модели, перемещения которых неизвестны, умноженному на мерность задачи. Например, если модель монолитного блока прямоугольной формы содержит в направлении каждой координаты по 10 узлов и общее число узлов 1000, то придется в каждом шаге по времени решать систему из 3000 уравнений с таким же числом неизвестных.

Таким образом, при использовании неявных схем возникает проблема решения систем большого числа алгебраических уравнений. Трудоемкость решения таких систем в общем случае очень велика. При решении задач разностными методами с применением неявных схем выручает то, что матрица коэффициентов системы оказывается редко заполненной коэффициентами. Коэффициенты, отличные от нуля, группируются около главной диагонали, образуя ленточную матрицу.

При решении одномерных задач (продольные или изгибные колебания упругого стержня) коэффициенты образуют 3- или 5-диагональную матрицу. При решении двухмерных и трехмерных задач матрица коэффициентов получается также ленточной, но может содержать несколько лент, параллельных главной диагонали.

В теории разностных схем [1, 7, 8] разработаны очень экономичные методы решения систем уравнений с ленточными матрицами.

Одномерные задачи решают методом прогонки [1, 7]. При решении двухмерных и трехмерных задач используют метод суммарной аппроксимации, при котором

в каждом шаге по времени решение многомерной задачи заменяют решением двух или трех одномерных задач [7].

Применение метода суммарной аппроксимации при использовании неявных схем часто позволяет уменьшить объем вычислений на несколько порядков. Объем вычислений получается не на много большим, чем при использовании явных схем. Однако программирование задач значительно усложняется.

Перспективы

Разностный метод решения задач при расчетах физических процессов в конструкциях РЭА, основы которого изложены в настоящей книге, является достаточно универсальным. Он позволяет строить модели для расчетов трехмерных нестационарных процессов в весьма сложных конструкциях.

Мы ограничились только рассмотрением линейных задач. Метод позволяет достаточно просто строить модели и в случае нелинейных задач. В процессе решения в каждом узле модели в каждом шаге по времени получают все искомые функции. Это дает возможность в каждом шаге корректировать значения коэффициентов, характеризующих свойства материалов конструкции, а также геометрические соотношения, если они сильно изменяются в процессе деформирования конструкции.

Когда закон изменения искомых функций по времени заранее известен, можно время их расчетных соотношений исключить. В этом случае задача проще всего решается с помощью итерационного процесса. Итерационные формулы также легко получаются на основе выведенных уравнений.

Таким образом, применение разностных методов при решении задач на современных ЦВМ открывает широкие возможности анализа работы различных конструкций. Теоретически, разностным методом можно решить задачу любой сложности. При этом получение расчетных соотношений и программ не встречает серьезных трудностей. Именно универсальность метода определила широкую популярность его среди конструкторов различного профиля. Ежегодно выходят десятки книг и сотни статей, посвященных усовершенствованию метода конечных разностей. Возникает вопрос: нужно ли тратить столько усилий на совершенствование метода, который уже теперь позволяет в принципе решать любую задачу? Дело в том, что принципиальная возможность никого из конструкторов не интересует. А практи-

ческое применение метода к решению конкретных задач наталкивается на две трудности: 1) большой объем вычислений, 2) сложность анализа погрешностей решения.

Часто получается так, что нужную задачу мы решить не можем, поскольку модель получается очень сложной (содержит много узлов) и никакие ЦВМ не в состоянии выполнить такого объема вычислений. Тогда мы упрощаем модель, т. е. берем меньшее количество элементов, а сами элементы больших размеров. Это позволяет решить задачу, но при этом мы не знаем, какая получилась погрешность и насколько полученное решение похоже на действительный процесс в конструкции. Данные получаются ненадежными. На уменьшение указанных недостатков разностных методов и направлены в основном усилия многих исследователей. Появляются все более экономичные и точные разностные модели.

Однако метод конечных разностей и подобные ему дискретные методы (метод конечных элементов, вариационно-разностный метод) имеют еще тот недостаток, что в процессе решения производится дискретизация конструкции, т. е. конструкция разбивается на ряд дискретных элементов. Решение получается в виде больших таблиц чисел, соответствующих этим дискретным элементам. Эти таблицы содержат много излишней информации. Возникают трудности анализа полученных в таком виде результатов. Наконец, дискретность приводит к указанным выше погрешностям дискретизации, которые доставляют много неприятностей.

Этих недостатков лишены классические вариационные методы (метод Ритца, метод Бубнова — Галеркина). Решение в этих методах ищется в виде формулы или ряда формул. Количество чисел в ответе невелико. Нет никакой дискретизации по координатам. Исчезают погрешности дискретизации и трудности анализа результатов.

Однако в вариационных методах очень сложно подобрать формулы, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи, особенно если область имеет сложную форму и граничные условия неоднородны. Эта трудность считалась принципиальной и сдерживала поиск в этом направлении до тех пор, пока не появились работы В. Л. Рвачева. Разработанный им метод

позволяет чисто формально построить формулы, удовлетворяющие любым граничным условиям по крайней мере в стационарных задачах. Эти формулы содержат ряд неопределенных компонентов, варьируя которые, можно приближенно удовлетворить и дифференциальным уравнениям внутри области.

Само применение метода В. Л. Рвачева ограничено пока относительно простыми задачами. Связано это со сложностью получаемых формул. Однако этот метод интенсивно совершенствуется и круг решаемых с его помощью задач быстро расширяется. Кроме того, с появлением метода Рвачева прояснились еще два возможных пути построения моделей. Если в методе Рвачева точно выполняются условия на границе и приближенно — внутри области, то, очевидно, возможны еще два варианта: 1) точно — внутри области и приближенно — на границе; 2) приближенно — внутри области и на границе.

Первый путь является весьма привлекательным, но недостаточно универсальным, второй же может оказаться не только простым и универсальным, но и чрезвычайно экономичным с точки зрения объема вычислений на ЦВМ.

Покажем на простом примере плоской стационарной задачи теплопроводности применение этого приема при использовании распространенного вариационного метода — метода наименьших квадратов. Пусть на плоскости XOY имеется однородная область Ω с границей Γ . Внутри области находятся распределенные источники тепла $q(x, y)$. Необходимо найти формулу, приближенно удовлетворяющую уравнению Фурье и произвольным граничным условиям. Оба эти требования можно записать в виде одного выражения:

$$L\Theta = \Phi_N, \quad (1)$$

где L — дифференциальный оператор.

Внутри области он является оператором Лапласа, а на границе изменяется в зависимости от заданных граничных условий, например, в точках где задана температура $L\Theta = \Theta$. Правая часть Φ_N также может иметь различное значение. Во внутренних точках это удельное тепловыделение q/k . В граничных точках это может быть или значение температуры или значение «косой» производной по нормали к границе.

Приближенное решение можно искать в виде двух-мерного степенного ряда

$$\theta_{\pi} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \theta_{ij} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij} x^i y^j. \quad (2)$$

В процессе решения необходимо найти коэффициенты A_{ij} этого ряда. Для этого, варьируя значения коэффициентов A , добиваются, чтобы отклонение $L\theta_{\pi}$ от заданного Φ_N было минимальным, т. е. минимизируют функционал $W = \int_{\Omega} (\Phi_N - L\theta_{\pi})^2 d\Omega$, где интеграл берется по области и границе.

Если область имеет сложную форму или сложен вид функции $q(x, y)$, то интегрирование можно заменить суммированием. Для этого внутри области и на границе намечают N точек. Точки располагаются таким образом, чтобы по их расположению можно было достаточно точно воспроизвести форму области и рельеф функции $q(x, y)$. Тогда функционал принимает вид

$$W = \sum_N (\Phi_N - L\theta_{\pi})^2. \quad (3)$$

Минимизировать этот функционал можно двумя способами. При первом способе отыскиваются сразу все коэффициенты A_{ij} . Для этого из (3) получают систему уравнений Эйлера и решают ее относительно неизвестных коэффициентов A . Таких уравнений будет $IJ+1$.

Можно избежать решения системы, если вычислить коэффициенты последовательно по-одному. Для этого минимизируется последовательно ряд частных функционалов $\sum_N (\Phi'_N - L\theta_{ij})^2$. Уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$A_{ij} = \frac{\sum_N \Phi'_N L(x_N^i y_N^j)}{\sum_N (L(x_N^i y_N^j))^2}.$$

После вычисления очередной функции $\theta_{ij} = A_{ij} x^i y^j$ производится коррекция части в (1). $\Phi'_N = \Phi'^* - L\theta_{ij}$, где Φ'^* — предыдущее значение правой части во всех точках области.

Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока значения Φ'_N во всех точках не будут меньше заданной величины. Иными словами, происходит «обнуление» значений Φ'_N во всех N точках области. Таким образом, если бы точки сплошь покрывали всю область и границу, и Φ'_N во всех точках стало бы равным нулю, то задача была бы решена точно. Это могло бы потребовать бесконечного числа членов в разложении (2). Выбор конечного числа точек даже в том случае, если во всех точках Φ'_N получились равными нулю, приведет к появлению погрешностей. Это погрешности аппроксимации точного решения задачи приближенным решением (2). При этом число членов разложения в (2) получается в худшем случае того же порядка, что и число точек N . Процесс программирования задачи получается весьма простым, а процесс вычислений достаточно экономичным. Объем вычислений пропорционален N^2 . Облегчается также и анализ погрешностей.

Мы рассмотрели в общих чертах только один простой способ получения аналитических решений. Существует еще множество более сложных способов. Все эти способы не решают проблемы в целом. В каждом конкретном случае инженерной задачи приходится выбирать подходящий аналитический способ и, если такого не окажется, то переходить к одному из дискретных способов.

Таким образом, развитие дискретных и аналитических методов решения конструкторских задач идет параллельно.

Список литературы

1. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. Пер. с чешск. М., «Мир», 1969.
2. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
3. Годфри Д. Е. Р. Теория упругости и пластичности. «Будивельник», Киев, 1969.
4. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. М., «Наука», 1972.
5. Жуковский В. С. Основы теории теплопередачи. Л., «Энергия», 1969.
6. Карпушин В. Б. Вибрации и удары в радиоаппаратуре. М., «Сов. радио», 1971.
7. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., «Наука», 1973.
9. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судо-строение», 1972.
10. Справочник по теории упругости. «Будивельник», Киев, 1971.
11. Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е. Решения краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М., «Высшая школа», 1970.

Оглавление

От автора	3
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	6
1.1. В элементарном объеме	7
1.2. Гипотеза о свойствах среды	9
1.3. От части к целому	11
1.4. Пример с водой	13
1.5. Ближе к природе	18
1.6. Вперед — к бесконечно малым!	20
1.7. Аппроксимация	23
1.8. Что может высшая математика?	28
1.9. Назад — к конечным разностям	28
1.10. Как решать?	29
1.11. Подводные камни	31
1.12. Устойчивость	35
1.13. Разные разности	39
1.14. Разностная схема	41
1.15. Погрешности округления	44
2. ТЕПЛОВАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ	47
2.1. Теплопроводность, конвекция, лучеиспускание	48
2.2. Модель-сетка	51
2.3. Закон сохранения тепловой энергии	52
2.4. Формулировка задачи	56
2.5. Включаем питание	59
2.6. Первые выводы	61
2.7. Совершенствование модели	62
2.8. Неоднородные элементы модели	63
2.9. Более сложные границы	66
2.10. Где тонко...	70
2.11. От трехмерной сетки к двухмерной	74
2.12. Расчет теплового экрана	82
2.13. Узел за углом	85
3. МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИОКОНСТРУКЦИИ	87
3.1. Задача расчета вибрации	88
3.2. Закон парности и сложное напряженное состояние	91
3.3. Трудности при построении модели	94
3.4. Равновесие сил	95
3.5. Уравнения движения в перемещениях	99
3.6. Явная схема	109
3.7. Через границу	112
3.8. Монолитный блок РЭА	115
3.9. Элементы связей	117
3.10. Осреднение механических характеристик	121
3.11. Потери энергии на внутреннее трение	128
3.12. Подготовка исходных данных	134

3.13. Упрощение задачи	135
3.14. Модели плоских и коробчатых конструкций	137
3.15. Гипотеза прямых нормалей	137
3.16. Уравнение изгибных колебаний	137
3.17. Граничные условия	150
3.18. Учет инерции вращения	153
3.19. Модель коробки	159
3.20. Модель стержневого каркаса	162
3.21. Модель отдельного стержня	162
3.22. Уравнения движения перекрестий стержней	168
3.23. Случай стержней прямоугольного сечения	172
3.24. Допустимый шаг по времени из условия устойчивости	175
3.25. Неявные схемы	181
Перспективы	185
Список литературы	190

ИБ № 343

Евгений Николаевич МАКВЕЦОВ

МОДЕЛИ ИЗ КУБИКОВ

Редактор Ю. И. Суханов
 Художественный редактор А. Н. Алтуний
 Обложка художника Б. К. Шаповалова
 Технический редактор Г. З. Кузнецова
 Корректор Н. М. Давыдова

Сдано в набор 12.12.78 Подписано в печать 03.04.78 Т-07526
 Формат 84×108/32 Бумага типографская № 1 Гарнитура литер.
 Печать высокая Объем 10,08 усл. печ. л., 9,938 уч.-изд. л.
 Тираж 21 000 экз. Зак. 421 Цена 55 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 «Союзполиграфпрома»
 при Государственном Комитете Совета Министров СССР
 по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
 Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

55 к.

