

Л. А. ВАЙНШТЕЙН  
В. Д. ЗУБАКОВ

ВЫДЕЛЕНИЕ  
СИГНАЛОВ  
НА ФОНЕ  
СЛУЧАЙНЫХ  
ПОМЕХ

Л. А. ВАЙНШТЕЙН, В. Д. ЗУБАКОВ

ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ  
НА ФОНЕ  
СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СОВЕТСКОЕ РАДИО“

---

МОСКВА 1960



Книга содержит изложение статистической теории оптимальных приемников, обнаруживающих сигналы с различными свойствами на фоне случайных помех, а также измеряющих параметры этих сигналов. В качестве введения изложена теория линейных фильтров, которые оптимальным образом отфильтровывают «полезные» случайные процессы от мешающих или же выделяют сигналы известной формы из случайных помех. Основное внимание уделено задачам, представляющим интерес для радиолокации. В книге отражены некоторые новые результаты, полученные авторами.

Книга предназначена для радиофизиков и радиоинженеров, имеющих дело с флуктуациями и помехами, и может служить в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов, изучающих статистическую радиофизику, теорию информации или случайные процессы в радиотехнических устройствах.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга посвящена проблемам выделения сигналов на фоне помех, имеющих случайный характер. Под «выделением» мы понимаем как полное восстановление неизвестного (случайного) сигнала, так и обнаружение сигналов известной формы вместе с измерением некоторых неизвестных параметров таких сигналов. Основное внимание уделено проблемам, представляющим интерес для радиолокации, поэтому наряду с обычными помехами, аналогичными собственным шумам приемника, учтены и помехи, обусловленные хаотическими отражениями от многочисленных местных предметов. Это заставляет с самого начала не ограничиваться помехами типа «белого шума», а рассматривать коррелированные помехи, что придает изложению большую общность и даже простоту, поскольку математическая трактовка «чистого» белого шума связана с некоторыми трудностями.

Исторически дело сложилось так, что сначала было изучено поведение сигналов и помех в конкретных схемах, т. е. накоплен большой материал по *анализу* различных систем. В частности, было детально исследовано прохождение сигналов и помех через линейные и некоторые нелинейные звенья радиоприемных устройств и в связи с этим рассмотрены разнообразные возможности отделения сигналов от помех. Лишь в сравнительно недавнее время стали решаться проблемы *синтеза* оптимальных систем, осуществляющих выделение сигналов из их смеси с помехами благодаря максимальному использованию различий в их свойствах. Рассмотрение таких проблем и составляет основное содержание данной книги.

Интересно, что часто оптимальные схемы, получаемые в результате решения задач о синтезе, совпадают или весьма близки к схемам, используемым на практике и разработанным на основе простых интуитивных сообра-

жений. Это обстоятельство, с которым мы будем неоднократно сталкиваться на протяжении всей книги, ни в коей мере не умаляет значения проблем синтеза: только последние могут нам дать гарантию того, что при данных предпосылках лучшего устройства создать нельзя. Иначе говоря, в этих случаях теоретически оптимальные схемы избавляют нас от рассмотрения многочисленных вариантов подобно тому, как закон сохранения энергии делает излишним разбор различных конструкций вечного двигателя.

При отборе материала для данной книги мы старались ограничиваться вопросами, решение которых можно считать в какой-то степени завершенным. В силу этого пришлось поступиться многими интересными и практически важными задачами, достаточно полное и строгое решение которых в настоящее время привести нельзя.

Книга состоит из трех частей. Первая часть, посвященная оптимальным линейным фильтрам, начинается с изложения теории оптимальной фильтрации, предложенной Н. Винером и являющейся первой «синтетической» теорией интересующего нас типа. Хотя этот круг идей в значительной степени близок к автоматике, тем не менее как сама постановка задачи, так и ряд получаемых в этой теории результатов представляют существенный интерес для радиотехники. Другие фильтры, исследованные в этой части книги, также являются оптимальными среди линейных фильтров, причем в качестве критерия оптимума используется отношение сигнал/помеха. Характеристики оптимальных линейных фильтров полностью определяются корреляционной функцией помех и корреляционными свойствами или формой сигналов.

Во второй части систематически изложены основные понятия и результаты теории оптимальных приемников. Это — центральная часть книги, так что первая часть является, в сущности, введением, которое должно облегчить читателю изучение второй части. Во второй части рассматриваются задачи об оптимальном обнаружении полезного сигнала на фоне помехи — нормального (гауссова) стационарного случайного процесса. Здесь приходится решать целый ряд задач, представляющих интерес для радиолокации, начиная с самых простых и кончая самыми сложными, в соответствии с предположениями, какие мы делаем относительно сигналов. Некоторые задачи об измерении параметров полезного сигнала при наличии помех также включены во вторую часть книги; они довольно не-

многочисленны, поскольку большая часть возникающих здесь вопросов еще ожидает адекватной математической трактовки.

Во избежание недоразумений отметим, что оптимальные фильтры и оптимальные приемники исследованы в книге лишь с точки зрения тех математических операций, которые фильтры и приемники должны производить над принимаемой смесью сигналов и помех; вопросы, связанные с практическим осуществлением соответствующих схем, остаются за пределами данной книги.

Третья часть книги содержит вспомогательный материал — как математический, так и физический, — используемый в предыдущих главах книги. Более детальное представление о тематике книги дает ее оглавление.

Хотя авторы стремились всюду, где это возможно, упрощать теоретический аппарат, чтение книги потребует от читателя серьезной математической подготовки, в частности знания основ теории вероятностей. Можно, однако, надеяться, что принятое нами изложение, в котором трудность рассматриваемых задач возрастает постепенно, облегчит читателю работу над книгой. Авторы ставили также своей целью в процессе рассмотрения отдельных статистических задач выявить значение и точный смысл параметра, являющегося обобщением обычного отношения сигнал/помеха.

Первая и третья части книги, а также гл. VII, написаны Л. А. Вайнштейном, вторая часть (кроме гл. VII) — В. Д. Зубаковым. Глава VIII написана совместно. Общее редактирование книги произведено Л. А. Вайнштейном. В книгу включены некоторые новые результаты, полученные авторами.

Авторы приносят свою благодарность Ю. Б. Кобзареву, беседы с которым привлекли их внимание к ряду новых проблем и в значительной степени стимулировали работу над данным кругом вопросов.

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ

---

### ГЛАВА I

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача об отделении полезных сигналов от помех различного типа может быть поставлена по-разному. В этой и следующей главах мы будем рассматривать сигнал и помеху как случайные процессы. Тогда наибольший интерес для нас представляет задача о фильтрации, т. е. задача о выделении сигнала в наиболее «чистом» виде из его «смеси» с помехой. Физически ясно, что полное отделение сигнала от помехи может быть достигнуто лишь при радикальном различии их свойств; в общем случае, как мы увидим далее, даже оптимальный фильтр воспроизводит полезный сигнал с некоторой ошибкой.

Иногда задачу о фильтрации целесообразно понимать шире. Например, часто представляет интерес не сам сигнал, а его производная или интеграл по времени; тогда соответствующий фильтр следует подобрать таким образом, чтобы он воспроизводил (с наименьшей ошибкой) продифференцированный или проинтегрированный полезный сигнал. Представляет также интерес задача о прогнозировании или экстраполяции сигнала, т. е. задача о предсказании будущих значений сигнала на основе его поведения в прошлом и его статистических свойств. Задача об экстраполяции сигнала имеет смысл как при наличии помех, так и при их отсутствии.

Математически задача фильтрации может быть сформулирована следующим образом. Пусть на вход некоторой системы  $K$  (фильтра) поступает смесь полезного сигнала  $m(t)$  с помехой  $n(t)$ , так что

$$f(t) = m(t) + n(t), \quad (1.01)$$



где  $f(t)$  — данный процесс (сумма сигнала и помехи), или входная функция времени  $t$ . Как полезный сигнал  $m(t)$ , так и помеха  $n(t)$  предполагаются случайными процессами (случайными функциями  $t$ ).

Система  $K$  производит над функцией  $f(t)$  некоторые математические операции, в результате чего на выходе получаем функцию  $x(t)$  (выходная функция). Схематически это изображено на рис. 1.

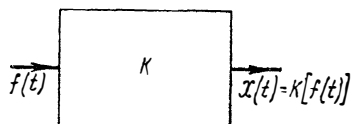


Рис. 1. Схематическое изображение фильтра  $K$ .

Можно сказать, что выходная функция  $x(t)$  есть результат применения некоторого оператора  $K$  к входной функции  $f(t)$ . Возникает задача о таком подборе оператора

$K$ , чтобы на выходе получить некоторую функцию  $h(t)$  с наименьшей ошибкой воспроизведения. Функция  $h(t)$  есть полезный сигнал в некоторой преобразованной форме, так что можно записать

$$h(t) = L[m(t)], \quad (1.02)$$

где  $L$  — известный математический оператор. В задаче о простой фильтрации нужно воспроизвести полезный сигнал; в этом случае

$$h(t) = m(t), \quad (1.03)$$

и  $L$  есть «единичный» оператор, оставляющий функцию без изменений.

Разность

$$\varepsilon(t) = x(t) - h(t) \quad (1.04)$$

можно назвать мгновенной ошибкой воспроизведения.

Ясно, что значения  $\varepsilon(t)$  будут колебаться с течением времени. «Интенсивность» этих колебаний можно характеризовать средним значением (математическим ожиданием) ее квадрата, обозначаемым через  $\overline{\varepsilon^2(t)}$ . Тем самым в теорию вводятся статистические (вероятностные) представления, причем статистически рассматривается не только помеха, но и полезный сигнал.

Когда помеха отсутствует ( $n(t) \equiv 0$ ), то представляет интерес лишь задача о прогнозировании — о предсказании сигнала через некоторый промежуток времени  $s$ . В этой задаче

$$h(t) = m(t + s). \quad (1.05)$$

Прогноз может быть осуществлен или по всему «прошлому» функции  $m(t)$  или по части прошлого. В том и другом случае опираются на статистические свойства функции  $m(t)$ . Обычно предполагают, что они заданы заранее — известны из предыдущих статистических исследований данного случайного процесса  $m(t)$  или подобного ему.

Наиболее важные статистические характеристики случайного процесса  $m(t)$  — это среднее значение  $\overline{m(t)}$  и корреляционная функция  $R_m(\tau)$ , определяемая формулой

$$R_m(\tau) = \overline{[m(t) - \overline{m(t)}][m(t - \tau) - \overline{m(t - \tau)}]}. \quad (1.06)$$

При  $\overline{m(t)} \equiv 0$ , эта формула упрощается и принимает вид

$$R_m(\tau) = \overline{m(t)m(t - \tau)}. \quad (1.07)$$

Корреляционная функция в какой-то степени характеризует статистическую связь между значением функции  $m$  в моменты времени  $t$  и  $t - \tau$ , причем  $\tau$  может быть и положительным и отрицательным. В самом деле, если значения  $m(t)$  и  $m(t - \tau)$  можно считать статистически независимыми, то среднее значение произведения в формулах (1.06) и (1.07) равно произведению средних значений, а это дает  $R_m(\tau) = 0$ . Наоборот, для *нормальных* случайных процессов из равенства  $R_m(\tau) = 0$  следует статистическая независимость  $m(t)$  и  $m(t - \tau)$  (см. гл. IX). Более полно статистическая связь характеризуется отношением  $\frac{R_m(\tau)}{R_m(0)}$  — коэффициентом корреляции.

В дальнейшем мы будем считать, что средние значения всех рассматриваемых функций тождественно равны нулю. Это не ограничивает общности: если, например,  $\overline{m(t)} \neq 0$ , то мы вводим новую случайную функцию  $\Delta m(t) = m(t) - \overline{m(t)}$  и вместо  $m(t)$  рассматриваем  $\Delta m(t)$ . Действительно, если с помощью функции  $\overline{m(t)}$  передается некоторое сообщение, то среднее значение  $\overline{m(t)}$  никакой информации не переносит и по существу роли не играет. При отсеивании помехи  $n(t)$  важно уметь бороться лишь с колебаниями  $n(t)$  вокруг среднего значения  $\overline{n(t)}$ , поскольку известный «средний уровень» помех  $\overline{n(t)}$  подавляется без всякого труда.

Функцию  $R_m(\tau)$  называют также функцией автокорреляции случайной функции (процесса)  $m(t)$  в отличие

от взаимной корреляционной функции, которая будет введена дальше.

При увеличении  $\tau$  статистическая связь между значениями  $m(t)$  и  $m(t - \tau)$  вообще говоря ослабевает и в пределе при  $|\tau| \rightarrow \infty$  стремится к нулю, так что эти два значения становятся статистически независимыми. Поэтому функция корреляции стремится при  $|\tau| \rightarrow \infty$  к нулю и принимает наибольшее значение, когда  $\tau = 0$  (см. ниже § 3).

Случайный процесс можно характеризовать и более сложными величинами — вероятностями того, что в моменты  $t_1, t_2, \dots$  соответствующие значения  $m(t_1), m(t_2), \dots$  лежат в определенных интервалах. Однако в проблемах линейной фильтрации и линейного прогнозирования эти вероятности не нужны, поскольку все определяется функциями корреляции.

Выше мы неявно предполагали, что случайный процесс  $m(t)$  однороден во времени, или стационарен, поэтому  $R_m(\tau)$  зависит только от  $\tau$ , но не от  $t$ . Именно в силу однородности процесса во времени все средние значения —  $m(t)$ ,  $m^2(t)$ ,  $m(t)m(t - \tau)$  и т. д. должны быть независимыми от момента  $t$ . В частности, мы должны иметь

$$\overline{m(t)m(t - \tau)} = \overline{m(0)m(-\tau)} = \overline{m(\tau)m(0)}. \quad (1.08)$$

Из последних соотношений вытекает важное свойство автокорреляционной функции любого случайного процесса  $m(t)$  — ее четность

$$R_m(\tau) = R_m(-\tau). \quad (1.09)$$

Нас будет интересовать больше всего задача отфильтровывания помех. В связи с этим мы рассмотрим три типа фильтров\*.

Фильтр I типа работает так. Входной процесс  $f(t)$  записывается (запоминается) в течение некоторого времени (теоретически при  $-\infty < t < \infty$ ), а потом обрабатывается, т. е. подвергается какой-то математической операции, в результате которой на выходе системы мы получаем функцию  $x(t)$ . Такой фильтр можно уподобить счетнорешающему устройству, которое записывает, обрабатывает и дает результаты в виде кривой или таблицы.

\* Данная классификация фильтров не является общепринятой и введена нами для удобства изложения.

В фильтре II типа запись сигнала, его обработка и выдача не разделены во времени (по крайней мере значительно), а происходят непрерывно, и выходная функция  $x(t)$  вырабатывается по мере поступления входных данных на основании значений функции  $f(t)$  во все предыдущие моменты. Фильтр II типа может быть тоже счетнорешающим устройством. В принципе он может быть осуществлен и без счетнорешающей техники, как обычный радиотехнический (частотный) фильтр. В частности, линейный фильтр II типа может быть осуществлен в виде схемы, составленной из сопротивлений, индуктивностей и емкостей. Тогда, например,  $f(t)$  есть напряжение на входе,  $x(t)$  — на выходе искомого четырехполюсника,  $K$  — соответствующий ему оператор. Для линейных систем оператор  $K$  просто связан с частотной характеристикой четырехполюсника (см. § 2).

Преимущества фильтра II типа — простота изготовления, большая скорость выдачи данных. Преимущества фильтров I типа — более полное использование входного сигнала и, следовательно, более эффективное «отсеивание» помех. Сравнение обоих способов фильтрации (обоих фильтров) будет дано в гл. II; заметим, что резкой границы между ними нет (см. конец § 14).

Таким образом, для образования  $x(t)$  фильтр I типа использует значения  $f(t')$  при всех возможных значениях  $t'$ , а именно:

$$-\infty < t' < \infty, \quad (I)$$

в то время как фильтр II типа использует полубесконечный интервал времени

$$-\infty < t' \leq t, \quad (II)$$

т. е. настоящий момент ( $t' = t$ ) и все „прошлое“ ( $t' < t$ ). Фильтром III типа можно назвать устройство, использующее лишь конечный интервал, относящийся к прошлому,

$$t - T \leq t' \leq t, \quad (III)$$

т. е. имеющее «память» конечной длительности  $T$ . Теорию фильтров III типа мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Проблема фильтрации часто соединяется с задачей о прогнозировании полезного сигнала [формула (1.05)] с наименьшей ошибкой. Эта проблема тем более актуальна, что фильтрация требует времени, после которого полученные данные могут уже устареть. Прогнозирование в ка-

кой-то степени компенсирует потерю времени на фильтрацию. Ясно, что проблема прогнозирования возникает только в теории фильтров II и III типа, поскольку для фильтров I типа прогнозирование не отличается от фильтрации.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные фильтры, осуществляющие над входным процессом только линейные операции. Другими словами, мы будем искать наилучшую преобразующую систему с линейным оператором  $K$ . Его можно записать в интегральном виде следующим образом:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t') f(t-t') dt' \quad (1.10)$$

или

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-t') f(t') dt'. \quad (1.11)$$

Из этих формул видно, что значение  $x(t)$  на выходе преобразующей системы линейно комбинируется из значений входной функции  $f(t)$  во все моменты времени. Точнее, при образовании  $x(t)$  в момент  $t$  по формуле (1.11) используются значения  $f(t')$  в предыдущие ( $t' < t$ ) и последующие ( $t' > t$ ) моменты времени, причем эти значения используются с «весом»  $k(t-t') dt'$ , зависящим от разности  $t-t'$ . Фильтр, работающий по формуле (1.10) или (1.11), называют *стационарным* линейным фильтром. Он обладает следующим свойством: если функции  $f(t)$  соответствует некоторая функция  $x(t)$ , то функции  $f(t+s)$  соответствует функция  $x(t+s)$ , т. е. при сдвиге входной функции по оси времени выходная функция сдвигается точно так же. Ясно, что в проблемах фильтрации *стационарных* случайных процессов, не изменяющих своих свойств при временных сдвигах, фильтры также должны быть стационарны. Нестационарному линейному фильтру соответствует более общее линейное преобразование вида

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t, t') f(t') dt', \quad (1.12)$$

которое мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Заметим, что формулы (1.10)–(1.12) не являются еще самой общей записью линейного преобразования. Действительно, например, в тривиальной задаче о фильтрации при условии  $n(t) \equiv 0$  мы имеем  $L=1$  и оптимальный фильтр



производит тривиальную операцию  $x(t) = f(t) = m(t)$  с нулевой ошибкой. Однако эту операцию можно записать в интегральном виде только с помощью несобственной функции, так называемой дельта-функции  $\delta(t)$ , обладающей свойствами

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ при } t \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt &= 1 \text{ при любом } \varepsilon > 0, \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F(t) \delta(t) dt &= F(0) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

для любой функции  $F(t)$ . Полагая  $k(t) = \delta(t)$ , мы и получим по формуле (1.10)  $x(t) = f(t)$ . Однако использование несобственных функций часто нежелательно. Представление теории фильтрации в виде, исключающем применение несобственных функций, будет дано в § 5.

Для фильтра II типа функция  $k(t)$  должна удовлетворять соотношению

$$k(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (1.14)$$

и вместо формул (1.10) и (1.11) мы будем иметь

$$x(t) = \int_0^{\infty} k(t') f(t - t') dt' = \int_{-\infty}^t k(t - t') f(t') dt'. \quad (1.15)$$

Для фильтра III типа

$$k(t) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } t > T, \quad (1.16)$$

так что

$$x(t) = \int_0^T k(t') f(t - t') dt' = \int_{t-T}^t k(t - t') f(t') dt'. \quad (1.17)$$

Вводя функцию

$$g(t) = k(-t), \quad (1.18)$$

можно переписать формулу (1.17) так:

$$x(\tau) = \int_{-T}^0 g(t) f(t + \tau) dt = \int_{\tau-T}^{\tau} g(t - \tau) f(t) dt. \quad (1.19)$$

Интегралы (1.19) являются аналогом взаимной корреляционной функции (ср. далее § 2), причем в них произведе-

дение фиксированной функции  $g$  на случайную функцию  $f$  не усредняется, а интегрируется по времени; с подобными выражениями мы встретимся в гл. III.

Таким образом, линейный фильтр III типа является своеобразным коррелятором — прибором, дающим результат интегрирования произведения двух функций за промежуток времени  $T$  — заданной функции  $g$  и входной функции  $f$ . Фильтры I и II типа совершают ту же операцию по бесконечному промежутку времени, как это показывают формулы (1.10) и (1.15).

## § 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА

Исследуем свойства фильтра К, обеспечивающего наивысшую точность воспроизведения полезного сигнала при известных свойствах сигнала и помехи. Будем считать, что полезный сигнал и помеха представляют собой стационарные случайные процессы. Точность воспроизведения будем характеризовать средней квадратичной ошибкой  $\bar{\varepsilon}^2$ , определяемой формулой (1.04). Нашу задачу можно формулировать так: найти такой фильтр К, чтобы средняя квадратичная ошибка воспроизведения нужного нам сигнала  $h(t)$  выходной функцией  $x(t)$  фильтра К была минимальной. Такой фильтр называется оптимальным. Решение задачи, как мы увидим далее, сводится к решению интегрального уравнения, определяющего функцию  $k(t)$  искомого оптимального фильтра.

Итак, имеется линейный фильтр, на вход которого поступает функция  $f(t)$ . На выходе получаем функцию

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (2.01)$$

Соответствующая ошибка воспроизведения равна

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) f(t - \tau) d\tau - h(t). \quad (2.02)$$

Квадрат этой ошибки равен

$$\varepsilon^2(t) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) f(t - \tau) d\tau \right]^2 - 2h(t) \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) f(t - \tau) d\tau + h^2(t).$$

Преобразовывая квадрат первого члена справа в двойной интеграл, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) k(\sigma) f(t-\tau) f(t-\sigma) d\tau d\sigma - \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) h(t) f(t-\tau) d\tau + h^2(t), \end{aligned} \quad (2.03)$$

где множитель  $h(t)$  введен под знак интеграла, поскольку он не зависит от переменной интегрирования  $\tau$ .

Среднее значение  $\varepsilon^2(t)$  равно

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) k(\sigma) \overline{f(t-\tau) f(t-\sigma)} d\tau d\sigma - \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) \overline{h(t) f(t-\tau)} d\tau + \overline{h^2(t)}. \end{aligned} \quad (2.04)$$

Введем обозначения

$$R_f(\tau - \sigma) = \overline{f(t-\tau) f(t-\sigma)}, \quad (2.05)$$

$$R_{hf}(\tau) = \overline{h(t) f(t-\tau)}. \quad (2.06)$$

Здесь  $R_f(\tau)$  есть по определению (1.07) автокорреляционная функция случайного процесса (1.01) на входе фильтра К, являющаяся согласно формуле (1.09) четной функцией своего аргумента. Функция  $R_{hf}(\tau)$  называется взаимной корреляционной функцией стационарных случайных процессов  $h(t)$  и  $f(t)$ . Она отображает статистическую связь случайных величин  $h(t)$  и  $f(t-\tau)$ , средние значения которых предполагаются равными нулю.

Корреляционная функция  $R_h(\tau)$  определяется формулой

$$R_h(\tau) = \overline{h(t) h(t-\tau)}, \quad (2.07)$$

откуда при  $\tau = 0$  получаем

$$R_h(0) = \overline{h^2(t)}, \quad (2.08)$$

Окончательно средний квадрат ошибки запишется в виде

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma - 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) R_{hf}(\tau) d\tau + R_h(0). \quad (2.09)$$

Он зависит не от самих функций  $h(t)$  и  $f(t)$ , а от их корреляционных функций.

При каком же условии функция  $k(t)$  обращает выражение (2.09) в минимум? Покажем, что необходимое и достаточное условие минимальности  $\bar{\varepsilon}^2$  заключается в том, что функция  $k(t)$  является решением интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma = R_{hf}(\tau). \quad (2.10)$$

Пусть оптимальный фильтр имеет функцию  $k(\tau)$  и обеспечивает минимум средней квадратичной ошибки  $E = \bar{\varepsilon}^2$ . Всякий другой фильтр пусть имеет функцию  $k(\tau) + \delta k(\tau)$  и ошибку  $E' = \bar{\varepsilon}'^2$ . Выясним, при каком  $k(\tau)$  средняя квадратичная ошибка  $E'$  будет всегда больше  $E$ .

Подставляя в формулу (2.09) вместо  $k(\tau)$  функцию  $k(\tau) + \delta k(\tau)$ , получим

$$E' = \iint_{-\infty}^{\infty} [k(\tau) + \delta k(\tau)] [k(\sigma) + \delta k(\sigma)] R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma - \\ - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [k(\tau) + \delta k(\tau)] R_{hf}(\tau) d\tau + R_h(0)$$

или

$$E' = \iint_{-\infty}^{\infty} k(\tau) k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma - 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) R_{hf}(\tau) d\tau + R_h(0) + \\ + \iint_{-\infty}^{\infty} k(\tau) \delta k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma + \iint_{-\infty}^{\infty} \delta k(\tau) k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma - \\ - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta k(\tau) R_{hf}(\tau) d\tau + \iint_{-\infty}^{\infty} \delta k(\sigma) \delta k(\tau) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma.$$

Сумма трех интегралов в первой строчке правой части последней формулы равна  $E$ . Первый и второй двойные интегралы во второй строчке равны вследствие того, что функция  $R_f(\tau - \sigma)$  — четная. Поэтому выражение для  $E'$  запишется в виде

$$E' = E + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta k(\tau) d\tau \left[ \int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma - R_{hf}(\tau) \right] + J, \quad (2.11)$$

где слагаемое  $J$  равно

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta k(\tau) \delta k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta k(\tau) \delta k(\sigma) \overline{f(t - \tau) f(t - \sigma)} d\tau d\sigma = \\
 &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta k(\tau) f(t - \tau) d\tau \right]^2, \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

откуда видно, что

$$J \geq 0. \quad (2.13)$$

Для того чтобы ошибка, соответствующая функции  $k(\tau)$ , была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы квадратная скобка в первом интеграле правой части формулы (2.11) была равна нулю, т. е. выполнялось интегральное уравнение (2.10). Если эта квадратная скобка отличается от нуля, то при надлежащем выборе функции  $\delta k(\tau)$  интеграл по  $\tau$  будет отличен от нуля, например отрицателен. Тогда получается, что  $E' < E$ , ибо при достаточно малых  $\delta k(\tau)$  квадратичным слагаемым  $J$  в равенстве (2.11) можно пренебречь, и функции  $k(\tau)$  соответствует неоптимальный фильтр. Если же интеграл положительный, то, переменяя знак  $\delta k(\tau)$ , получим то же самое.

Отсюда видна необходимость того, чтобы функция  $k(\tau)$  оптимального фильтра удовлетворяла уравнению (2.10). Достаточность вытекает из того, что при выполнении уравнения (2.10) выражение (2.11) для средней квадратичной ошибки принимает вид

$$E' = E + J \quad (2.14)$$

и в силу неравенства (2.13)

$$E' \geq E, \quad (2.15)$$

т. е. фильтр  $K$  будет действительно оптимальным, всякий другой фильтр будет давать ошибку большую (или такую же).

Для того чтобы найти оптимальный фильтр, нужно решить интегральное уравнение (2.10) относительно неизвестной функции  $k(\tau)$ . Решение такого уравнения для фильтров II и III типа довольно сложно, поскольку тогда функция  $k(\tau)$  удовлетворяет дополнительным условиям (1.14) и



(1.16). Однако для фильтра I типа это уравнение решается, как мы сейчас увидим, довольно просто.

Введем функцию

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau, \quad (2.16)$$

соответствующую некоторой корреляционной функции  $R(\tau)$ . Тогда, пользуясь интегральным преобразованием Фурье, можно написать

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega) d\omega. \quad (2.17)$$

Функция  $S(\omega)$  имеет весьма глубокий физический смысл, определяемый теоремой Хинчина (§ 3); мы ее будем называть спектральной функцией или спектральной интенсивностью.

Введем еще функцию

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} k(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Тогда на основании преобразования Фурье имеем:

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K(\omega) d\omega. \quad (2.19)$$

Функция  $k(t)$  называется реакцией фильтра  $K$  на единичный импульс. В самом деле, если в формуле (1.11) задать входную функцию  $f(t)$  в виде единичного импульса, или, что то же самое, дельта-функции  $\delta(t)$ , определяемой формулами (1.13), то мы получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-t') \delta(t') dt' = k(t). \quad (2.20)$$

Функция  $K(\omega)$  называется коэффициентом передачи или комплексной частотной характеристикой\* фильтра  $K$ . Это

---

\* Функцию  $K(\omega)$  мы для краткости часто будем называть просто частотной характеристикой, хотя в радиотехнике этот термин часто применяется к абсолютной величине  $K(\omega)$ .

название оправдывается следующим образом. Пусть на вход линейного фильтра  $K$  подается функция

$$f(t) = f_{\omega} e^{i\omega t}, \quad (2.21)$$

тогда на его выходе мы получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t') f_{\omega} e^{i\omega(t-t')} dt' = f_{\omega} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} k(t') e^{-i\omega t'} dt'.$$

Отсюда видно, что функция  $x(t)$  равна

$$x(t) = x_{\omega} e^{i\omega t}, \quad (2.22)$$

где

$$x_{\omega} = K(\omega) f_{\omega}. \quad (2.23)$$

Величины  $f_{\omega}$  и  $x_{\omega}$  можно назвать комплексными амплитудами входной и выходной функций; коэффициент передачи  $K(\omega)$  есть коэффициент пропорциональности между этими амплитудами. Как всегда при употреблении комплексных обозначений, физический смысл имеют не сами комплексные выражения (2.21) и (2.22), а их вещественные части

$$f(t) = \operatorname{Re} \{ f_{\omega} e^{i\omega t} \}, \quad x(t) = \operatorname{Re} \{ x_{\omega} e^{i\omega t} \}, \quad (2.24)$$

определяющие установившиеся синусоидальные колебания частоты  $\omega$  на входе и выходе фильтра  $K$ .

Теперь мы сможем без труда решить интегральное уравнение (2.10). Для этого умножаем обе его части на  $e^{-i\omega\tau}$  и интегрируем по  $\tau$  от  $-\infty$  до  $\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{hf}(\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

Произведя замену переменной по формуле  $t = \tau - \sigma$ , преобразуем левую часть уравнения (2.25) к виду

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f(\tau - \sigma) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\sigma} k(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} R_f(t) dt = K(\omega) S_f(\omega). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Интеграл в правой части уравнения (2.25), согласно принятому нами обозначению, есть  $S_{hf}(\omega)$ . Поэтому уравнение (2.25) принимает вид

$$K(\omega) S_f(\omega) = S_{hf}(\omega), \quad (2.27)$$

и коэффициент передачи оптимального фильтра

$$K(\omega) = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f(\omega)} \quad (2.28)$$

весьма просто определяется спектральными функциями  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$ .

Выражение (2.09) для средней квадратичной ошибки оптимального фильтра в силу уравнения (2.10) принимает вид

$$\overline{\varepsilon^2} = R_h(0) - \iint_{-\infty}^{\infty} k(\tau) k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma. \quad (2.29)$$

Пользуясь формулами (2.19) и (2.17), мы производим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} k(\tau) k(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} k(\tau) k(\sigma) d\tau d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau - \sigma)} S_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} k(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\sigma} k(\sigma) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) K(-\omega) S_f(\omega) d\omega, \\ & R_h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (2.30)$$

откуда

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_h(\omega) - K(\omega) K(-\omega) S_f(\omega)] d\omega. \quad (2.31)$$

Пользуясь формулой (2.28), получим

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_h(\omega) S_f(\omega) - S_{hf}(\omega) S_{hf}(-\omega)}{S_f(\omega)} d\omega, \quad (2.32)$$

где мы использовали четность функции

$$S_f(\omega) = S_f(-\omega), \quad (2.33)$$

вытекающую из четности функции  $R_f(\tau)$  [см. формулу (1.09) и § 3].

Рассмотрим задачу о простой фильтрации, когда

$$h(t) = m(t) \text{ и } K(\omega) = \frac{S_{mf}(\omega)}{S_f(\omega)}. \quad (2.34)$$

Будем для простоты считать, что полезный сигнал и помеха не имеют корреляционной связи, т. е.

$$R_{mn}(\tau) = \overline{m(t)n(t-\tau)} = 0. \quad (2.35)$$

Тогда корреляционные функции  $R_{mf}$  и  $R_f$  будут равны

$$\left. \begin{aligned} R_{mf}(\tau) &= \overline{m(t)f(t-\tau)} = \overline{m(t)m(t-\tau)} + \overline{m(t)n(t-\tau)} = R_m(\tau), \\ R_f(\tau) &= \overline{[m(t) + n(t)][m(t-\tau) + n(t-\tau)]} = R_m(\tau) + R_n(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

и поэтому

$$S_{mf}(\omega) = S_m(\omega), \quad S_f(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega). \quad (2.37)$$

Если учесть все это, то частотная характеристика (2.28) будет равна

$$K(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)}, \quad (2.38)$$

причем при  $S_m(\omega) = 0$  и  $S_n(\omega) = 0$  функцию  $K(\omega)$  можно выбрать произвольно, например положить равной нулю; то же относится к формулам (2.28) и (2.34).

Это — оптимальная частотная характеристика простой фильтрации при условии, что полезный сигнал и помеха некоррелированы. Средняя квадратичная ошибка (2.32) для данного фильтра равна

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(\omega)S_n(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)} d\omega. \quad (2.39)$$

Мы увидим в § 3, что  $S_m(\omega)$ ,  $S_n(\omega)$  и т. п. суть неотрицательные функции своего аргумента. Рассмотрим полученные соотношения в частных случаях. Предположим, что спектральные функции сигнала и помехи  $S_m(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  не перекрываются (рис. 2). Тогда формула (2.38) дает

$$\left. \begin{aligned} K(\omega) &= 1 \text{ при } S_m(\omega) \neq 0, \\ K(\omega) &= 0 \text{ при } S_m(\omega) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

и по формуле (2.39) получим

$$\overline{\varepsilon^2} = 0. \quad (2.41)$$

В этом случае фильтрация происходит без ошибок, и на выходе фильтра  $K$  воспроизводится в точности полезный

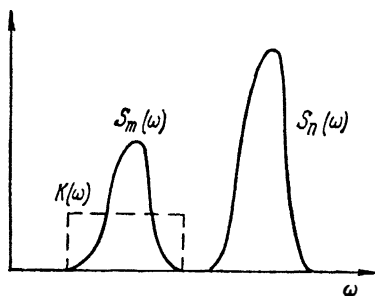


Рис. 2. Разделение случайных процессов с неперекрывающимися спектрами.

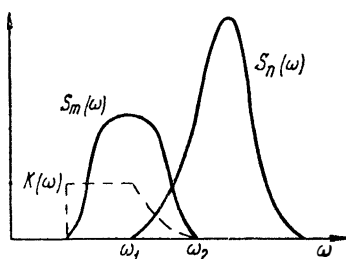


Рис. 3. Фильтрация в случае, когда спектр помехи частично перекрывает спектр полезного сигнала.

сигнал  $m(t)$ . Если же спектральные функции  $S_m(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  перекрываются, то фильтрация происходит с некоторой ошибкой. Так, например, если взять  $S_m(\omega)$  и  $S_n(\omega)$ , как на рис. 3, то  $K(\omega) = 1$  при  $\omega < \omega_1$ , а при  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  функция  $K(\omega)$  непрерывно спадает до нуля. Ошибка (2.38) при этом отлична от нуля. Она возникает как от пропускания части спектра помех (при  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ), так и от искажения полезного сигнала вследствие ослабления части его спектра в том же частотном диапазоне. Чем больше функция  $S_n(\omega)$  в диапазоне перекрытия  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  и чем меньше  $S_m(\omega)$  в этом же диапазоне, тем в меньшей степени этот диапазон должен пропускаться оптимальным фильтром.



Напомним, что эти результаты относятся к фильтрам I типа. Качественно их можно применять и к фильтрам II типа, но здесь будут некоторые особенности (см. гл. II).

Интересно рассмотреть, чему равна частотная характеристика оптимального фильтра при условии

$$S_n(\omega) \gg S_m(\omega), \quad (2.42)$$

т. е. когда спектральная интенсивность помех весьма велика по сравнению со спектральной интенсивностью сигналов (см., например, рис. 4). В этом случае приближенно имеем

$$K(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (2.43)$$

где мы пренебрегли членом  $S_m(\omega)$  в знаменателе формулы (2.38). В том же приближении формула (2.39) дает

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega) d\omega = R_m(0), \quad (2.44)$$

и согласно формуле (2.17)

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{m^2}, \quad (2.45)$$

т. е. средняя квадратичная ошибка на выходе оптимального фильтра будет равна среднему квадрату полезного сигнала.

В общем случае среднюю квадратичную ошибку можно назвать средней интенсивностью помех на выходе фильтра. Действительно, фильтр должен воспроизводить нужный сигнал  $h(t)$ , но на выходе получаем функцию  $x(t)$ , которая уклоняется от  $h(t)$  на величину  $\varepsilon(t)$ ; поэтому помехи на выходе естественно характеризовать их интенсивностью  $\varepsilon^2$ .

Мы показали выше, что интенсивность помех на выходе фильтра равна интенсивности сигнала, т. е. отношение сигнал/помеха на выходе равно 1, когда на входе помеха гораздо интенсивнее полезного сигнала и занимает

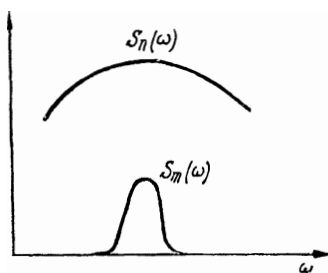


Рис. 4. Спектр помех, полностью перекрывающий спектр полезного сигнала и более интенсивный.

тот же частотный диапазон. Отсюда можно сделать ошибочный вывод, что оптимальный фильтр эффективно отделяет сигнал от сколь угодно интенсивной помехи. На самом деле процесс  $x(t)$  на выходе фильтра в этом случае весьма слаб, поскольку функция (2.43) мала, и ошибка (2.45) получается потому, что приближенно можно считать  $x(t) = 0$  и  $\varepsilon(t) = -m(t)$ . В радиотехнике часто бывает, что при отношении сигнал/помеха, равном единице, какое-то выделение полезного сигнала еще возможно благодаря тому, что сигнал по своим свойствам как-то отличается от помехи. При применении оптимального фильтра это различие в свойствах уже использовано, так что если отношение сигнал/помеха на выходе фильтра равно единице, то полезный сигнал фактически не выделяется.

Заметим, что из формул (2.29) и (2.39) легко вывести неравенство

$$\overline{\varepsilon^2} \leq \overline{m^2}, \quad (2.46)$$

показывающее, что при более благоприятных условиях фильтрации, т. е. при меньшей интенсивности помех, отношение сигнал/помеха на выходе получается больше единицы.

### § 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

В предыдущем параграфе спектральные интенсивности  $S(\omega)$  были введены формально. Физический смысл спектральных интенсивностей, соответствующих автокорреляционным функциям, вытекает из теоремы Хинчина, к изложению которой мы и переходим.

Из четности функции  $R_f(\tau)$  следует, что и сопряженная ей по Фурье функция  $S_f(\omega)$  тоже четная. Действительно, в силу соотношения (1.09) формула (2.16) принимает вид

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau R_f(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} \cos \omega \tau R_f(\tau) d\tau, \quad (3.01)$$

откуда

$$S_f(\omega) = S_f(-\omega). \quad (3.02)$$

Теорема Хинчина утверждает, что функция  $S_f(\omega)$  для любого случайного процесса  $f(t)$  не может принимать отрицательных значений, т. е.

$$S_f(\omega) \geq 0. \quad (3.03)$$

При этом оказывается, что произведение  $S_f(\omega) d\omega$  пропорционально интенсивности колебаний на выходе узкополосного фильтра, пропускающего лишь частотный диапазон  $(\omega, \omega + d\omega)$ , когда на вход фильтра подан процесс  $f(t)$ .

Из формулы (2.17) следует

$$R_f(0) = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega. \quad (3.04)$$

Величина  $R_f(0) = \overline{f^2}$  называется интенсивностью процесса  $f(t)$ . Так, например, если  $f(t)$  есть напряжение, приложенное к концам некоторого сопротивления, то величина  $\overline{f^2}$  пропорциональна средней мощности, выделяемой в этом сопротивлении. Правая часть равенства (3.04) — некоторый интеграл по частотам. Естественно отождествить каждый элемент этого интеграла с интенсивностью, приходящейся на данную полосу частот.

Для доказательства этого положения поступим следующим образом. Пропустим процесс  $f(t)$  через л-фильтр  $K$ . На выходе получим случайный

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t') f(t - t') dt', \quad (3.05)$$

интенсивность которого равна

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= \iint_{-\infty}^{\infty} k(t') k(t'') \overline{f(t - t') f(t - t'')} dt' dt'' = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} k(t') k(t'') R_f(t' - t'') dt' dt'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) K(-\omega) S_f(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (3.06)$$

где мы воспользовались первой формулой (2.30).

В силу вещественности функции  $k(t)$  из формулы (2.18) получаем следующее соотношение:

$$K(-\omega) = K^*(\omega), \quad (3.07)$$

где звездочка \* обозначает комплексно сопряженную величину. Отсюда

$$K(\omega) K(-\omega) = |K(\omega)|^2 \quad (3.08)$$

и

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (3.09)$$

Последняя формула связывает частотную характеристику фильтра  $K$ , спектральную функцию  $S_f(\omega)$  на входе и интенсивность колебаний на выходе фильтра.

Возьмем фильтр, частотная характеристика которого  $K(\omega) = 1$  при частотах, лежащих в промежутках  $(\omega, \omega + d\omega)$  и  $(-\omega - d\omega, -\omega)$ , и  $K(\omega) = 0$  при других частотах. Тогда формула (3.09) дает

$$\bar{x}^2 = S_f(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} + S_f(-\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = 2S_f(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.10)$$

Так как в последней формуле левая часть неотрицательна, то мы получим неравенство (3.03).

Взятый нами для вывода формулы (3.10) фильтр  $K$  пропускает без изменения амплитуды синусоидальные колебания в частотных диапазонах  $(\omega, \omega + d\omega)$  и  $(-\omega - d\omega, -\omega)$  и не пропускает колебаний с другими частотами [ср. формулу (2.23)]. Физический смысл спектральной функции  $S_f(\omega)$  также вытекает из формулы (3.10). Так как  $\omega$  — круговая частота (обычная частота равна  $\frac{\omega}{2\pi}$ ), то  $S_f(\omega)$  — интенсивность колебаний, приходящаяся на единичную полосу частот  $\left(\frac{d\omega}{2\pi} = 1 \text{ гц, например}\right)$ , если различать положительные и отрицательные частоты. Если рассматривать только положительные частоты, т. е. писать формулы (3.04) и (3.09) в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_f(\omega) d\omega, \\ \bar{x}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

то на спектральный интервал в 1 гц приходится интенсивность  $2S_f(\omega)$ . Отсюда и вытекает название спектральной интенсивности для функции  $S_f(\omega)$ .

Формулы (2.17) и (3.03) позволяют вывести неравенство

$$|R_f(\tau)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega,$$

т. е.

$$|R_f(\tau)| \leq R_f(0). \quad (3.12)$$

Поэтому функция корреляции при  $\tau = 0$  имеет наибольшее значение. Это соотношение можно доказать более просто, а именно с помощью неравенства

$$[f(t) \pm f(t - \tau)]^2 \geq 0$$

или

$$f^2(t) + f^2(t - \tau) \geq \pm 2f(t)f(t - \tau).$$

Образовывая среднее значение левой и правой частей этого соотношения, получаем неравенство

$$R_f(0) \geq \pm R_f(\tau), \quad (3.13)$$

равноценное неравенству (3.12).

Наряду с автокорреляционной функцией вводится еще взаимная функция корреляции. Для двух процессов  $m(t)$  и  $n(t)$  она определяется так:

$$R_{mn}(\tau) = \overline{m(t)n(t - \tau)}. \quad (3.14)$$

Она отражает статистическую связь двух разных процессов в два различных момента времени. Если эти два процесса независимы, корреляционная функция обращается в нуль.

Взаимные корреляционные функции в отличие от автокорреляционных функций не являются четными, но, как легко показать,

$$R_{mn}(\tau) = R_{nm}(-\tau), \quad (3.15)$$

где

$$R_{nm}(\tau) = \overline{n(t)m(t - \tau)}. \quad (3.16)$$

Действительно,

$$R_{nm}(-\tau) = \overline{n(t)m(t + \tau)} = \overline{n(t - \tau)m(t)},$$

откуда и следует равенство (3.15). Соотношение (3.15) переносится и на соответствующие спектральные функции

$$S_{mn}(\omega) = S_{nm}(-\omega). \quad (3.17)$$

В силу вещественности функции  $R_{mn}(\tau)$ , пользуясь интегралом Фурье

$$S_{mn}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mn}(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

нетрудно получить также соотношение

$$S_{mn}(-\omega) = S_{mn}^*(\omega). \quad (3.19)$$

Функция  $S_{mn}(\omega)$  в общем случае комплексна, поэтому она не допускает простого физического толкования. Чтобы уяснить себе ее смысл, возьмем случайный процесс  $f(t)$ , равный сумме двух процессов  $m(t)$  и  $n(t)$

$$f(t) = m(t) + n(t), \quad (3.20)$$

и вычислим функцию

$$\begin{aligned} R_f(\tau) &= \overline{[m(t) + n(t)][m(t - \tau) + n(t - \tau)]} = \\ &= R_m(\tau) + R_n(\tau) + R_{mn}(\tau) + R_{nm}(\tau). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Переходя к спектральным интенсивностям и пользуясь соотношениями (3.17) и (3.19), получим

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= S_m(\omega) + S_n(\omega) + S_{mn}(\omega) + S_{nm}(\omega) = \\ &= S_m(\omega) + S_n(\omega) + 2\operatorname{Re} S_{mn}(\omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Слагаемые  $S_m(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  по теореме Хинчина имеют четкий физический смысл, их сумма равна спектральной интенсивности  $S_f(\omega)$  при отсутствии корреляции между случайными процессами  $m(t)$  и  $n(t)$ . Дополнительное слагаемое  $2\operatorname{Re} S_{mn}(\omega)$  есть „интерференционная“ интенсивность, обусловленная статистической связью между  $m(t)$  и  $n(t)$ . Мнимая часть комплексной функции  $S_{mn}$  столь явного физического смысла не имеет.

Рассмотрим примеры автокорреляционных функций и соответствующих им спектральных интенсивностей. Обозначая через  $\alpha$  некоторый параметр, имеющий размерность частоты, мы имеем пары функций

$$R(\tau) = R(0)e^{-\alpha|\tau|}, \quad S(\omega) = \frac{2\alpha R(0)}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (3.23)$$

и наоборот

$$R(\tau) = \frac{R(0)}{1 + \alpha^2\tau^2}, \quad S(\omega) = \frac{\pi R(0)}{\alpha} e^{-\frac{|\omega|}{\alpha}}. \quad (3.24)$$

Формулы (3.23) всего легче проверить, задавая функцию  $R(\tau)$  и вычисляя  $S(\omega)$  по (2.16), а формулы (3.24) — задавая  $S(\omega)$  и используя соотношение (2.17). В обоих случаях

функции  $S(\omega)$  удовлетворяют условию (3.03). При гауссовой форме корреляционной функции  $R(\tau)$  спектральная интенсивность также имеет гауссову форму

$$R(\tau) = R(0) e^{-\frac{\alpha^2 \tau^2}{2}}, \quad S(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi} R(0)}{\alpha} e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}}. \quad (3.25)$$

Последняя пара функций  $R$  и  $S$

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= R(0) \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}, & S(\omega) &= \frac{\pi R(0)}{\omega_0} \text{ при } -\omega_0 < \omega < \omega_0, \\ & & S(\omega) &= 0 \quad \text{при других } \omega \end{aligned} \right\} (3.26)$$

легче всего проверяется с помощью формулы (2.17). Она интересна тем, что в ней нельзя поменять местами функции  $R$  и  $S$ , как в формулах (3.23) и (3.24). В самом деле, полагая

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= R(0) \quad \text{при } -\tau_0 < \tau < \tau_0, \\ R(\tau) &= 0 \quad \text{при других } \tau, \end{aligned} \right\} (3.27)$$

мы получим функцию  $S(\omega)$ , пропорциональную  $\frac{\sin \omega \tau_0}{\omega \tau_0}$  и поэтому принимающую отрицательные значения, чего по доказанному выше условию (3.03) быть не может. Отсюда видно, что теорема Хинчина накладывает определенные ограничения на автокорреляционную функцию  $R(\tau)$ : не всякая четная функция  $\tau$  может быть корреляционной функцией, а лишь такая, которой соответствует неотрицательная спектральная интенсивность.

Функции  $R$  и  $S$  в примерах (3.23 — 3.25) имеют максимум при  $\tau = 0$  и  $\omega = 0$ , в обе стороны от которого они монотонно убывают. Если назвать временем корреляции  $\Delta\tau$  такой промежуток времени, что при  $-\Delta\tau < \tau < \Delta\tau$  функция корреляции  $R(\tau)$  принимает значения того же порядка, что и  $R(0)$ , а вне этого интервала значительно меньше  $R(0)$ , то во всех трех примерах  $\Delta\tau \sim \frac{1}{\alpha}$ . Аналогично этому ширина спектра  $\Delta\omega$  определяется так, чтобы в интервале  $-\Delta\omega < \omega < \Delta\omega$  была сосредоточена большая часть интенсивности, а вне этого интервала функция  $S(\omega)$  была бы мала по сравнению с  $S(0)$ . Во взятых трех примерах  $\Delta\omega \sim \alpha$ , и мы приходим к соотношению.

$$\Delta\omega \Delta\tau \sim 1. \quad (3.28)$$

В примере (3.26), очевидно,  $\Delta\omega = \omega_0$ , а  $\Delta\tau \sim \frac{\pi}{\omega_0}$ , поскольку при  $\omega_0\tau = \pi$  мы имеем  $R(\tau) = 0$ , а при больших  $\tau$  функция  $R(\tau)$  принимает сравнительно малые значения. В этом случае

$$\Delta\omega\Delta\tau \sim \pi, \quad (3.29)$$

что несущественно отличается от (3.28).

Для функций  $R$  и  $S$  рассмотренного выше типа можно вывести более точное выражение для произведения  $\Delta\omega\Delta\tau$ , если надлежащим образом уточнить определение величин  $\Delta\omega$  и  $\Delta\tau$ . Определим ширину спектра  $\Delta\omega$  с помощью соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = 2S(0) \Delta\omega, \quad (3.30)$$

т. е. так, чтобы при аппроксимации кривой  $S(\omega)$  прямоугольником высоты  $S(0)$  и ширины  $2\Delta\omega$  заключенная под ним площадь была равна площади под всей кривой  $S(\omega)$  (рис. 5). Аналогичным образом определим время корреляции

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = 2R(0) \Delta\tau. \quad (3.31)$$

Пользуясь формулами

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (3.32)$$

мы приходим к соотношению

$$\Delta\omega \cdot \Delta\tau = \frac{\pi}{2}, \quad (3.33)$$

которое является уже точным.

Соотношения (3.28), (3.29) и (3.33) применимы к любой паре функций, связанных интегральным преобразованием Фурье, в частности к функциям  $k(\tau)$  и  $K(\omega)$  линейного фильтра [формулы (2.18) и (2.19)]. Величина  $\Delta\omega$  в данном случае определяет полосу пропускания фильтра, а величина  $\Delta\tau$  — временную „память“ фильтра, т. е. интервал времени, в течение которого входной сигнал эффективно



влияет на значение выходного сигнала в фиксированный момент. Иначе говоря,  $\Delta\tau$  характеризует растянутость функции  $k(\tau)$  во времени, т. е. продолжительность реакции фильтра на единичный импульс.

В заключение сделаем следующее замечание. Интегральное уравнение (2.10) показывает, что свойства оптимального фильтра определяются корреляционными функциями  $R_{hf}$  и  $R_f$  или же соответствующими спектральными интенсивностями.

Поэтому изложенная выше теория фильтрации приводит к частотному разделению, хорошо известному в радиотехнике. Давно известно, что разделение двух случайных процессов, занимающих на шкале частот неперекрывающиеся интервалы (см. рис. 2), например разделение двух радиопередач, использующих различные

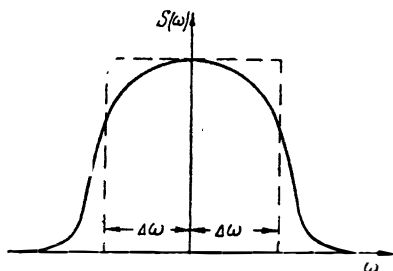


Рис. 5. Определение ширины спектра.

волны, не представляет особого труда и осуществляется с помощью приемника, обладающего надлежащей частотной избирательностью. Наоборот, отфильтрование помех, занимающих тот же частотный диапазон, что и сам сигнал (рис. 3 и 4), например подавление собственных шумов приемника, является для радиотехники неразрешимой задачей. Как было показано в § 2, так же обстоит дело и в теории оптимальной фильтрации, обобщающей накопленный радиотехникой опыт борьбы с помехами.

#### § 4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ОПЕРАТОРЫ

Рассмотрим следующий вопрос, важный с точки зрения теории линейных фильтров. Пусть процессы  $m(t)$  и  $h(t)$  связаны формулой

$$h(t) = L[m(t)], \quad (4.01)$$

где  $L$  — линейный оператор. Выясним, как связана спектральная интенсивность  $S_{hf}(\omega)$  со спектральной интенсивностью  $S_{mf}(\omega)$ , где  $f(t)$  — произвольный случайный процесс.

Возьмем сначала оператор  $L$  в виде линейного интегрального оператора (как мы уже отмечали в § 1, не все

линейные операторы можно представить в интегральной форме), т. е.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t') m(t-t') dt'. \quad (4.02)$$

Поскольку

$$S_{hf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{hf}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \overline{h(t) f(t-\tau)} d\tau, \quad (4.03)$$

то подставляя в это равенство  $h(t)$  из формулы (4.02), получим

$$\begin{aligned} S_{hf}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} l(t') m \overline{(t-t') f(t-\tau)} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} l(t') R_{mf}(\tau-t') dt'. \end{aligned} \quad (4.04)$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$S_{hf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} l(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mf}(\tau) d\tau \quad (4.05)$$

или

$$S_{hf}(\omega) = L(\omega) S_{mf}(\omega), \quad (4.06)$$

где обозначено

$$L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} l(t) dt \quad (4.07)$$

и использовано соотношение

$$S_{mf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mf}(\tau) d\tau. \quad (4.08)$$

Функцию  $L(\omega)$  можно назвать [ср. формулу (2.18)] частотной характеристикой, соответствующей оператору  $L$ . Согласно формулам (3.17) и (3.19) можно также написать

$$S_{fh}(\omega) = S_{hf}(-\omega) = L(-\omega) S_{mf}(-\omega) = L(-\omega) S_{fm}(\omega)$$

или

$$S_{fh}(\omega) = L(-\omega) S_{fm}(\omega) = L^*(\omega) S_{fm}(\omega). \quad (4.09)$$

Пусть  $S_x(\omega)$  — спектральная интенсивность процесса на выходе фильтра  $K$ ,  $S_f(\omega)$  — на его входе. Тогда можно написать

$$S_x(\omega) = S_{xx}(\omega) = K(\omega) S_{fx}(\omega) = K(\omega) K^*(\omega) S_{ff}(\omega)$$

или

$$S_x(\omega) = |K(\omega)|^2 S_f(\omega). \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) показывает, что спектральная интенсивность  $S_x(\omega)$  на выходе линейной системы равна произведению квадрата модуля частотной характеристики  $K(\omega)$  на спектральную интенсивность  $S_f(\omega)$  на входе. Она приводит к формуле (3.09), выведенной ранее.

Однако на практике не все линейные операции записываются в виде (4.02), иногда же интеграл (4.07) для  $L(\omega)$  не имеет смысла. В таких случаях мы *определяем* частотную характеристику  $L(\omega)$ , соответствующую оператору  $L$ , по формуле

$$L(\omega) = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_{mf}(\omega)}. \quad (4.11)$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть  $h(t) = m(t)$ . Такого простого равенства в интегральной форме (4.02), строго говоря, представить нельзя. Формально можно использовать дельта-функцию [ср. формулу (1.13)], однако для наших целей в этом нет необходимости. Поскольку  $L$  есть „единичный“ оператор, естественно в данном случае считать

$$L(\omega) = 1, \quad (4.12)$$

что согласуется с формулой (4.11).

2. Пусть

$$h(t) = m(t + s), \quad (4.13)$$

т. е.  $L$  есть оператор сдвига во времени. Чему равна частотная характеристика  $L(\omega)$ ? Легко показать, что

$$L(\omega) = e^{i\omega s}. \quad (4.14)$$

Действительно,

$$S_{hf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \overline{m(t+s)f(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mf}(\tau+s) d\tau$$

или

$$S_{hf}(\omega) = e^{i\omega s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mf}(\tau) d\tau = e^{i\omega s} S_{mf}(\omega), \quad (4.15)$$

откуда и получаем формулу (4.14).

3. Пусть  $L$  есть оператор дифференцирования

$$h(t) = \frac{dm(t)}{dt}. \quad (4.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_{hf}(\tau) &= \overline{\frac{dm(t)}{dt} f(t-\tau)} = \overline{\frac{dm(t+\tau)}{dt} f(t)} = \frac{d}{d\tau} \overline{m(t+\tau) f(t)} = \\ &= \frac{d}{d\tau} R_{mf}(\tau) \end{aligned} \quad (4.17)$$

и

$$S_{hf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{d}{d\tau} R_{mf}(\tau) d\tau = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mf}(\tau) d\tau = i\omega S_{mf}(\omega), \quad (4.18)$$

откуда

$$L(\omega) = i\omega. \quad (4.19)$$

4. Пусть, наконец,  $L$  есть оператор интегрирования

$$h(t) = \int^t m(t) dt, \quad (4.20)$$

так что

$$m(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (4.21)$$

и

$$S_{mf}(\omega) = i\omega S_{hf}(\omega), \quad S_{hf}(\omega) = \frac{1}{i\omega} S_{mf}(\omega). \quad (4.22)$$

Частотная характеристика, соответствующая оператору интегрирования, равна

$$L(\omega) = \frac{1}{i\omega}. \quad (4.23)$$

Нужно отметить, что при стационарности процесса  $m(t)$  процесс (4.20) не всегда стационарен, а тогда соотношения (4.22) и (4.23) не имеют смысла.

Обобщая формулы (4.12) и (4.19), можно сказать, что если частотная характеристика  $L(\omega)$  является полиномом

$$L(\omega) = \sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha} (i\omega)^{\alpha}, \quad (4.24)$$

где  $Q_{\alpha}$  — постоянные, то соответствующий оператор  $L$  будет равен

$$L = \sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha} \left( \frac{d}{dt} \right)^{\alpha}, \quad (4.25)$$

поскольку слагаемое  $Q_{\alpha} (i\omega)^{\alpha}$  соответствует умножению на коэффициент  $Q_{\alpha}$  и  $\alpha$ -кратному дифференцированию по  $t$ .

Формулы (4.09) и (4.10) легко обобщаются на случай операторов, рассмотренных выше.

Для частотной характеристики линейного оптимального фильтра I типа мы получили выше выражение (2.28). Применяя формулу (4.11), мы легко преобразуем это выражение к виду

$$K(\omega) = L(\omega) \frac{S_{mf}(\omega)}{S_f(\omega)}. \quad (4.26)$$

Если сигнал и помеха не коррелированы, то согласно формулам (2.37) будем иметь

$$K(\omega) = L(\omega) \frac{S_m(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)}. \quad (4.27)$$

Формула для  $K(\omega)$  имеет простой физический смысл. Когда помехи отсутствуют, т. е.  $S_n(\omega) \equiv 0$ , то

$$K(\omega) = L(\omega). \quad (4.28)$$

Множитель

$$K_0(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)} \quad (4.29)$$

дает поправку на помехи. Как видно из формулы (2.38), это — частотная характеристика фильтра, осуществляющего простую фильтрацию. Поэтому можно сказать, что, например, в дифференцирующих фильтрах I типа функция на выходе получается в результате простого восстановления

полезного сигнала и затем дифференцирования восстановленного сигнала. Символически можно записать

$$K = LK_0, \quad (4.30)$$

где  $K_0$  — оператор простой фильтрации. Ошибка, даваемая оптимальным фильтром при сложной фильтрации, получается равной

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 \frac{S_m(\omega) S_n(\omega) - S_{mf}(\omega) S_{mf}(-\omega)}{S_f(\omega)} d\omega, \quad (4.31)$$

а если сигнал и помеха не коррелированы, то

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 \frac{S_m(\omega) S_n(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)} d\omega. \quad (4.32)$$

При  $L(\omega) \doteq 1$  формула (4.32) переходит в (2.39).

В теории фильтрации спектральные интенсивности  $S(\omega)$  часто представляют в виде дробно-рациональных функций, т. е.

$$S(\omega) = \frac{P_\nu(\omega)}{P_\mu(\omega)}, \quad (4.33)$$

где  $P_\nu$  и  $P_\mu$  — полиномы степени  $\nu$  и  $\mu$ . Поскольку интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$  должен сходиться, должно быть  $\mu > \nu$ .

Спектральные интенсивности, соответствующие автокорреляционным функциям, являются четными функциями, поэтому для них полиномы  $P_\nu$  и  $P_\mu$  содержат лишь четные степени  $\omega$ . Частотная характеристика оптимального фильтра  $K$  при таком представлении спектральных функций также будет рациональной функцией, и ее можно записать в виде

$$K(\omega) = \frac{P_b(\omega)}{P_a(\omega)}, \quad (4.34)$$

где  $P_a$  — полином степени  $a$ ,  $P_b$  — полином степени  $b$ .

Возможны два случая: 1)  $a > b$ , 2)  $a \leq b$ . В первом случае применима вся теория оптимального фильтра, изложенная в § 2. Во втором случае числитель будет при

$\omega \rightarrow \pm \infty$  расти быстрее знаменателя, и если мы попытаемся найти выражение для  $k(t)$ , то интеграл

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K(\omega) d\omega \quad (4.35)$$

не будет сходиться. Тогда вся теория оптимальных фильтров оказывается необоснованной, ибо по полученной частотной характеристике  $K(\omega)$  нельзя найти никакой функции  $k(\tau)$ .

Разделив один полином на другой, выражение для  $K(\omega)$  можно представить в виде суммы

$$K(\omega) = Q(\omega) + K_1(\omega), \quad (4.36)$$

где первый член  $Q(\omega)$  есть полином  $q$ -й степени ( $q=b-a$ ), а второй член  $K_1(\omega)$  есть остаток от деления числителя на знаменатель и поэтому является функцией, убывающей при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ . Полином  $Q$ , равный

$$Q(\omega) = \sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha} (i\omega)^{\alpha}, \quad (4.37)$$

согласно формулам (4.24) и (4.25) соответствует оператору

$$\sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha} \left( \frac{d}{dt} \right)^{\alpha}, \quad (4.38)$$

поэтому можно предположить, что функция  $x(t)$  на выходе фильтра с частотной характеристикой (4.37) будет равна:

$$x(t) = \sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha} \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad (4.39)$$

где

$$k_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K_1(\omega) d\omega. \quad (4.40)$$

Однако при выводе интегрального уравнения (§ 2) мы не учитывали того обстоятельства, что линейный оптималь-

ный фильтр может работать по формуле (4.39), более общей, чем формула (2.01). Поэтому в следующем параграфе мы обобщим теорию оптимальных фильтров на этот случай и, следовательно, обоснуем утверждение, что частотной характеристике (4.36) соответствует фильтр (4.39).

## § 5. ОБОБЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Будем считать, что линейный фильтр работает по формуле (4.39). Задачу сформулируем следующим образом. Как надо выбрать функцию  $k_1(t)$  и коэффициенты  $Q_\alpha$ , чтобы на выходе системы получить функцию  $x(t)$ , возможно меньше отличающуюся от нужной нам функции  $h(t)$ ? Будем искать оптимальный фильтр, средняя квадратичная ошибка  $\bar{\varepsilon}^2$  которого была бы наименьшей. Так как

$$\varepsilon(t) = x(t) - h(t), \quad (5.01)$$

то

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{x^2(t)} - 2\overline{x(t)h(t)} + \overline{h^2(t)} \quad (5.02)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 = & \overline{\left[ \sum Q_\alpha f^{(\alpha)}(t) \right]^2} + 2 \sum Q_\alpha \overline{f^{(\alpha)}(t) \int k_1(\tau) f(t-\tau) d\tau} + \\ & + \overline{\left[ \int k_1(\tau) f(t-\tau) d\tau \right]^2} - 2 \sum Q_\alpha \overline{f^{(\alpha)}(t) h(t)} - \\ & - 2 \int k_1(\tau) \overline{f(t-\tau) h(t)} d\tau + \overline{h^2}. \end{aligned} \quad (5.03)$$

Преобразуя квадрат суммы и интеграла в двойные сумму и интеграл и внося множители под знак интеграла, получим

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 = & \sum_\alpha \sum_\beta Q_\alpha Q_\beta \overline{f^{(\alpha)}(t) f^{(\beta)}(t)} + 2 \sum_\alpha Q_\alpha \int k_1(\tau) \overline{f^{(\alpha)}(t) f(t-\tau)} d\tau + \\ & + \iint k_1(\tau) k_1(\sigma) \overline{f(t-\tau) f(t-\sigma)} d\tau d\sigma - \\ & - 2 \sum_\alpha Q_\alpha \overline{h(t) f^{(\alpha)}(t)} - 2 \int k_1(\tau) \overline{h(t) f(t-\tau)} d\tau + \overline{h^2}. \end{aligned} \quad (5.04)$$



Продифференцируем теперь соотношение (2.06)  $\alpha$  раз по  $\tau$ , а соотношение (2.05)  $\alpha$  раз по  $\sigma$ . Получаем

$$\left. \begin{aligned} R_{hf}^{(\alpha)}(\tau) &= (-1)^\alpha \overline{h(t) f^{(\alpha)}(t - \tau)}, \\ R_{hf}^{(\alpha)}(0) &= (-1)^\alpha \overline{h(t) f^{(\alpha)}(t)}, \\ R_f^{(\alpha)}(\tau - \sigma) &= \overline{f(t - \tau) f^{(\alpha)}(t - \sigma)}, \\ R_f^{(\alpha)}(\tau) &= \overline{f^{(\alpha)}(t) f(t - \tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.05)$$

Продифференцировав последнее соотношение  $\beta$  раз по  $\tau$ , получим

$$\left. \begin{aligned} R_f^{(\alpha+\beta)}(\tau) &= (-1)^\beta \overline{f^{(\alpha)}(t) f^{(\beta)}(t - \tau)}, \\ R_f^{(\alpha+\beta)}(0) &= (-1)^\beta \overline{f^{(\alpha)}(t) f^{(\beta)}(t)} = \\ &= (-1)^\alpha \overline{f^{(\alpha)}(t) f^{(\beta)}(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.06)$$

Теперь перепишем выражение (5.04) в виде

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 &= \sum \sum Q_\alpha Q_\beta (-1)^\beta R_f^{(\alpha+\beta)}(0) + 2 \sum Q_\alpha \int k_1(\tau) R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \\ &+ \iint k_1(\tau) k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma - 2 \sum Q_\alpha (-1)^\alpha R_{hf}^{(\alpha)}(0) - \\ &- 2 \int k_1(\tau) R_{hf}(\tau) d\tau + R_h(0), \end{aligned} \quad (5.07)$$

выразив средний квадрат ошибки через корреляционные функции.

Обозначим теперь, как и раньше (§ 2), среднюю квадратичную ошибку  $\bar{\varepsilon}^2$  через  $E$  для оптимального фильтра и через  $E'$  для любого другого. Для того чтобы функция  $k_1(\tau)$  и коэффициенты  $Q_\alpha$  обращали выражение для средней квадратичной ошибки (5.07) в минимум, необходимо и достаточно удовлетворить уравнению

$$\sum_{\alpha=0}^q Q_\alpha R_f^{(\alpha)}(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma = R_{hf}(\tau). \quad (5.08)$$

Доказательство проводится так же, как и в § 2. Пусть  $Q_\alpha$  и  $k_1(\tau)$  соответствуют оптимальному фильтру, тогда

для неоптимального будем иметь  $Q_\alpha + \delta Q_\alpha$  и  $k_1(\tau) + \delta k_1(\tau)$ , и средняя квадратичная ошибка будет равна

$$\begin{aligned}
 E' = & \sum \sum (Q_\alpha + \delta Q_\alpha) (Q_\beta + \delta Q_\beta) (-1)^\beta R_f^{(\alpha+\beta)}(0) + \\
 & + 2 \sum (Q_\alpha + \delta Q_\alpha) \int [k_1(\tau) + \delta k_1(\tau)] R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \\
 & + \iint [k_1(\tau) + \delta k_1(\tau)] [k_1(\sigma) + \delta k_1(\sigma)] R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma - \\
 & - 2 \sum (Q_\alpha + \delta Q_\alpha) (-1)^\alpha R_{hf}^{(\alpha)}(0) - \\
 & - 2 \int [k_1(\tau) + \delta k_1(\tau)] R_{hf}(\tau) d\tau + R_h(0). \quad (5.09)
 \end{aligned}$$

Выделяя выражение для средней квадратичной ошибки оптимального фильтра, получим

$$\begin{aligned}
 E' = E + & \sum \sum \delta Q_\alpha Q_\beta [(-1)^\alpha + (-1)^\beta] R_f^{(\alpha+\beta)}(0) + \\
 & + 2 \sum \delta Q_\alpha \int k_1(\tau) R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \\
 + 2 \sum Q_\alpha \int & \delta k_1(\tau) R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau + 2 \iint \delta k_1(\tau) k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma - \\
 - 2 \sum \delta Q_\alpha & (-1)^\alpha R_{hf}^{(\alpha)}(0) - 2 \int \delta k_1(\tau) R_{hf}(\tau) d\tau + J, \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 J = & \sum \sum \delta Q_\alpha \delta Q_\beta (-1)^\beta R_f^{(\alpha+\beta)}(0) + \\
 & + 2 \sum \delta Q_\alpha \int \delta k_1(\tau) R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \\
 & + 2 \iint \delta k_1(\tau) \delta k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma = \\
 = & \overline{\left[ \sum \delta Q_\alpha f^{(\alpha)}(t) + \int \delta k_1(\tau) f(t - \tau) d\tau \right]^2}. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$J \geq 0. \quad (5.12)$$

В силу формулы (5.06) выражение (5.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 E' = E + 2 \sum_\alpha (-1)^\alpha \delta Q_\alpha \left[ \sum_\beta Q_\beta R_f^{(\alpha+\beta)}(0) + \right. \\
 \left. + \int k_1(\tau) R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau - R_{hf}^{(\alpha)}(0) \right] + \\
 + 2 \int \delta k_1(\tau) d\tau \left[ \sum_\alpha Q_\alpha R_f^{(\alpha)}(\tau) + \right. \\
 \left. + \int k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma - R_{hf}(\tau) \right] + J. \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Теперь легко показать, что для того, чтобы выполнялось неравенство

$$E' \geq E, \quad (5.14)$$

необходимо, чтобы выражения в квадратных скобках формулы (5.13) исчезли, в частности необходимо выполнение интегрального уравнения (5.08). Если оно выполняется тождественно при любых  $\tau$ , то все остальные квадратные скобки в правой части формулы (5.13) также исчезают. Действительно, продифференцировав тождество (5.08)  $\alpha$  раз по  $\tau$  и положив  $\tau=0$ , мы как раз докажем равенство нулю квадратной скобки при  $\delta Q_\alpha$ .

Символически уравнение (5.08) можно записать так:

$$K [R_f(\tau)] = R_{hf}(\tau). \quad (5.15)$$

Написанное выше уравнение (5.15) достаточно для того, чтобы фильтр был оптимальным. Доказывается это, как и в § 2, с помощью неравенства (5.12).

Попробуем решить уравнение (5.08) или (5.15). Умножая обе его части на  $e^{-i\omega\tau} d\tau$  и интегрируя в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , в правой части получим выражение для спектральной интенсивности  $S_{hf}(\omega)$ , так что

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^q Q_\alpha \int e^{-i\omega\tau} R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \iint k_1(\tau) R_f(\tau - \sigma) e^{-i\omega\tau} d\tau d\sigma = \\ = S_{hf}(\omega). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Произведя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f^{(\alpha-1)}(\tau) d\tau + \\ + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f^{(\alpha-1)}(\tau) d\tau \quad (\alpha = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Поскольку  $R_f^{(\alpha-1)}$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  обращается в нуль, мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f^{(\alpha-1)}(\tau) d\tau, \quad (5.18)$$

и повторяя эту операцию  $\alpha$  раз, получим окончательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau = (i\omega)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f(\tau) d\tau = (i\omega)^\alpha S_f(\omega). \quad (5.19)$$

Согласно формуле (2.26)

$$\iint k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) e^{-i\omega\tau} d\tau d\sigma = K_1(\omega) S_f(\omega), \quad (5.20)$$

так что равенство (5.16) примет вид

$$\left[ \sum_{\alpha=0}^q Q_\alpha (i\omega)^\alpha + K_1(\omega) \right] S_f(\omega) = S_{hf}(\omega). \quad (5.21)$$

Мы видим, что частотная характеристика оптимального фильтра I типа равна

$$K(\omega) = \sum_{\alpha=0}^q Q_\alpha (i\omega)^\alpha + K_1(\omega) = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f(\omega)}. \quad (5.22)$$

Эта формула внешне выглядит так же, как формула (2.28), однако она обоснована нами теперь для более широкого класса фильтров. Это значит, что  $K_1(\omega)$  дает интегральную часть оператора  $K$  соответствующего оптимального фильтра, а полином  $\sum Q_\alpha (i\omega)^\alpha$  — линейный дифференциальный оператор  $\sum Q_\alpha \left( \frac{d}{dt} \right)^\alpha$ .

Выражение для частотной характеристики оптимального фильтра можно записать также в виде (4.26) или (4.27).

Выразим теперь ошибку оптимального фильтра через спектральные интенсивности. Исходя из формулы (5.07) и принимая во внимание интегральное уравнение (5.08), получим выражение

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 = & R_h(0) - \left[ \sum \sum Q_\alpha Q_\beta (-1)^{\alpha+\beta} R_f^{(\alpha+\beta)}(0) + \right. \\ & + 2 \sum Q_\alpha \int k_1(\tau) R_f^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \\ & \left. + \iint k_1(\tau) k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\tau d\sigma \right] = R_h(0) - \\ & - \int | \sum Q_\alpha (i\omega)^\alpha + K_1(\omega) |^2 S_f(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (5.23)$$

или

$$\bar{\varepsilon}^2 = R_h(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (5.24)$$

Пользуясь формулой (2.30), можно также написать

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_h(\omega) - |K(\omega)|^2 S_f(\omega)] d\omega. \quad (5.25)$$

Нужно заметить, что эти вычисления годятся не только для фильтров I типа, их можно применить и для фильтров II и III типов. Подставляя в (5.25) выражение (5.22), мы получаем в более общих предположениях формулу (4.31) для фильтра I типа.

Необходимо, чтобы интеграл в правой части равенства (5.24) сходилась. В каждом конкретном случае надо проверить его сходимости. Впрочем, расходимость этого интеграла имеет место лишь при бесконечных значениях производной  $R_f^{(a)}(\tau)$  при  $\tau = 0^*$ , а тогда даже обобщенного уравнения оптимального фильтра написать нельзя и, значит, задача не имеет решения.

Формулу (5.24) можно записать также в виде

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{h^2} - \overline{x^2}, \quad (5.26)$$

где слагаемое  $\overline{h^2}$  дает разброс значений  $h(t)$  вокруг среднего значения  $\overline{h} = 0$ , а в результате вычитания  $\overline{x^2}$  получим

$$\overline{\varepsilon^2} \leq \overline{h^2}. \quad (5.27)$$

Для оптимального фильтра, осуществляющего простую фильтрацию, мы имеем

$$\overline{\varepsilon^2} \leq \overline{m^2}. \quad (5.28)$$

При простой фильтрации  $\overline{\varepsilon^2}$  приближается к  $\overline{m^2}$ , когда входной сигнал „забит“ весьма интенсивными помехами, имеющими тот же спектральный состав, что и сам сигнал (ср. конец § 2). Тогда по формулам (2.42) и (2.43) функция  $K(\omega)$  мала, и на выходе фильтра получаем малую функцию  $x(t)$ . При  $x(t) \equiv 0$  мы, очевидно, будем иметь  $\overline{\varepsilon^2} = \overline{h^2}$  или  $\overline{\varepsilon^2} = \overline{m^2}$ .

\* Например, корреляционная функция (3.23) имеет скачок производной  $R'(\tau)$  при  $\tau = 0$  и, следовательно,  $R''(0) = \infty$ .

## § 6. ФИЛЬТРАЦИЯ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФИЛЬТРА I ТИПА

Представим себе, что у нас имеется сигнал

$$m(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t = e \cos(\omega_0 t - \vartheta), \quad (6.01)$$

где

$$a = e \cos \vartheta \text{ и } b = e \sin \vartheta. \quad (6.02)$$

При фиксированных константах  $a$ ,  $b$  или  $e$ ,  $\vartheta$  сигнал (6.01) вообще не является случайным процессом. Если  $a$  и  $b$  — случайные величины, не зависящие от времени и удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{a} = \bar{b} = 0, \quad \bar{a^2} = \bar{b^2}, \quad \overline{ab} = 0, \quad (6.03)$$

то сигнал (6.01) можно рассматривать как случайный процесс. Спектр этого процесса сводится к частотам  $\omega = \pm \omega_0$ , поэтому такой сигнал можно назвать монохроматическим. Монохроматический сигнал можно рассматривать как предельный случай квазимонохроматического сигнала, в котором  $a$ ,  $b$ ,  $e$  и  $\vartheta$  медленно изменяются со временем по статистическим законам. На практике монохроматических сигналов реализовать нельзя, можно осуществить только квазимонохроматические сигналы, приближающиеся к монохроматическим сигналам достаточно близко.

При случайной модуляции гармонического колебания частоты  $\omega_0$  мы получаем новый случайный процесс. Для того, чтобы этот процесс можно было считать квазимонохроматическим сигналом, ширина спектра модуляции  $\Delta\omega$  по сравнению с несущей частотой  $\omega_0$  должна быть достаточно мала, т. е.

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \quad (6.04)$$

Будем считать, что стационарные случайные функции  $a(t)$  и  $b(t)$  имеют следующие статистические свойства

$$\overline{a(t)} = \overline{b(t)} = 0, \quad (6.05)$$

$$\overline{a(t) a(t - \tau)} = \overline{b(t) b(t - \tau)} = c^2 r(\tau), \quad (6.06)$$

$$\overline{a(t) b(t - \tau)} = 0 \text{ при любых } \tau. \quad (6.07)$$

В соотношениях (6.06) произведение  $c^2 r(\tau)$  есть автокорреляционная функция случайных величин  $a(t)$  и  $b(t)$ ,

взаимная корреляция между которыми отсутствует. Константа  $c^2$  определяется формулой

$$c^2 = \overline{a^2} = \overline{b^2}, \quad (6.08)$$

так что

$$r(0) = 1. \quad (6.09)$$

Функцию  $r(\tau)$ , удовлетворяющую такому соотношению, принято называть нормированной автокорреляционной функцией или коэффициентом корреляции.

Выше мы сделали некоторые предположения о статистических свойствах функций  $a(t)$  и  $b(t)$ . Отсюда вытекает ряд свойств для функций  $e(t)$  и  $\vartheta(t)$ , связанных с ними формулами (6.02). Функция  $e(t)$  называется огибающей случайного процесса  $m(t)$ , функция  $\vartheta(t)$  — его фазой. Строгое определение огибающей и фазы для *любого* случайного процесса было впервые дано В. И. Бунимовичем в 1944 г. и подробно изложено в его книге. Там же читатель может найти доказательство того, что при условии (6.04) функции  $a(t)$  и  $b(t)$  всегда удовлетворяют соотношениям (6.06) и (6.07).

Вычислим теперь корреляционную функцию полезного сигнала

$$\begin{aligned} R_m(\tau) &= \\ &= \overline{[a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t] [a(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau) + \\ &\quad + b(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau)]} = \\ &= c^2 r(\tau) [\cos \omega_0 t \cos \omega_0(t - \tau) + \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t - \tau)] \end{aligned}$$

или

$$R_m(\tau) = c^2 r(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (6.10)$$

При  $\tau = 0$  получаем

$$c^2 = R_m(0) = \overline{m^2(t)}, \quad (6.11)$$

что показывает физический смысл постоянной  $c^2$ .

Для дальнейшего введем спектральную функцию

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} r(\tau) d\tau, \quad (6.12)$$

соответствующую нормированной корреляционной функции  $r(\tau)$ . Тогда обратное преобразование Фурье дает

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} s(\omega) d\omega. \quad (6.13)$$

С помощью функции  $s(\omega)$ , определяющей спектральную интенсивность случайных процессов  $a(t)$  и  $b(t)$ , мы найдем и самый спектр квазимонохроматического сигнала  $m(t)$ :

$$S_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_m(\tau) d\tau = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} r(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau. \quad (6.14)$$

В силу формулы Эйлера

$$\cos \omega_0 \tau = \frac{e^{i\omega_0 \tau} + e^{-i\omega_0 \tau}}{2}$$

выражение (6.14) перепишется так

$$S_m(\omega) = \frac{c^2}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} r(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)\tau} r(\tau) d\tau \right]$$

или, принимая во внимание формулу (6.12),

$$S_m(\omega) = \frac{c^2}{2} [s(\omega - \omega_0) + s(\omega + \omega_0)]. \quad (6.15)$$

Величина  $\Delta\omega$ , фигурирующая в формуле (6.04), характеризует ширину функции  $s(\omega)$ , определенную согласно § 3. Как и в § 3, мы считаем, что функция  $s(\omega)$  имеет „колоколообразную“ форму с максимумом при  $\omega = 0$ .

В силу соотношения (3.33) неравенство (6.04) дает

$$\omega_0 \Delta\tau \gg 1. \quad (6.16)$$

Время корреляции  $\Delta\tau$  характеризует быстроту изменения случайных функций  $a(t)$  и  $b(t)$  во времени. Условие (6.16) показывает, что за промежуток времени  $\Delta\tau$ , достаточный для заметного изменения  $a(t)$  и  $b(t)$ , функции  $\cos \omega_0 t$  и  $\sin \omega_0 t$  испытывают много колебаний. Иначе говоря, функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $e(t)$  и  $\vartheta(t)$  являются при условии (6.04) медленно



меняющимися функциями по сравнению с  $\cos \omega_0 t$  и  $\sin \omega_0 t$ .

Спектральная интенсивность  $S_m(\omega)$  согласно формуле (6.15) имеет вид, изображенный на рис. 6, и в силу условия (6.04) состоит из двух неперекрывающихся частей, расположенных при  $\omega \approx \omega_0$  и  $\omega \approx -\omega_0$ .

В дальнейшем при конкретных расчетах мы положим

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad (6.17)$$

тогда по формуле (3.23) будем иметь

$$s(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (6.18)$$

Параметр  $\alpha$  определяет ширину спектра. Действительно, по формулам (6.09) и (6.13) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) d\omega = 1, \quad (6.19)$$

и соотношение (3.30) дает

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{2} \alpha. \quad (6.20)$$

Исследуем теперь оптимальные фильтры, выделяющие квазимонохроматические сигналы на фоне так называемых «белых шумов» — помех с постоянной спектральной интенсивностью

$$S_n(\omega) = S_n = \text{const.}$$

(6.21)

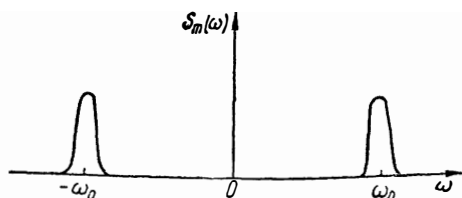


Рис. 6. Спектр квазимонохроматического сигнала.

Название «белый шум» образовано по аналогии с «белым светом», в котором присутству-

ют все цвета спектра, соответствующие различным частотам. Подобно этому, в «белом шуме», представлены колебания всех частот, причем с одинаковой интенсивностью. В чистом виде, очевидно, белый шум не осуществим, поскольку ему соответствовала бы бесконечно большая интенсивность колебаний [ср. формулу (3.04)]. Поэтому нужно считать, что посто-

яньство  $S_n$  имеет место в пределах достаточно большого интервала частот, и при более высоких частотах функция  $S_n(\omega)$  спадает до нуля. Фактически же мы должны требовать для справедливости всех дальнейших выводов постоянства  $S_n(\omega)$  в пределах спектра сигнала (рис. 6).

Рассмотрим оптимальный фильтр I типа для квазимонохроматического сигнала. В случае простой фильтрации при отсутствии корреляционной связи между сигналом и шумом частотная характеристика такого фильтра определяется формулой (2.38)

$$K(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_m(\omega) + S_n}. \quad (6.21)$$

При вычислении функции  $k(\tau)$  по формуле

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{1 + \frac{S_n}{S_m(\omega)}} \quad (6.22)$$

мы, ввиду четности функции  $k(\tau)$ , можем ограничиться положительными значениями  $\tau$ . Обозначим знаменатель подынтегрального выражения буквой  $N(\omega)$  и найдем корни уравнения  $N(\omega) = 0$ . Для функции (6.18) оно имеет четыре комплексных корня (два корня при  $\omega \approx \omega_0$  и два — при  $\omega \approx -\omega_0$ ). При вычислении полюсов удобно воспользоваться тем, что при  $\omega \approx \omega_0$  функция  $S_m(\omega)$  приближенно равна

$$S_m(\omega) \approx \frac{c^2}{2} s(\omega - \omega_0) = \frac{c^2 \alpha}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}, \quad (6.23)$$

поскольку слагаемым  $s(\omega + \omega_0) \approx s(2\omega_0)$  здесь можно пренебречь. Тогда знаменатель равен

$$N(\omega) = 1 + S_n \frac{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}{c^2 \alpha}. \quad (6.24)$$

Он обращается в нуль при

$$\omega = \omega_0 \pm i\beta, \quad \text{где } \beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{c^2 \alpha}{S_n}}. \quad (6.25)$$

Два других корня будут при  $\omega = -\omega_0 \pm i\beta$ . Таким образом, два корня расположены в верхней полуплоскости и два — в нижней. При вычислении  $k(\tau)$  для  $\tau > 0$  важны корни только в верхней полуплоскости, поскольку мы деформируем путь интегрирования вверх и, пользуясь леммой Жордана (ср. § 8), сводим интеграл к сумме вычетов.

Производная  $\frac{dN}{d\omega}$  в полюсах  $\omega = \pm \omega_0 + i\beta$  будет равна

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{2S_n}{c^2\alpha} i\beta, \quad (6.26)$$

и окончательное выражение для  $k(\tau)$  запишется в виде

$$k(\tau) = \frac{\rho\alpha^2}{\beta} e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0\tau, \quad (6.27)$$

где введен безразмерный параметр  $\rho$ , играющий в данной задаче роль отношения сигнала к шуму (по мощности)

$$\rho = \frac{c^2}{S_n\alpha}, \quad (6.28)$$

с помощью которого можно записать параметр  $\beta$  в виде

$$\beta = \alpha \sqrt{1 + \rho}. \quad (6.29)$$

Безразмерный параметр  $\rho$  показывает, насколько квази-монохроматический сигнал интенсивнее помехи. Действительно,  $c^2$  есть согласно формуле (6.11) среднее значение интенсивности монохроматического сигнала, а произведение  $S_n\alpha$  согласно формуле (6.20) определяет интенсивность помех в полосе частот, занятой сигналом.

В случае больших помех ( $\rho \ll 1$ ) из формулы (6.29) получаем  $\alpha \approx \beta$ , откуда

$$k(\tau) = \frac{R_m(\tau)}{S_n} \quad (6.30)$$

и

$$K(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_n} \quad (6.31)$$

в соответствии с формулой (2.43). Когда же помехи малы по сравнению с сигналом ( $\rho \gg 1$ ), то из формулы (6.29) получаем  $\beta \gg \alpha$ .

Полоса пропускания оптимального фильтра соответствует интервалам частот  $(\omega_0 - \Delta\omega', \omega_0 + \Delta\omega')$  и  $(-\omega_0 - \Delta\omega', -\omega_0 + \Delta\omega')$ , где

$$\Delta\omega' = \frac{\pi}{2} \beta = \frac{\pi}{2} \alpha \sqrt{1 + \rho}. \quad (6.32)$$

Мы видим, что при уменьшении интенсивности помех полосу пропускания фильтра целесообразно расширять. Уве-

личение ширины полосы фильтра при малом уровне помех приводит к уменьшению его памяти — времени извлечения («собирания») сигнала из шума, равного по порядку величины  $\frac{1}{\beta}$ . Это вполне понятно, ибо при отсутствии помех получение полезного сигнала вообще не требует времени. Можно также отметить, что «собирать» квазимонохроматический сигнал с помощью фильтра имеет смысл только в пределах времени корреляции сигнала, поэтому всегда  $\beta > \alpha$ .

Вычислим среднюю квадратичную ошибку фильтрации

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{m^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \quad (6.33)$$

или

$$\overline{\varepsilon^2} = c^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m^2(\omega) d\omega}{S_m(\omega) + S_n}. \quad (6.34)$$

Записав подынтегральную функцию в виде

$$\frac{S_m(\omega)}{1 + \frac{S_n}{S_m(\omega)}}, \quad (6.35)$$

возьмем интеграл (6.34) с помощью вычетов. Вычеты здесь будут двоякие. Во-первых, они связаны с нулями знаменателя ( $\omega = \pm \omega_0 + i\beta$ ) и, во-вторых, с полюсами числителя ( $\omega = \pm \omega_0 + i\alpha$ ). Окончательно мы получим

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^2}{\sqrt{1 + \rho}}. \quad (6.36)$$

Действительно, поступая как при выводе формулы (6.27), будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= c^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(\omega) d\omega}{1 + \frac{S_n}{S_m(\omega)}} = \frac{S_m(\omega_0 + i\beta) + S_m(-\omega_0 + i\beta)}{\frac{2S_n}{c^2\alpha} \beta} = \\ &= \frac{c^2\alpha}{\beta} = \frac{c^2}{\sqrt{1 + \rho}}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Предположим, что  $\alpha$  стремится к нулю, иными словами, сигнал становится все более монохроматичным. Тогда  $\rho$

растет и  $\overline{\varepsilon^2}$  падает. Это достигается за счет того, что суживается полоса пропускания фильтра (6.32) и увеличивается его память — время  $\Delta t' \sim \frac{1}{\beta}$ , за которое он эффективно использует входной сигнал. Однако  $\beta$  убывает не пропорционально  $\alpha$ , а медленнее

$$\beta \approx \alpha \sqrt{\overline{\rho}} = \sqrt{\frac{c^2 \alpha}{S_n}}, \quad (6.38)$$

поскольку, как было указано выше, нецелесообразно сужать полосу пропускания фильтра до полосы сигнала, а выгодно брать ее несколько шире.

Заметим, что для рассматриваемого нами полосового фильтра с частотной характеристикой (6.21) величины  $\Delta\omega'$  и  $\Delta t'$  по-прежнему связаны соотношением вида (3.33).

Вернемся теперь к монохроматическим колебаниям. Для них  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Delta\omega = 0$ ,  $\overline{\varepsilon^2} = 0$  и

$$k(\tau) \sim \cos \omega_0 \tau, \quad (6.39)$$

причем перед  $\cos \omega_0 \tau$  стоит бесконечно малый коэффициент. Заметим, что бесконечно малая ошибка достигается здесь благодаря бесконечно большому времени работы фильтра. Если использовать входной сигнал за конечный промежуток времени, то и ошибка, очевидно, будет конечной.

## § 7. ОБ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Вернемся к основным положениям статистической теории фильтрации.

Прежде всего, полезный сигнал и помеха предполагаются стационарными случайными процессами с известными корреляционными свойствами. Стационарность обоих процессов означает, что статистические свойства каждого из них с течением времени не меняются, т. е. что свойства каждого процесса не зависят от того, в какой именно интервал времени рассматриваем мы данный процесс. Мы считали также, что корреляционные функции нам известны; это значит, что производились какие-то предварительные исследования данного процесса.

Под оптимальными фильтрами в статистической теории фильтрации подразумеваются фильтры, работающие с минимальной средней квадратичной ошибкой. Этот критерий

ведет к наиболее простым соотношениям. Однако фактически он применим тогда, когда нежелательность ошибки возрастает с ее величиной. Но возможны случаи, когда все ошибки, превышающие некоторый предел, в одинаковой мере нежелательны: в таких случаях естественно пользоваться другим критерием.

Изложенная выше теория ограничивается линейными фильтрами. Нелинейных фильтров мы не рассматривали. В гл. VIII мы рассмотрим теорию фильтрации нормальных (гауссовых) процессов и последовательностей с более общей точки зрения и покажем, что в этом случае оптимальный линейный фильтр действительно является оптимальным также по сравнению с любым другим фильтром — линейным или нелинейным, а критерий средней квадратичной ошибки эквивалентен ряду других критериев. Этот результат можно объяснить, грубо говоря, тем, что все вероятностные характеристики нормальных процессов с равным нулю средним значением определяются их корреляционными функциями. Линейный фильтр как раз использует эти функции, и необходимость в линейных фильтрах возникает только для случайных процессов, статистические свойства которых не исчерпываются функциями корреляции.

Таким образом, нелинейные фильтры могут иметь значение лишь для случайных процессов, не подчиняющихся нормальному закону. Преимущество таких фильтров по сравнению с линейными должно сказываться тем сильнее, чем больше данный случайный процесс отличается от нормального. Теория нелинейных фильтров весьма сложна, и ощутимых практических результатов она до сих пор не дала.

В радиолокации проблему фильтрации следует ставить иначе. В то время как помеху можно по-прежнему считать случайным процессом, полезный сигнал здесь уже имеет определенную форму (например, является прямоугольным импульсом), только с некоторыми неизвестными параметрами. Поэтому проблема фильтрации не сводится к воспроизведению полезного сигнала в малоискаженной форме, а возникает задача такого преобразования полезного сигнала, чтобы обнаружение его среди помех и измерение его параметров сопровождалось наименьшей ошибкой. Фильтры такого типа мы рассмотрим в гл. III.

Впервые проблемы линейной экстраполяции стационарных случайных последовательностей и процессов были ис-

следованы в работах А. Н. Колмогорова и других советских математиков. Однако лишь благодаря работам Норберта Винера по оптимальной линейной фильтрации и экстраполяции случайных процессов данные проблемы вышли за рамки чистой математики и приобрели практическое значение.

Поскольку эти задачи о фильтрации явились своего рода образцом для «оптимального» решения целого ряда других статистических задач, представляющих интерес для техники, мы продолжим их изучение в следующей главе. Более подробное изложение относящихся сюда вопросов читатель может найти в обзорной статье А. М. Яглома и в ряде книг.

## ГЛАВА II

### ФИЛЬТРАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ \*

#### § 8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА II ТИПА

Для фильтров II типа функция  $k_1(\tau)$  удовлетворяет добавочному условию

$$k_1(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0, \quad (8.01)$$

аналогичному условию (1.14), и формула (4.39) принимает вид

$$x(t) = \sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha} j^{(\alpha)}(t) + \int_0^{\infty} k(\tau) j(t - \tau) d\tau. \quad (8.02)$$

Таким образом, фильтр II типа использует входной процесс за полубесконечный промежуток времени. Фильтр I типа использует информацию за промежуток времени, бесконечный в обе стороны, поэтому он более эффективен, чем фильтр II типа, и, в частности, его средняя квадратичная ошибка меньше.

При  $\tau \geq 0$  коэффициенты  $Q_{\alpha}$  и функция  $k_1(\tau)$  оптимального фильтра II типа должны удовлетворять тому же уравнению (5.08)

$$\sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha} R_f^{(\alpha)}(\tau) + \int_0^{\infty} k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma = R_{hf}(\tau), \quad (8.03)$$

---

\* Эту главу можно при первом чтении пропустить, ознакомившись лишь с представлением случайного процесса в виде наложения возмущений стандартной формы (§ 12).



что и в случае фильтров I типа, однако, при  $\tau < 0$  это уравнение не должно выполняться, поскольку

$$\delta k_1(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0. \quad (8.04)$$

Вместо этого должно выполняться условие (8.01), благодаря чему задача становится гораздо сложнее.

Применим к уравнению (8.03) преобразование Фурье. Для этого воспользуемся формулами

$$\left. \begin{aligned} R_f(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_f(\omega) d\omega, \\ R_f^{(\alpha)}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} (i\omega)^\alpha S_f(\omega) d\omega, \\ \sum Q_\alpha R_f^{(\alpha)}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \left[ \sum Q_\alpha (i\omega)^\alpha \right] S_f(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} (8.05)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} k_1(\sigma) R_f(\tau - \sigma) d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k_1(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau - \sigma)} S_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_f(\omega) d\omega \int_0^{\infty} e^{-i\omega\sigma} k_1(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K_1(\omega) S_f(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (8.06)$$

Воспользовавшись также соотношением

$$R_{hf}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{hf}(\omega) d\omega, \quad (8.07)$$

мы преобразуем уравнение (8.03) к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} [K(\omega) S_f(\omega) - S_{hf}(\omega)] d\omega = 0 \text{ при } \tau \geq 0, \quad (8.08)$$

где

$$K(\omega) = \sum_{\alpha=0}^q Q_\alpha (i\omega)^\alpha + K_1(\omega) \quad (8.09)$$

есть неизвестная нам частотная характеристика (коэффициент передачи) искомого фильтра, причем слагаемое  $K_1(\omega)$  исчезает при  $\omega \rightarrow \pm\infty$  и допускает преобразование Фурье, а  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$  — известные спектральные функции.

Если бы функция  $K(\omega)$  была нам известна, то мы могли бы представить ее в виде (8.09) и по функции  $K_1(\omega)$  вычислить [ср. формулу (4.40)] функцию

$$k_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K_1(\omega) d\omega, \quad (8.10)$$

которая должна удовлетворять условию (8.01). Поэтому наряду с уравнением (8.08) должно выполняться еще уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K_1(\omega) d\omega = 0 \text{ при } \tau < 0. \quad (8.11)$$

Вся трудность состоит в том, что функция  $K(\omega)$  должна удовлетворять двум соотношениям (8.08) и (8.11). Мы будем искать неизвестную функцию  $K(\omega)$ , предполагая сначала, что функции  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$  даны нам не в виде эмпирических кривых, а в виде формул, допускающих аналитическое продолжение в область комплексных частот, т. е. будем считать  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$  функциями комплексного переменного, аналитическими в некоторой окрестности вещественной оси на плоскости комплексного переменного  $\omega$ .

Вводя обозначение

$$J(\omega) = K(\omega)S_f(\omega) - S_{hf}(\omega), \quad (8.12)$$

мы можем переписать уравнение (8.08) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} J(\omega) d\omega = 0 \text{ при } \tau \geq 0. \quad (8.13)$$

Для дальнейшего преобразуем его следующим образом. Умножим обе части на  $e^{-i\omega\tau}$  и проинтегрируем от 0 до  $\infty$

$$\int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} J(\omega) d\omega = 0. \quad (8.14)$$

Если  $\omega$  есть комплексное число, лежащее в нижней полуплоскости (ниже вещественной оси), так что  $\text{Im } \omega < 0$ , то в интеграле (8.14) можно изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} J(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega) d\omega \int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega)\tau} d\tau, \quad (8.15)$$

поскольку внутренний интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega)\tau} d\tau = -\frac{1}{i(\omega-\omega)} \quad (8.16)$$

сходится.

Окончательно уравнение (8.08) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\omega) d\omega}{\omega-\omega} = 0 \text{ при } \text{Im } \omega < 0. \quad (8.17)$$

Поступая так же с соотношением (8.11), т. е. умножая на  $e^{-i\omega\tau}$  и интегрируя от  $-\infty$  до 0, мы преобразуем его к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\omega) d\omega}{\omega-\omega} = 0 \text{ при } \text{Im } \omega > 0. \quad (8.18)$$

Интегралы, стоящие в левых частях формул (8.17) и (8.18), называются в теории функций комплексного переменного интегралами типа Коши. В следующем параграфе мы увидим, что теория функций комплексного переменного позволяет найти неизвестные нам функции  $K(\omega)$  и  $K_1(\omega)$  из соотношений (8.17) и (8.18). Предварительно мы рассмотрим некоторые положения теории функций комплексного переменного, которые нам понадобятся в дальнейшем.

**Теорема Коши.** По теореме Коши, если функция  $F(\omega)$  является аналитической в некоторой односвязной области, то ее значение в любой точке  $\omega$  этой области выражается через значения этой функции на замкнутом контуре  $C$ , окружающем эту точку (см. рис. 7), следующей формулой

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(\omega) d\omega}{\omega-\omega}, \quad (8.19)$$

где  $\omega$  — переменная интегрирования, а интеграл берется в положительном направлении (против часовой стрелки).

*Лемма Жордана.* Эту лемму можно сформулировать так. Если функция  $F(w)$  в верхней полуплоскости и на вещественной оси (т. е. при  $\text{Im } w \geq 0$ ) удовлетворяет условию

$$F \rightarrow 0 \text{ (равномерно) при } |w| \rightarrow \infty \quad (8.20)$$

и  $\tau$  есть некоторое положительное число, то при  $R \rightarrow \infty$  имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\tau w} F(w) dw = 0 \quad (\tau > 0), \quad (8.21)$$

где  $C_R$  — полуокружность с центром в начале координат и радиусом  $R$ , находящаяся в верхней полуплоскости (рис. 8).

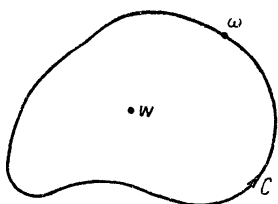


Рис. 7. Контур  $C$  на комплексной плоскости (к теореме Коши).

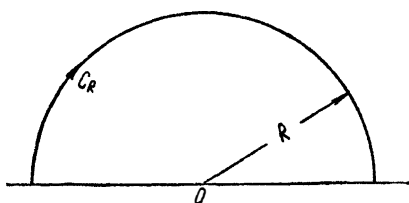


Рис. 8. Контур  $C_R$  на комплексной плоскости (к лемме Жордана).

Если  $\tau < 0$ , то соотношение (8.21) справедливо, если в нижней полуплоскости и на вещественной оси (т. е. при  $\text{Im } w \leq 0$ ) выполняются те же условия, тогда полуокружность  $C_R$  лежит в нижней полуплоскости.

Нам понадобится также следующая лемма.

*Лемма I.* Пусть функция  $G(w)$  является аналитической в полосе

$$\gamma_1 \leq \text{Im } w \leq \gamma_2 \quad (8.22)$$

и на концах этой полосы (при  $\text{Re } w \rightarrow \pm \infty$ ) убывает достаточно быстро, по крайней мере, быстрее, чем  $\frac{1}{w^\sigma}$ , где  $\sigma > 0$

[в приложениях мы будем брать  $\gamma_1 \leq 0$ ,  $\gamma_2 \geq 0$ , так что полоса (8.22) содержит вещественную ось]. Тогда, какова бы ни была функция  $G(w)$  вне полосы, она может быть разложена на сумму

$$G(w) = G^+(w) + G^-(w), \quad (8.23)$$

где  $G^+(w)$  — функция, аналитическая во всей верхней полуплоскости, включая полосу (8.22), т. е. при  $\text{Im } w \geq \gamma_1$ ,

а  $G^-(w)$  — функция, аналитическая по всей нижней полуплоскости, включая полосу (8.22), т. е. при  $\text{Im } w \leq \gamma_2$ .

Доказательство леммы вытекает из теоремы Коши (8.19) для функции  $G(w)$ . Действительно, возьмем в качестве контура интегрирования прямоугольник (рис. 9) и будем концы этого контура продолжать до бесконечности, причем направление обхода контура будем брать против часовой стрелки. Тогда благодаря убыванию  $G(w)$  при  $\text{Re } w \rightarrow \pm\infty$  интеграл по каждой горизонтали сходится быстрее, чем интеграл

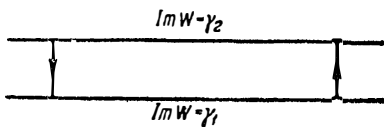


Рис. 9. Прямоугольный контур (к лемме I).

$$\int \frac{w^{\sigma} dw}{\omega^{1+\sigma}}, \quad (8.24)$$

т. е. стремится к определенному пределу. По той же причине интегралы по вертикальным отрезкам стремятся к нулю. Поэтому функцию  $G(w)$  в полосе (8.22) можно представить так

$$G(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma_1 - \infty}^{i\gamma_1 + \infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - w} - \frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma_2 - \infty}^{i\gamma_2 + \infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - w}, \quad (8.25)$$

где первый интеграл берется по нижнему краю полосы, а второй — по верхнему краю. Обозначим

$$G^+(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma_1 - \infty}^{i\gamma_1 + \infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - w}, \quad G^-(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma_2 - \infty}^{i\gamma_2 + \infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - w}. \quad (8.26)$$

Первый интеграл представляет собой аналитическую функцию выше пути интегрирования. Ниже пути интегрирования  $G^+(w)$  — тоже аналитическая функция, но уже другая, поскольку при переходе через путь интегрирования функция терпит скачок. Второй интеграл представляет собой функцию, аналитическую ниже пути интегрирования, т. е.  $G^-(w)$  можно продолжить аналитически во всю нижнюю полуплоскость.

Дадим оценку поведения функций  $G^+(w)$  и  $G^-(w)$  на бесконечности; она имеет различный вид для случаев  $\sigma > 1$  и  $\sigma \leq 1$ . Если  $\sigma > 1$ , то при  $|w| \rightarrow \infty$

$$G^+(w) \approx \frac{M}{w}, \quad (8.27)$$

где интеграл

$$M = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma_1 - \infty}^{i\gamma_1 + \infty} G(\omega) d\omega \quad (8.28)$$

в силу условия  $\sigma > 1$  сходится.

Если число  $\sigma$  заключено между 0 и 1 (или  $\sigma = 1$ ), то мы получаем расходящийся интеграл ( $M = \infty$ ). В этом случае можно показать, что функция  $G^+(\omega)$  убывает медленнее, чем  $\frac{1}{\omega}$ . Действительно, разобьем интеграл для функции  $G^+(\omega)$  на три интеграла по промежуткам, изображенным на рис. 10. Интеграл по промежутку 2 есть интеграл в конечных пределах, и для него справедлива оценка (8.27). Что касается интегралов по участкам 1 и 3, то при

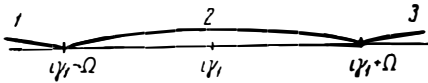


Рис. 10. Разбиение интервала интегрирования на три части (к лемме I).

достаточно большом  $\Omega$  их можно оценить, если положить на них  $G(\omega) = \frac{C}{\omega^\sigma}$ , где  $C$  — константа. Тогда, например, интеграл по промежутку 3 равен

$$\frac{C}{2\pi i} \int_{i\gamma_1 + \Omega}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^\sigma(\omega - \omega)} = \frac{C}{2\pi i \omega^\sigma} \int_{\frac{i\gamma_1 + \Omega}{\omega}}^{\infty} \frac{dx}{x^\sigma(x - 1)}, \quad (8.29)$$

где  $x = \frac{\omega}{\omega}$ . Интеграл в правой части равенства (8.29) при  $\omega \rightarrow \infty$  либо конечен (если  $\sigma < 1$ ), либо возрастает, как  $\ln \omega$  (если  $\sigma = 1$ ), поскольку

$$\int_{\frac{i\gamma_1 + \Omega}{\omega}}^{\infty} \frac{dx}{x(x - 1)} \approx -\ln \frac{i\gamma_1 + \Omega}{\omega}. \quad (8.30)$$

Аналогичную оценку будем иметь и для интеграла по левому промежутку 1. Следовательно,  $G^+(\omega)$  убывает, как  $\frac{1}{\omega^\sigma}$  или  $\frac{\ln \omega}{\omega}$ , т. е. медленнее, чем  $\frac{1}{\omega}$ . Такие же свойства имеет и функция  $G^-(\omega)$ .

Теория интегральных уравнений, к которым сводится исследование оптимальных фильтров II типа, дана Винером и Хопфом и с более общей точки зрения — В. А. Фоком. В нашем изложении методики решения уравнения (8.03) мы, в основном, следуем работе Фока.

### § 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА II ТИПА

В § 8 мы свели уравнение (8.03) для оптимального фильтра II типа к двум соотношениям (8.17) и (8.18). В дальнейшем мы будем считать, что функции  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$  являются аналитическими в пределах полосы

$$-\gamma \leq \text{Im } \omega \leq \gamma, \quad (9.01)$$

охватывающей вещественную ось, причем функция  $S_f(\omega)$  в этой полосе нигде не обращается в нуль. В частности предполагается, что при всех вещественных  $\omega$

$$S_f(\omega) > 0. \quad (9.02)$$

В дальнейшем (см. § 11) мы от этих ограничений попытаемся избавиться, однако в данном параграфе мы будем на них опираться.

Применим теперь лемму I к соотношениям (8.17) и (8.18). Будем считать, что  $J(\omega)$  и  $K_1(\omega)$  удовлетворяют лемме I также и в отношении поведения на бесконечности, иначе выписанные интегралы не имели бы смысла. По лемме I можно написать

$$\left. \begin{aligned} J(\omega) &= J^+(\omega) + J^-(\omega), \\ K_1(\omega) &= K_1^+(\omega) + K_1^-(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (9.03)$$

Если взять в лемме I полосу, расположенную ниже вещественной оси ( $\gamma_1 < 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ ), то для нее формула (8.17) дает

$$J^-(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} = 0, \quad (9.04)$$

и, следовательно,

$$J(\omega) = J^+(\omega). \quad (9.05)$$

Аналогичным образом для полосы, лежащей выше вещественной оси ( $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_2 > 0$ ), из соотношения (8.18) получаем

$$K_1^+(\omega) = 0 \quad (9.06)$$

и

$$K_1(\omega) = K_1^-(\omega). \quad (9.07)$$

Это значит, что для оптимального фильтра функция  $J(\omega)$  должна быть аналитической функцией во всей верхней полуплоскости, а  $K_1(\omega)$  — аналитической во всей нижней полуплоскости. Мы показали необходимость этого, опираясь на соотношения (8.17) и (8.18). Достаточность этих условий для соотношений (8.17) и (8.18) легко доказывается с помощью теоремы Коши, а для соотношений (8.11) и (8.13) на основании леммы Жордана, если функции  $J(\omega)$  и  $K_1(\omega)$  убывают равномерно на бесконечности в тех полуплоскостях, где они являются аналитическими. Действительно, в силу аналитичности функции  $J(\omega)$  в верхней полуплоскости мы можем преобразовать интеграл по прямолинейному контуру в левой части формулы (8.13) в интеграл по бесконечной полуокружности  $C_R$  (рис. 8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} J(\omega) d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{i\omega\tau} J(\omega) d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\omega\tau} J(\omega) d\omega. \quad (9.08)$$

Он равен нулю при  $\tau > 0$ , если функция  $J(\omega)$  убывает на бесконечности. Это соотношение удовлетворяется и при  $\tau = 0$ , если  $J(\omega)$  убывает быстрее, чем  $\frac{1}{\omega^{1+\sigma}}$ , тогда интеграл по полуокружности исчезает и при  $\tau = 0$ . Если функция  $K_1(\omega)$  на бесконечности исчезает равномерно, то к ней тоже можно применить лемму Жордана и написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K_1(\omega) d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\omega\tau} K_1(\omega) d\omega = 0 \quad (9.09)$$

при  $\tau < 0$ , где  $C_R$  — полуокружность в нижней полуплоскости.

Таким образом, мы приходим к следующим требованиям:

А. Функция  $K_1(\omega)$  должна быть аналитической в нижней полуплоскости ( $\text{Im } \omega \leq 0$ ) и исчезать при  $|\omega| \rightarrow \infty$  равномерно (в этой полуплоскости). В соответствии с формулой (8.09) частотная характеристика  $K(\omega)$  должна представлять собой



аналитическую функцию в нижней полуплоскости и расти в ней не быстрее некоторого полинома  $Q(\omega) = \sum_{\alpha=0}^q Q_{\alpha}(i\omega)^{\alpha}$ .

*B.* Функция  $J(\omega) = K(\omega) S_f(\omega) - S_{hf}(\omega)$  должна быть аналитической функцией в верхней полуплоскости ( $\text{Im } \omega \geq 0$ ) и должна в ней убывать при  $|\omega| \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $\frac{1}{\omega^{1+\sigma}}$  (где  $\sigma > 0$ ).

Из требований *A* и *B* можно получить решение задачи, которое выражается через вспомогательные функции  $S_f^+(\omega)$  и  $S_f^-(\omega)$ , произведение которых равно данной функции  $S_f(\omega)$ , т. е.

$$S_f(\omega) = S_f^+(\omega) S_f^-(\omega), \quad (9.10)$$

где  $S_f^+(\omega)$  и  $S_f^-(\omega)$ , подобно функции  $S_f(\omega)$ , являются аналитическими в полосе (9.01) и не имеют в ней нулей, кроме того функция  $S_f^+(\omega)$  является аналитической и не обращается в нуль во всей верхней полуплоскости (при  $\text{Im } \omega \geq -\gamma$ ), а функция  $S_f^-(\omega)$  обладает теми же свойствами в нижней полуплоскости (при  $\text{Im } \omega \leq \gamma$ ).

Разумеется, это разбиение на множители неоднозначно, и формулу (9.10) нужно чем-то дополнить, чтобы точно определить  $S_f^+$  и  $S_f^-$ . Известно [см. формулу (3.02)], что  $S_f(\omega)$  есть четная функция  $\omega$ . Поэтому

$$S_f^+(\omega) S_f^-(\omega) = S_f^+(-\omega) S_f^-(-\omega). \quad (9.11)$$

Отсюда естественно принять, что

$$S_f^+(\omega) = S_f^-(-\omega), \quad S_f^-(\omega) = S_f^+(-\omega). \quad (9.12)$$

Будем считать, что на бесконечности в нашей полосе функция  $S_f(\omega)$  убывает, как  $\frac{c^2}{\omega^{2r}}$ , где  $r=1, 2, \dots$  и  $c$ —положительная постоянная. Это значит, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{\omega^{2r} S_f(\omega)}{c^2} = 1. \quad (9.13)$$

Чтобы фактически найти  $S_f^+$  и  $S_f^-$ , введем функцию

$$G(\omega) = \ln \frac{(\omega^2 + \tilde{\gamma}^2)^r S_f(\omega)}{c^2}, \quad (9.14)$$

где  $\tilde{\gamma}$  — произвольное число, большее  $\gamma$ . Будем считать, что при вещественных значениях  $\omega$  функция  $G(\omega)$  тоже вещественна, для чего возьмем главную ветвь логарифма. Кроме того,  $G(\omega)$  — аналитическая функция в пределах полосы. Поэтому лемма I применима к  $G(\omega)$ , ибо  $G(\omega) \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re} \omega \rightarrow \pm \infty$ .

Используя формулу (9.10) и тождество

$$\omega^2 + \tilde{\gamma}^2 = (\tilde{\gamma} + i\omega)(\tilde{\gamma} - i\omega), \quad (9.15)$$

получим

$$G(\omega) = \ln \frac{(\tilde{\gamma} - i\omega)^r S_f^+(\omega)}{c} + \ln \frac{(\tilde{\gamma} + i\omega)^r S_f^-(\omega)}{c}. \quad (9.16)$$

Первый логарифм формулы (9.16) является функцией, аналитической в верхней полуплоскости, второй логарифм является функцией, аналитической в нижней полуплоскости. Иначе говоря, в силу формулы (8.23) можно положить

$$G^+(\omega) = \ln \frac{(\tilde{\gamma} - i\omega)^r S_f^+(\omega)}{c}, \quad G^-(\omega) = \ln \frac{(\tilde{\gamma} + i\omega)^r S_f^-(\omega)}{c}, \quad (9.17)$$

откуда функции  $S_f^+$  и  $S_f^-$  получаются в виде

$$S_f^+(\omega) = \frac{c}{(\tilde{\gamma} - i\omega)^r} e^{G^+(\omega)}, \quad S_f^-(\omega) = \frac{c}{(\tilde{\gamma} + i\omega)^r} e^{G^-(\omega)}, \quad (9.18)$$

причем сами функции  $G^+$  и  $G^-$  определяются формулами (8.26).

Недостаток этих формул в том, что в них входит произвольное число  $\tilde{\gamma}$  и что они выведены при условии (9.13). В дальнейшем мы постараемся избавиться от этих ограничений.

Функции  $S_f^+$  и  $S_f^-$ , определенные формулами (9.18), обладают свойствами, сформулированными выше. Таким образом, лемма I позволила разбить функцию  $S_f(\omega)$  по формуле (9.10). В дальнейшем мы всюду будем под  $S_f^+$  и  $S_f^-$  понимать выражения (9.18). На бесконечности (в тех

полуплоскостях, где они являются аналитическими) они удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{(-i\omega)^r S_f^+(\omega)}{c} = 1, \quad \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{(i\omega)^r S_f^-(\omega)}{c} = 1. \quad (9.19)$$

Выписанные выше формулы на первый взгляд довольно сложны. Однако в приложениях часто можно взять  $S_f(\omega)$  в виде рациональной функции, т. е. отношения двух полиномов [ср. формулу (4.33)]

$$S_f(\omega) = \frac{P_b(\omega^2)}{P_a(\omega^2)} \quad (a > b). \quad (9.20)$$

Это — полиномы степени  $a$  и  $b$  от  $\omega^2$ , поскольку они должны быть четными функциями  $\omega$ . Будем считать, что

$$P_a(\omega^2) = 0 \quad \text{при } \omega = \pm x_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, a) \quad (9.21)$$

и

$$P_b(\omega^2) = 0 \quad \text{при } \omega = \pm y_\beta \quad (\beta = 1, 2, \dots, b). \quad (9.22)$$

Тогда функцию  $S_f(\omega)$  можно представить в виде произведения

$$S_f(\omega) = c^2 \frac{\prod (\omega^2 - y_\beta^2)}{\prod (\omega^2 - x_\alpha^2)} = (-1)^r c^2 \frac{\prod (y_\beta^2 - \omega^2)}{\prod (x_\alpha^2 - \omega^2)} \quad (r = a - b), \quad (9.23)$$

и функции  $S_f^+$  и  $S_f^-$  равны

$$S_f^+(\omega) = i^r c \frac{\prod (y_\beta + \omega)}{\prod (x_\alpha + \omega)}, \quad S_f^-(\omega) = i^r c \frac{\prod (y_\beta - \omega)}{\prod (x_\alpha - \omega)}. \quad (9.24)$$

Здесь мы через  $x_\alpha$  и  $y_\beta$  обозначили корни знаменателя и числителя, находящихся в верхней полуплоскости ( $\text{Im} x_\alpha > 0$  и  $\text{Im} y_\beta > 0$ ), а через  $-x_\alpha$  и  $-y_\beta$  корни в нижней полуплоскости. Действительно, выражения (9.24) удовлетворяют соотношениям (9.10), (9.12) и (9.19) и поэтому совпадают с выражениями (9.18).

В силу формулы (9.10) мы имеем

$$J(\omega) = K(\omega) S_f^+(\omega) S_f^-(\omega) - S_{hf}(\omega), \quad (9.25)$$

откуда получаем соотношение

$$\frac{S_{hf}(\omega)}{S_f^+(\omega)} = K(\omega) S_f^-(\omega) - \frac{J(\omega)}{S_f^+(\omega)}, \quad (9.26)$$

в котором  $S_f^+$ ,  $S_f^-$  и  $S_{hf}$  — известные функции,  $J$  и  $K$  — неизвестные. Значит, левая часть соотношения (9.26) — известная функция, которую мы обозначим через  $H(\omega)$ , а правая — неизвестная, причем первое слагаемое по условию  $A$  есть функция, аналитическая в нижней полуплоскости, а второе слагаемое по условию  $B$  — функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Из свойств функций  $S_{hf}$  и  $S_f^+$  вытекает, что  $H(\omega)$  удовлетворяет условиям леммы I, кроме, быть может, условия о поведении на бесконечности. Если последнее условие также выполняется, то функцию  $H(\omega)$  можно представить согласно лемме I в виде

$$H(\omega) = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f^+(\omega)} = H^+(\omega) + H^-(\omega), \quad (9.27)$$

где  $H^+$  есть функция, аналитическая в верхней полуплоскости,  $H^-$  — в нижней. Если отождествить слагаемые в правых частях формул (9.26) и (9.27), являющиеся аналитическими функциями в тех же полуплоскостях, то мы получим

$$-\frac{J(\omega)}{S_f^+(\omega)} = H^+(\omega) \quad K(\omega) S_f^-(\omega) = H^-(\omega), \quad (9.28)$$

так что

$$J(\omega) = -S_f^+(\omega) H^+(\omega) \quad \text{и} \quad K(\omega) = \frac{H^-(\omega)}{S_f^-(\omega)}, \quad (9.29)$$

причем

$$H^+(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\gamma-\infty}^{-i\gamma+\infty} \frac{H(\omega) d\omega}{\omega - \omega}, \quad H^-(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{H(\omega) d\omega}{\omega - \omega}. \quad (9.30)$$

Если мы определим функции  $J(\omega)$  и  $K(\omega)$  с помощью формул (9.29), то, очевидно, они будут аналитическими в тех полуплоскостях, где это требуется по условиям  $A$  и  $B$ . В отношении поведения на бесконечности условие  $B$  выполняется, поскольку функции  $S_f^+$  и  $H^+$  обе убывают на бесконечности в верхней полуплоскости, а условие  $A$  будет выполнено, если  $S_{hf}$  и  $S_f^-$  — рациональные функции.

Рассмотрим теперь случай, когда  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$  — рациональные функции, но функция  $H(\omega)$  не убывает на бес-

конечности. Тогда ее можно представить в виде суммы двух функций — полинома  $P(\omega)$  и функции  $H_1(\omega)$ , уже удовлетворяющей всем условиям леммы I

$$H(\omega) = P(\omega) + H_1(\omega). \quad (9.31)$$

Мы образуем  $H_1^+$  и  $H_1^-$  по лемме I, полагаем

$$H^+(\omega) = P(\omega) + H_1^+(\omega), \quad H^-(\omega) = H_1^-(\omega) \quad (9.32)$$

и опять определяем функции  $J(\omega)$  и  $K(\omega)$  с помощью формул (9.29). Проверим теперь условие  $B$  в отношении поведения на бесконечности. Пусть функции  $S_f$ ,  $S_f^+$  и  $S_f^-$  на бесконечности удовлетворяют соотношениям (9.13) и (9.19). Считая, что  $S_{hf}(\omega)$  убывает, как  $\frac{1}{\omega^s}$  (где  $s \geq 1$ ), мы будем иметь

$$H(\omega) \sim \omega^{r-s} \quad (\text{при } \omega \rightarrow \infty) \quad (9.33)$$

и

$$H^+(\omega) \sim \omega^{r-s}, \quad J(\omega) \sim \frac{1}{\omega^s}, \quad (9.34)$$

так что функция  $J(\omega)$  действительно удовлетворяет условию  $B$ . Условие  $A$  в отношении поведения на бесконечности автоматически выполняется, поскольку спектральные интенсивности суть рациональные функции.

В предыдущем изложении мы не учли одного существенного обстоятельства, без которого задача будет неоднозначной и решение (9.29) — лишь одним из возможных. Действительно, наряду с разбиением функции  $H(\omega)$ , выбранным выше, можно взять другое разбиение

$$H(\omega) = H^{++}(\omega) + H^{--}(\omega), \quad (9.35)$$

в котором функции  $H^{++}$  и  $H^{--}$  являются аналитическими в тех же полуплоскостях, что и  $H^+$  и  $H^-$ , но ведут себя на бесконечности иначе. Сравнивая последнее выражение со взятым выше разбиением (6.27), мы будем иметь

$$H^{--}(\omega) - H^-(\omega) = H^+(\omega) - H^{++}(\omega), \quad (9.36)$$

где левая часть — аналитическая функция в верхней полуплоскости, правая часть — в нижней. Поэтому обе части равенства (9.36) являются аналитической функцией во всей плоскости комплексного переменного  $\omega$ .

Воспользуемся теперь *теоремой Лиувилля*, которую можно сформулировать так: если функция—аналитическая во всей плоскости комплексного переменного  $\omega$ , то она или неограниченно возрастает при  $|\omega| \rightarrow \infty$  или сводится к постоянной. Поэтому функция  $H^-$  уже не будет убывать

на бесконечности, а будет расти или стремиться к постоянному пределу.

Вычислим интенсивность процесса на выходе оптимального фильтра

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega, \quad (9.37)$$

входящую в выражение (5.26) для средней квадратичной ошибки. При вещественных значениях  $\omega$  мы имеем тождество

$$|S_f^+(\omega)|^2 = |S_f^-(\omega)|^2 = S_f(\omega), \quad (9.38)$$

которое будет обосновано ниже (см. § 11). Поэтому формулы (9.29) и (9.37) дают

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H^-(\omega)|^2 d\omega, \quad (9.39)$$

так что для получения конечного значения  $\overline{x^2}$  (без чего найденное решение никакого смысла не имеет), функция  $|H^-(\omega)|$  должна убывать при  $\omega \rightarrow \pm\infty$  быстрее, чем  $\frac{1}{\nu \omega}$ .

Функции  $H^-$ , определяемые формулами (9.30) и (9.32), этому условию удовлетворяют, в то время как любая другая функция  $H^-$ , о которой мы говорили выше, будет давать  $\overline{x^2} = \infty$ . Условие

$$\overline{x^2} < \infty \quad (9.40)$$

как раз и обеспечивает однозначность нашей задачи, по крайней мере в рамках данного метода ее решения.

## § 10. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ $S_f^+(\omega)$ И $S_f^-(\omega)$

Рассмотрим более детально свойства функций, входя-

ших в выражение для частотной характеристики оптимального фильтра

$$K(\omega) = \frac{H^-(\omega)}{S_f^-(\omega)}, \quad (10.01)$$

выведенное выше.

Начнем с функции

$$G(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega}, \quad (10.02)$$

определенной леммой I. Дифференцируя обе части последнего равенства по  $\omega$ , получим

$$\frac{dG^-(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{(\omega - \omega)^2}. \quad (10.03)$$

Замечая, что

$$-\frac{1}{(\omega - \omega)^2} = \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\omega - \omega},$$

будем интегрировать по частям

$$\frac{dG^-(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{G(\omega)}{\omega - \omega} - \frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{G'(\omega) d\omega}{\omega - \omega}, \quad (10.04)$$

где  $G'(\omega)$  — производная функции  $G$  по  $\omega$ . Поскольку  $\frac{G(\omega)}{\omega - \omega}$  исчезает на бесконечности, первый член справа в равенстве (10.04) равен нулю, и мы имеем

$$\frac{dG^-(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{G'(\omega) d\omega}{\omega - \omega}. \quad (10.05)$$

Возьмем в качестве функции  $G(\omega)$  выражение (9.14). Чтобы избавиться от вспомогательного параметра, представим функцию  $G(\omega)$  в виде

$$G(\omega) = \psi(\omega) + \chi(\omega), \quad (10.06)$$

где

$$\psi(\omega) = \ln \frac{(\omega^2 + \tilde{\gamma}^2)^r}{c^2}, \quad \chi(\omega) = \ln S_f(\omega), \quad (10.07)$$

тогда функции  $G^+$  и  $G^-$  также можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} G^+(\omega) &= \psi^+(\omega) + \chi^+(\omega) \\ G^-(\omega) &= \psi^-(\omega) + \chi^-(\omega) \end{aligned} \right\}. \quad (10.08)$$

Если теперь попытаться найти по формулам вида (8.26) функции  $\psi^+$ ,  $\psi^-$ ,  $\chi^+$  или  $\chi^-$ , то интегралы порознь будут расходиться, в то время как для самой функции  $G$ , которая стремится на бесконечности к нулю, сходимость интегралов обеспечивается.

Мы будем вначале вычислять производные функций  $\psi^+$ ,  $\psi^-$ ,  $\chi^+$  и  $\chi^-$ . Из второго равенства (10.08) вытекает соотношение

$$\frac{dG^-(\omega)}{d\omega} = \frac{d\psi^-(\omega)}{d\omega} + \frac{d\chi^-(\omega)}{d\omega}. \quad (10.09)$$

Поскольку

$$\psi(\omega) = r \ln(\omega + i\tilde{\gamma}) + r \ln(\omega - i\tilde{\gamma}) - \ln c^2 \quad (10.10)$$

и

$$\psi'(\omega) = r \left( \frac{1}{\omega + i\tilde{\gamma}} + \frac{1}{\omega - i\tilde{\gamma}} \right), \quad (10.11)$$

то интеграл

$$\frac{d\psi^-(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\tilde{\gamma}-\infty}^{i\tilde{\gamma}+\infty} \frac{\psi'(\omega) d\omega}{\omega - \omega} \quad (10.12)$$

будет сходиться, ибо функция  $\psi'(\omega)$  убывает как  $\frac{1}{\omega}$ , а вся подынтегральная функция убывает на бесконечности, как  $\frac{1}{\omega^2}$ .

Производную  $\frac{d\psi^-(\omega)}{d\omega}$  легко найти. У подынтегральной функции один полюс выше пути интегрирования ( $\omega = i\tilde{\gamma}$ ), другие два ниже пути интегрирования ( $\omega = -i\tilde{\gamma}$  и  $\omega = \omega$ ). Деформируя путь интегрирования вверх, вычисляя вычет в точке  $\omega = i\tilde{\gamma}$  и пользуясь тем, что интеграл по полуокружности  $C_R$  (рис. 8) при  $R \rightarrow \infty$  стремится к нулю, получаем

$$\frac{d\psi^-(\omega)}{d\omega} = \frac{r}{\omega - i\tilde{\gamma}}, \quad (10.13)$$

откуда



$$\psi^-(\omega) = r \ln(\omega - i\tilde{\gamma}) + \text{const.} \quad (10.14)$$

Выберем постоянную так, чтобы

$$\psi^-(\omega) = \ln \frac{(\tilde{\gamma} + i\omega)^r}{c}. \quad (10.15)$$

Возьмем также функцию  $\psi^+$  в виде

$$\psi^+(\omega) = \psi^-(-\omega) = \ln \frac{(\tilde{\gamma} - i\omega)^r}{c}, \quad (10.16)$$

тогда мы можем переписать формулы (9.18) так

$$S_f^+(\omega) = e^{\chi^+(\omega)}, \quad S_f^-(\omega) = e^{\chi^-(\omega)}, \quad (10.17)$$

поскольку

$$e^{\psi^+(\omega)} = \frac{(\tilde{\gamma} - i\omega)^r}{c}, \quad e^{\psi^-(\omega)} = \frac{(\tilde{\gamma} + i\omega)^r}{c}. \quad (10.18)$$

Перейдем к исследованию функций  $\chi^+$  и  $\chi^-$ . Дифференцируя вторую формулу (10.07), получим

$$\chi'(\omega) = \frac{S_f'(\omega)}{S_f(\omega)}, \quad (10.19)$$

откуда

$$\frac{d\chi^-(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{\chi'(\omega) d\omega}{\omega - \omega} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{S_f'(\omega) d\omega}{S_f(\omega)(\omega - \omega)}. \quad (10.20)$$

Эта формула позволяет найти функцию  $\chi^-(\omega)$  с точностью до постоянного слагаемого.

В качестве примера рассмотрим случай, когда  $S_f(\omega)$  является рациональной функцией (9.20). Тогда

$$\begin{aligned} \chi(\omega) = \ln S_f(\omega) = \ln c^2 + \sum_{\beta=1}^b [\ln(\omega + y_\beta) + \ln(\omega - y_\beta)] - \\ - \sum_{\alpha=1}^a [\ln(\omega + x_\alpha) + \ln(\omega - x_\alpha)] \end{aligned}$$

и

$$\chi'(\omega) = \sum_{\beta=1}^b \left( \frac{1}{\omega + y_\beta} + \frac{1}{\omega - y_\beta} \right) - \sum_{\alpha=1}^a \left( \frac{1}{\omega + x_\alpha} + \frac{1}{\omega - x_\alpha} \right). \quad (10.21)$$

Подставляя выражение (10.21) в формулу (10.19) и вычисляя интеграл по вычетах [подобно тому, как выше это было сделано при выводе формулы (10.13)], получим

$$\frac{d\chi^-(\omega)}{d\omega} = \sum \frac{1}{\omega - y_\beta} - \sum \frac{1}{\omega - x_\alpha} \quad (10.22)$$

и аналогично

$$\frac{d\chi^+(\omega)}{d\omega} = \sum \frac{1}{\omega + y_\beta} - \sum \frac{1}{\omega + x_\alpha}. \quad (10.23)$$

Произведя интегрирование равенств (10.22) и (10.23), получим

$$\left. \begin{aligned} \chi^-(\omega) &= \sum \ln(\omega - y_\beta) - \sum \ln(\omega - x_\alpha) + \text{const} \\ \chi^+(\omega) &= \sum \ln(\omega + y_\beta) - \sum \ln(\omega + x_\alpha) + \text{const} \end{aligned} \right\}, \quad (10.24)$$

и формулы (10.17) принимают вид

$$S_f^+(\omega) = C^+ \frac{\prod(y_\beta + \omega)}{\prod(x_\alpha + \omega)}, \quad S_f^-(\omega) = C^- \frac{\prod(y_\beta - \omega)}{\prod(x_\alpha - \omega)}, \quad (10.25)$$

где  $C^+$  и  $C^-$  — пока неизвестные мультипликативные постоянные. Формула (9.12) приводит к соотношению

$$C^+ = C^-. \quad (10.26)$$

Формула (9.10) дает

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= S_f^+(\omega)S_f^-(\omega) = (-1)^r c^2 \frac{\prod(y_\beta^2 - \omega^2)}{\prod(x_\alpha^2 - \omega^2)} = \\ &= C^+ C^- \frac{\prod(y_\beta^2 - \omega^2)}{\prod(x_\alpha^2 - \omega^2)}, \end{aligned} \quad (10.27)$$

и поэтому

$$C^+ = C^- = \pm i^r c. \quad (10.28)$$

Беря знак плюс, мы получим окончательно

$$S_f^+(\omega) = i^r c \frac{\prod(y_\beta + \omega)}{\prod(x_\alpha + \omega)}, \quad S_f^-(\omega) = i^r c \frac{\prod(y_\beta - \omega)}{\prod(x_\alpha - \omega)}. \quad (10.29)$$

Знак минус дает для оптимального фильтра II типа то же решение. Действительно, при изменении знака  $S_f^+$  и  $S_f^-$  функция  $H$  (а следовательно,  $H^+$  и  $H^-$ ) также изменит знак, и частотная характеристика (10.01) остается без изменения.

Мы получили те же самые формулы (9.24), которые раньше мы писали без вывода и обосновывали лишь не-

посредственной проверкой. Изложенный в данном параграфе метод вычисления функций  $S_f^+$  и  $S_f^-$  имеет, однако, более общее значение и может быть применен в тех случаях, когда функция  $S_f(\omega)$  не является рациональной.

### § 11. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА II ТИПА

Решение интегрального уравнения оптимального фильтра II типа, полученное в § 9, существенным образом опиралось на теорию функций комплексного переменного. В данном параграфе мы модифицируем это решение таким образом, чтобы в него входили значения функций  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$  при вещественных  $\omega$ , для которых их можно фактически найти путем «спектрального анализа» соответствующих случайных процессов.

Начнем с вычисления функций  $S_f^+$  и  $S_f^-$ . Оказывается, что их можно вычислить другим путем, особенно удобным для вещественных частот  $\omega$ . Этот путь устанавливает связь функций  $S_f^+$  и  $S_f^-$  с теорией электрических цепей.

Возьмем функцию

$$G^-(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega}, \quad (11.01)$$

определяемую леммой I. Считая  $\omega$  вещественным, сведем вычисление этого интеграла лишь к интегралу по вещественной оси. Для этого, пользуясь аналитичностью функции  $G(\omega)$ , опустим контур интегрирования на вещественную ось, обходя полюс  $\omega = \omega$  сверху (рис. 11). Провести путь интегрирования через этот полюс нельзя, так как интеграл будет расходящимся из-за окрестности точки  $\omega$ .

Действительно, предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[ \int_{-\infty}^{\omega - \varepsilon_1} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega} + \int_{\omega + \varepsilon_2}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega} \right] \quad (11.02)$$

при независимом стремлении положительных чисел  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  к нулю не существует. Однако при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \rightarrow 0$  предел существует и называется главным значением интеграла по Коши. Мы его обозначим так же, как обычный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\omega - \varepsilon} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega} + \int_{\omega + \varepsilon}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega} \right]. \quad (11.03)$$

Таким путем интегралу по вещественной оси можно придать определенный смысл но он будет отличаться от первоначального интеграла (11.01).

В теории функций комплексного переменного доказывается, что интеграл (11.01) равен

$$G^-(w) = \frac{1}{2} G(w) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - w}. \quad (11.04)$$

Действительно, интеграл по контуру, изображенному на рис. 11, равен половине вычета в точке  $\omega = w$  (т. е. ин-



Рис. 11. Контур интегрирования, идущий по вещественной оси и огибающий точку  $\omega = w$  сверху.

тегралу по бесконечно малой окружности) и интегралу по вещественной оси (в главном значении).

Если  $G(\omega)$  есть четная функция, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - w} = \int_0^{\infty} G(\omega) \left( \frac{1}{\omega - w} - \frac{1}{\omega + w} \right) d\omega = 2w \int_0^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega^2 - w^2}, \quad (11.05)$$

и формула (11.04) принимает вид

$$G^-(w) = \frac{1}{2} G(w) + \frac{iw}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega^2 - w^2}. \quad (11.06)$$

Этот интеграл имеет лучшую сходимость при  $\omega \rightarrow \infty$ , чем интеграл (11.04).

Применим формулу (11.06) к функциям (ср. § 10)

$$\left. \begin{aligned} \chi(\omega) &= \ln S_f(\omega), \\ \chi^+(\omega) &= \ln S_f^+(\omega), \quad \chi^-(\omega) = \ln S_f^-(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (11.07)$$

тогда

$$\chi^-(w) = \frac{1}{2} \chi(w) + \frac{iw}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega^2 - w^2}, \quad (11.08)$$

причем мы предполагаем, что интеграл справа сходится (это заведомо так, если  $S_f$  — рациональная функция). Принимая во внимание, что

$$\chi^+(w) = \chi^-( -w), \quad (11.09)$$

и обозначая

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln S_f(\omega) d\omega}{\omega^2 - \omega^2}, \quad (11.10)$$

мы можем для вещественных  $\omega$  окончательно написать

$$S_f^+(\omega) = \sqrt{S_f(\omega)} e^{-i\varphi(\omega)}, \quad S_f^-(\omega) = \sqrt{S_f(\omega)} e^{i\varphi(\omega)}. \quad (11.11)$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части формулы (11.08) дает абсолютную величину функции  $S_f^+$  и  $S_f^-$ , второе — фазу, причем при вещественных значениях  $\omega$

$$|S_f^+(\omega)|^2 = |S_f^-(\omega)|^2 = S_f(\omega). \quad (11.12)$$

Этим соотношением мы уже пользовались в § 9.

В теории электрических цепей часто ставится такая задача. Известна амплитудно-частотная характеристика (абсолютная величина  $|K(\omega)|$  коэффициента передачи) некоторого фильтра II типа для всех частот от 0 до  $\infty$ . Возникает вопрос, чему равна фазовая характеристика  $\varphi(\omega)$ . Она должна быть такой, чтобы комплексная частотная характеристика

$$K(\omega) = |K(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \quad (11.13)$$

определяла фильтр, использующий входной процесс лишь в прошлом и настоящем, но не в будущем. Функцию  $\varphi(\omega)$ , в частности, можно определить формулой

$$\varphi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |K(\omega)| d\omega}{\omega^2 - \omega^2}, \quad (11.14)$$

подобной формуле (11.10). Действительно, для фильтра II типа функции  $K(\omega)$  должна быть аналитической в нижней полуплоскости (ср. § 9, требование А), а вместе с тем она удовлетворяет соотношению (3.08)

$$K(\omega) K(-\omega) = |K(\omega)|^2, \quad (11.15)$$

где функция  $K(-\omega)$ , очевидно, должна быть аналитической в верхней полуплоскости. Легко показать, что соотношение (11.15) применимо и к частотным характеристикам вида (8.09). Поэтому задача о нахождении  $K(\omega)$  по  $|K(\omega)|$  сводится к задаче о разбиении данной функции  $|K(\omega)|^2$  на

множители (11.15), откуда и получаем формулу (11.14).  
 Для вычислений удобно переписать формулу (11.10) так

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln S_f(\omega) - \ln S_f(\omega)}{\omega^2 - \omega^2} d\omega, \quad (11.16)$$

где  $\ln S_f(\omega)$  — дополнительное слагаемое, благодаря которому обеспечивается сходимость интеграла в точке  $\omega = \omega$ , причем в силу тождества

$$\begin{aligned} \omega \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - \omega^2} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\omega - \omega} - \frac{1}{\omega + \omega} \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \ln \frac{\varepsilon}{2\omega - \varepsilon} - \ln \frac{\varepsilon}{2\omega + \varepsilon} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{2\omega + \varepsilon}{2\omega - \varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (11.17)$$

это не изменяет результата.

Дальнейшее изложение опирается на следующую лемму.

*Лемма II.* Пусть функция  $G(\omega)$  удовлетворяет условиям леммы I в некоторой полосе

$$-\gamma \leq \operatorname{Im} \omega \leq \gamma \quad (11.18)$$

и пусть функция  $g(\tau)$  равна

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} G(\omega) d\omega. \quad (11.19)$$

Тогда функции  $G^+$  и  $G^-$  могут быть вычислены по формулам

$$G^+(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega\tau} g(\tau) d\tau, \quad G^-(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} g(\tau) d\tau. \quad (11.20)$$

Доказательство леммы II почти очевидно. Подставляя в формулу (11.19) разложение

$$G(\omega) = G^+(\omega) + G^-(\omega), \quad (11.21)$$

мы получим

$$g(\tau) = g^+(\tau) + g^-(\tau), \quad (11.22)$$

где

$$g^+(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} G^+(\omega) d\omega, \quad g^-(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} G^-(\omega) d\omega. \quad (11.23)$$

Функции  $G^+(\omega)$  и  $G^-(\omega)$  по лемме I убывают на бесконечности, и интегралы (11.23) имеют смысл. Функция  $G^+(\omega)$  является аналитической в верхней полуплоскости, поэтому при  $\tau > 0$  можно деформировать путь интегрирования вверх и преобразовать его в бесконечно большую полуокружность, опирающуюся на вещественную ось. Интеграл по этой полуокружности равен нулю в силу леммы Жордана, условия которой в данном случае выполняются. Поэтому

$$g^+(\tau) = 0 \text{ при } \tau > 0 \quad (11.24)$$

и аналогично

$$g^-(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0. \quad (11.25)$$

Воспользовавшись обращением интегралов (11.23), будем иметь

$$G^+(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} g^+(\tau) d\tau, \quad G^-(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} g^-(\tau) d\tau. \quad (11.26)$$

В силу формул (11.22), (11.24) и (11.25) интегралы (11.26) и (11.20) совпадают, что и доказывает лемму II.

Эта лемма позволяет по-новому подойти к определению оптимального линейного фильтра II типа. Учитывая все сказанное, можно рассчитывать оптимальный линейный фильтр по следующим этапам.

*1-й этап* сводится к вычислению  $S_f^+$  и  $S_f^-$  способом, изложенным выше. Если функция  $S_f(\omega)$  задана аналитически (например, в рациональном виде), то лучше пользоваться функциями  $\chi^+$  и  $\chi^-$ . Когда  $S_f(\omega)$  задана эмпирически (в виде некоторой кривой), то этого сделать нельзя, и следует пользоваться формулами (11.11) и (11.16).

*2-й этап.* Образует функцию  $H(\omega)$  по формуле

$$H(\omega) = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f^+(\omega)} \quad (11.27)$$

и ее преобразование Фурье

$$\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} H(\omega) d\omega, \quad (11.28)$$

если функция  $H(\omega)$  удовлетворяет условиям леммы I.

Если же (ср. конец § 9)

$$H(\omega) = P(\omega) + H_1(\omega), \quad (11.29)$$

где  $H_1(\omega)$  удовлетворяет условию леммы I, а  $P(\omega)$  — полином, то функцию  $\eta(\tau)$  вычисляем по формуле

$$\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} H_1(\omega) d\omega. \quad (11.30)$$

Для дальнейшего функция  $\eta(\tau)$  нужна лишь при  $\tau > 0$ .

3-й этап сводится к вычислению функции  $H^-(\omega)$ . Ее можно вычислить с помощью леммы II по формуле

$$H^-(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} \eta(\tau) d\tau. \quad (11.31)$$

Если все спектральные функции заданы аналитически, то вместо функции  $\eta(\tau)$  можно пользоваться формулами § 9.

4-й этап совершенно элементарен. Искомая частотная характеристика  $K(\omega)$  вычисляется по формуле

$$K(\omega) = \frac{H^-(\omega)}{S_f^-(\omega)}. \quad (11.32)$$

Здесь берется функция со знаком минус, ибо фильтр II типа не использует входного процесса в „будущем“.

Эти четыре этапа удобны, когда исходные функции заданы эмпирически. Иногда имеет смысл написать вместо четырех формул одну общую

$$K(\omega) = \frac{1}{2\pi S_f^-(\omega)} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f^+(\omega)} d\omega. \quad (11.33)$$

Это и есть окончательная формула для фильтров II типа.

Если функция  $H(\omega) = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f^+(\omega)}$  не удовлетворяет условию



леммы I, то выделяется та часть ее  $H_1(\omega)$ , для которой внутренний интеграл по  $\omega$  в формуле (11.33) существует. В формуле (11.33) мы уже освободились от продолжения в область комплексных частот, где измерять  $S_f(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$  нельзя.

Рассуждения, изложенные выше, относятся ко всем фильтрам II типа — прогнозирующим фильтрам и фильтрам, только отсеивающим помехи, а также к фильтрам, сочетающим прогнозирование или преобразование полезного сигнала с отсеиванием помех. Далее мы рассмотрим некоторые частные случаи таких фильтров.

Следует также отметить, что если  $K(\omega)$  есть рациональная функция частоты, то всегда можно подобрать радиотехническую схему из индуктивностей, емкостей и сопротивлений, которая осуществляет данный оптимальный фильтр. Таким образом, теория оптимальной фильтрации приводит нас к частотным фильтрам, широко применяемым в радиотехнике. Элементарный пример такого фильтра будет дан в § 15.

## § 12. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

До сих пор мы рассматривали фильтры I и II типов с математической точки зрения. Посмотрим, какой физический смысл можно придать математическим формулам, выведенным ранее. Для этого целесообразно рассмотреть некоторую модель случайных процессов.

Простейшее представление о случайных процессах заключается в том, что такие процессы являются наложением нерегулярно возникающих возмущений (импульсов) стандартной формы. Будем считать, что момент появления каждого возмущения является случайным, а его форма — вполне определенной. Если  $t_\alpha$  есть момент появления  $\alpha$ -го возмущения (импульса), то его изменение во времени характеризуется функцией  $v(t - t_\alpha)$ , как показано на рис. 11.

Оказывается, что ряд случайных процессов, например дробовой эффект, действительно может быть представлен таким образом. Эмиссия электронов из катода лампы носит случайный характер. Разобьем ось времени (рис. 12) на много малых отрезков  $\Delta t_\alpha$  и обозначим число вылетевших за отрезок времени  $\Delta t_\alpha$  электронов буквой  $N_\alpha$ . Дальнейшее движение электронов будет зависеть от поля

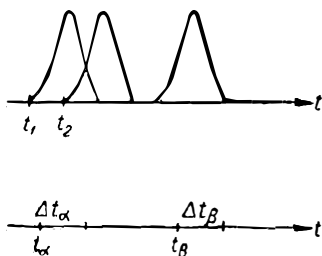


Рис. 12. Случайный процесс как наложение беспорядочно возникающих возмущений определенной формы.

в лампе между анодом и катодом. Если принять за  $v(t)$  ток, возбуждаемый во внешней цепи электроном, вышедшим из катода в момент  $t=0$ , то результирующий ток  $u(t)$  будет равен

$$u(t) = \sum_{\alpha} N_{\alpha} v(t - t_{\alpha}). \quad (12.01)$$

Среднее значение величины  $N_{\alpha}$  будет, очевидно, пропорционально  $\Delta t_{\alpha}$ , так что

$$\bar{N}_{\alpha} = \nu \Delta t_{\alpha}, \quad (12.02)$$

где  $\nu$  — среднее число электронов, вылетающих за единицу времени. Среднее значение случайной функции  $u(t)$  равно

$$\overline{u(t)} = \sum_{\alpha} \bar{N}_{\alpha} v(t - t_{\alpha}) = \nu \sum_{\alpha} v(t - t_{\alpha}) \Delta t_{\alpha} \quad (12.03)$$

или, переходя к пределу (при  $\Delta t_{\alpha} \rightarrow 0$ ),

$$\bar{u} = \nu \int_{-\infty}^{\infty} v(t - \tau) d\tau = \nu \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt. \quad (12.04)$$

В силу очевидного условия

$$v(t) = 0 \text{ при } t < 0 \quad (12.05)$$

можно также написать

$$\bar{u} = \nu \int_0^{\infty} v(t) dt. \quad (12.06)$$

Выражение (12.01) может быть использовано для получения «модели» случайного процесса с произвольной корреляционной функцией (за некоторыми исключениями, см. далее § 13). До сих пор мы рассматривали случайные процессы, среднее значение которых равно нулю. При моделировании случайного процесса  $u(t)$  данным выше способом мы, следовательно, тоже должны считать, что выра-

жение (12.06) должно обращаться в нуль. Для этого достаточно положить

$$v = 0, \quad (12.07)$$

т. е. считать, что среднее значение (12.02) равно нулю. Это возможно, когда  $N_\alpha$  принимает как положительное, так и отрицательное значение, так что с равной вероятностью возникают возмущения  $v(t - t_\alpha)$  как с положительными, так и отрицательными знаками. Будем считать, что если интервалы  $\Delta t_\alpha$  и  $\Delta t_\beta$  не перекрываются, то

$$\overline{N_\alpha N_\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad (12.08)$$

т. е. возмущения возникают в разные интервалы времени статистически независимо друг от друга. Что касается возмущений в один и тот же интервал времени, то мы считаем

$$\overline{N_\alpha^2} = \sigma \Delta t_\alpha, \quad (12.09)$$

т. е. квадрат числа возмущений пропорционален длительности интервала  $\Delta t_\alpha$ .

Если считать, что величина  $N_\alpha = M_\alpha - \overline{M}_\alpha$ , причем случайные величины  $M_\alpha$  подчиняются закону распределения Пуассона и определяют случайный процесс

$$U(t) = \sum_{\alpha} M_{\alpha} v(t - t_{\alpha}),$$

связанный с процессом (12.01) соотношением

$$u(t) = U(t) - \overline{U},$$

то число  $\sigma$  имеет вполне определенный смысл: это есть среднее число возмущений, образующих процесс  $U(t)$ , за единицу времени,

Действительно, из закона Пуассона мы имеем

$$\overline{N_\alpha^2} = \overline{M_\alpha^2} - (\overline{M}_\alpha)^2 = \overline{M}_\alpha,$$

откуда и вытекает смысл соотношения (12.09).

Вычислим автокорреляционную функцию

$$R_u(\tau) = \overline{u(t) u(t - \tau)} = \sum_{\alpha, \beta} \overline{N_\alpha N_\beta} v(t - t_\alpha) v(t - \tau - t_\beta). \quad (12.10)$$

Используя формулы (12.08) и (12.09), получим

$$\begin{aligned}
 R_u(\tau) &= \sum_{\alpha} \overline{N_{\alpha}^2} v(t-t_{\alpha}) v(t-\tau-t_{\alpha}) = \\
 &= \sigma \sum_{\alpha} v(t-t_{\alpha}) v(t-\tau-t_{\alpha}) \Delta t_{\alpha}, \quad (12.11)
 \end{aligned}$$

и окончательно при  $\Delta t_{\alpha} \rightarrow 0$  будем иметь

$$R_u(\tau) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} v(t-s) v(t-s-\tau) ds = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} v(t) v(t-\tau) dt. \quad (12.12)$$

Таким образом, автокорреляционная функция данного случайного процесса представляется в виде интегралов, подобных рассмотренным в конце § 1.

Если считать, что „стандартные“ возмущения  $v(t)$  удовлетворяют условию (12.05) и при  $t \rightarrow \infty$  затухают достаточно быстро, то мы можем применить преобразование Фурье. Пусть  $V(\omega)$  будет комплексной спектральной амплитудой возмущения  $v(t)$ , равной

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} v(t) dt, \quad (12.13)$$

тогда, применяя преобразование Фурье, можно написать

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega) d\omega.$$

Важно заметить, что „стандартное“ возмущение  $v(t)$  разлагается в интеграл Фурье, а сам случайный процесс  $u(t)$  — нет. Поэтому имеет смысл говорить лишь о спектральной интенсивности случайных процессов, а не об их спектральной амплитуде.

Автокорреляционная функция процесса  $u(t)$  равна

$$\begin{aligned}
 R_u(\tau) &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau) dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega) d\omega = \\
 &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} V(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} v(t) dt,
 \end{aligned}$$

или

$$R_u(\tau) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |V(\omega)|^2 d\omega.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (2.16), связывающей автокорреляционную функцию случайного процесса  $u(t)$  с его спектральной интенсивностью, легко находим последнюю

$$S_u(\omega) = \sigma |V(\omega)|^2. \quad (12.14)$$

Она пропорциональна квадрату абсолютной величины спектральной амплитуды возмущения.

Последняя формула показывает нам, как подобрать соответствующую модель для любого случайного процесса. Разумеется, это — неоднозначная задача, и для случайного процесса, заданного лишь своей корреляционной функцией, можно дать много разных моделей (подбирая, например, разные фазы  $V(\omega)$ ).

В § 3 мы вывели соотношение (3.33), связывающее между собой время корреляции  $\Delta\tau$  и ширину спектра  $\Delta\omega$ . В рассмотренной выше модели  $\Delta\tau$  определяется длительностью возмущения  $v(t)$ . В частности, если мы возьмем возмущения бесконечно малой длительности, то им соответствует бесконечно широкий спектр. Такой спектр имеет так называемый белый шум, о котором мы уже говорили в § 6 [см. формулу (6.21)]. Ниже мы будем обозначать этот процесс через  $w(t)$ . Его спектральная интенсивность является константой

$$S_w(\omega) = \text{const}. \quad (12.15)$$

Это, конечно, предельный случай. Практически всякий реальный процесс будет иметь спектральную интенсивность, спадающую при достаточно высоких частотах. Это видно и из модели: импульсы с нулевой длительностью осуществить невозможно, а возмущения конечной, но малой длительности всегда приводят к спектральной интенсивности, исчезающей при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Однако в зависимости от условий задачи (ср. § 6) всегда можно считать, что выполнение условия (12.15) в достаточно широком диапазоне частот приводит практически к тому же результату, как если бы реализовался «настоящий» белый шум, строго удовлетворяющий соотношению (12.15) при всех частотах.

Если мы будем для белого шума искать корреляционную функцию, то интеграл (2.17) не будет сходиться, так что о корреляционной функции такого процесса говорить нельзя. Исходя из представления о белом шуме как о совокупности мгновенных импульсов и учитывая, что по формуле (12.12) корреляционная функция отлична от нуля (при  $\tau \neq 0$ ) лишь за счет конечной длительности возмущений, можно заключить, что для белого шума корреляционная функция при  $\tau \neq 0$  равна нулю, так что белый шум — абсолютно случайный процесс, в котором никакой корреляционной связи между настоящим и будущим или между прошлым и настоящим не существует. В частности, прогнозирование белого шума невозможно.

Представим теперь, что белый шум пропускается через фильтр, вырезающий из широкого спектра какой-то спектральный интервал. На выходе этого фильтра будет процесс, который уже будет иметь какую-то корреляцию во времени. Если рассматривать белый шум как совокупность нерегулярно возникающих мгновенных импульсов, то эта связь объясняется тем, что каждый импульс при прохождении через фильтр «размазывается» определенным образом, превращается в реакцию фильтра на единственный импульс и поэтому на выходе фильтра процесс имеет корреляцию во времени. Таким образом, если случайный процесс рассматривать только с точки зрения его автокорреляционных свойств и соответствующих спектральных интенсивностей, то он ничем не отличается от белого шума, пропущенного через соответствующий фильтр. Представим себе, что белый шум  $\omega(t)$  со спектральной интенсивностью  $S_\omega = 1$  мы подаем на вход некоторого фильтра II типа с частотной характеристикой  $S_f^-(\omega)$ . Тогда по формулам (4.10) и (11.12) можно написать

$$S_x(\omega) = |K(\omega)|^2 S_\omega(\omega) = |S_f^-(\omega)|^2 = S_f(\omega), \quad (12.16)$$

т. е. на выходе получаем случайный процесс со спектральной интенсивностью  $S_f(\omega)$ . Поэтому процесс  $f(t)$  можно рассматривать (рис. 13) как результат прохождения белого шума через фильтр II типа с соответствующим образом подобранной частотной характеристикой  $S_f^-(\omega)$ . Наоборот, пропуская случайный процесс  $f(t)$  через фильтр с частотной характеристикой  $\frac{1}{S_f^-(\omega)}$ , получаем белый шум со спектральной интенсивностью, равной единице (рис. 14).

Выясним теперь смысл формулы

$$K(\omega) = \frac{H^-(\omega)}{S_f^-(\omega)} \quad (12.17)$$

для частотной характеристики оптимального фильтра II типа.

На основании этой формулы можем записать оптимальный фильтр II типа, как последовательно включенные

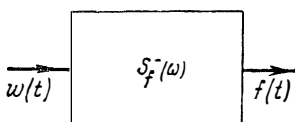


Рис. 13. Фильтр с частотной характеристикой  $S_f^-(\omega)$ , превращающий белый шум  $w(t)$  в случайный процесс  $f(t)$  или в его модель.

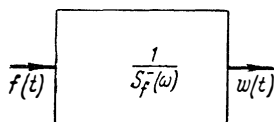


Рис. 14. Фильтр с частотной характеристикой  $\frac{1}{S_f^-(\omega)}$ , превращающий случайный процесс  $f(t)$  в белый шум.

фильтры: 1) фильтр с частотной характеристикой  $\frac{1}{S_f^-(\omega)}$ , преобразующий данный нам случайный процесс  $f(t)$  в белый шум  $w(t)$ ; 2) фильтр с частотной характеристикой  $H^-(\omega)$ . Чтобы выяснить физический смысл второго

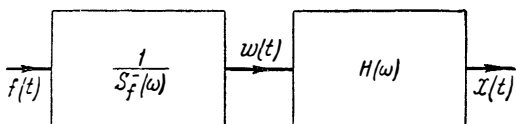


Рис. 15. Схема действия фильтра с частотной характеристикой (12.19).

фильтра, посмотрим, какой фильтр следует поставить вместо него, чтобы получить оптимальный фильтр I типа (рис. 15). Согласно формулам (2.28) и (9.10) нужно взять

$$H(\omega) = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f^+(\omega)}. \quad (12.18)$$

Тогда, действительно, получим частотную характеристику всего фильтра в виде

$$K(\omega) = \frac{H(\omega)}{S_f^-(\omega)} = \frac{S_{hf}(\omega)}{S_f(\omega)}. \quad (12.19)$$

Если же мы ограничимся фильтрами II типа, то вместо  $H(\omega)$  нужно взять  $H^-(\omega)$ , т. е. взять фильтр, использующий лишь „прошлые“ импульсы белого шума. Действительно, согласно лемме II (см. § 11) реакция фильтра  $H^-(\omega)$  на единичный импульс при  $\tau \geq 0$  та же, что у фильтра  $H(\omega)$ , но при  $\tau < 0$  она равна нулю.

Моделирование процесса  $f(t)$  белым шумом, прошедшим через фильтр, позволяет наглядно понять смысл статистического прогнозирования, называемого также экстраполяцией или упреждением. Пусть

$$f(t) = m(t), \quad n(t) = 0, \quad h(t) = m(t + s), \quad (12.20)$$

тогда по формуле (4.15) будем иметь

$$S_{hf}(\omega) = e^{i\omega s} S_f^-(\omega), \quad (12.21)$$

и функция  $H(\omega)$  будет равна

$$H(\omega) = e^{i\omega s} S_f^-(\omega). \quad (12.22)$$

Такая функция  $H(\omega)$  удовлетворяет условиям леммы I, и формула (11.28) принимает вид

$$\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau+s)} S_f^-(\omega) d\omega = \xi(\tau + s), \quad (12.23)$$

где функция

$$\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_f^-(\omega) d\omega \quad (12.24)$$

в силу леммы II удовлетворяет условию

$$\xi(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau < 0. \quad (12.25)$$

Легко видеть, что функция  $\xi(\tau)$  есть реакция на единичный импульс для фильтра, имеющего частотную характеристику  $S_f^-(\omega)$ . Более того,  $\xi(\tau)$  дает форму импульсов белого шума после их прохождения через фильтр  $S_f^-(\omega)$ , т. е. форму импульсов, моделирующих процесс  $f(t)$  (см. рис. 13).

По лемме II фильтр с частотной характеристикой  $H^-(\omega)$  обладает реакцией  $\eta^-(\tau)$ , равной

$$\left. \begin{aligned} \eta^-(\tau) &= \eta(\tau) = \xi(\tau + s) && \text{при } \tau > 0 \\ \eta^-(\tau) &= 0 && \text{при } \tau < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (12.26)$$



и, значит, он работает по формуле

$$x(t) = \int_0^{\infty} \eta^-(\tau) \omega(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \xi(\tau + s) \omega(t - \tau) d\tau \quad (12.27)$$

или

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t-s} \xi(t - t') \omega(t' - s) dt'. \quad (12.28)$$

Работа прогнозирующего фильтра изображена на рис. 16. Первая строчка рис. 16 изображает белый шум.

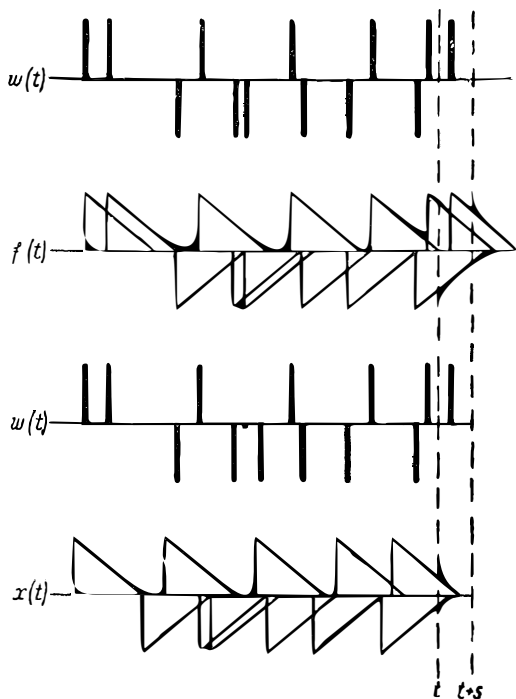


Рис. 16. Схема действия фильтра, прогнозирующего значение  $f(t+s)$ .

При его прохождении через фильтр  $S_f^-(\omega)$  каждый импульс, относящийся к моменту  $t_\alpha$ , размывается, переходя в импульс  $\xi(t - t_\alpha)$ . Вторая строчка дает модельное изображение случайного процесса  $f(t)$  и наглядно поясняет, на чем может основываться его прогнозирование.

Значение  $f(t+s)$  можно рассматривать как результат наложения возмущений  $\xi(t-t_\alpha)$ , уже возникающих к моменту  $t$  и продолженных далее „стандартным“ образом. За время  $s$  возникнут, конечно, новые возмущения, обуславливающие непрогнозируемую часть значения  $f(t+s)$ . Они делают прогноз тем менее точным, чем дальше вперед мы прогнозируем. Иными словами, чем более долгосрочен прогноз, тем он менее достоверен. Можно показать, что средняя квадратичная ошибка в пределе (при  $s \rightarrow \infty$ ) стремится к  $\bar{j}^2$ , т. е. к среднему квадрату самой функции, а прогнозируемое значение  $f(t+s)$  — к нулю.

Третья и четвертая строчка рис. 16 построены в соответствии с формулой (12.17) для  $K(\omega)$ : они показывают, что по теории статистического прогнозирования все происходит так, как это было сформулировано выше. Пройдя

через фильтр  $\frac{1}{S_f^-(\omega)}$ , процесс  $f(t)$  превращается в белый

шум, точно такой же, как и в начале (третья и первая строчки тождественны). Заключительное звено фильтра  $H^-(\omega)$ , работающее по формуле (12.28), переносит каждый импульс белого шума на  $s$  секунд раньше и продолжает его по закону  $\xi(t-t')$ . Функция  $x(t)$ , изображенная на четвертой строчке, прогнозирует значение  $f(t+s)$ , обусловленное таким продолжением.

### § 13. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Предыдущие результаты, в частности теория „прогнозирующего“ фильтра, базировались на предположении, что функции  $S_f^+(\omega)$  и  $S_f^-(\omega)$  существуют. В случае, когда  $S_f(\omega)$  есть рациональная функция частоты, эти функции всегда можно построить (см. § 9 или 10), и, следовательно, процесс  $f(t)$  всегда можно с помощью надлежащего фильтра  $\Pi$  типа превратить в белый шум (см. рис. 14) и, наоборот, получить эквивалент процесса  $f(t)$  пропусканием белого шума через „обратный“ фильтр  $\Pi$  типа (рис. 13). В данном случае частотные характеристики обоих фильтров также являются рациональными функциями [ср. формулу (9.24)], так что они легко осуществляются в виде электрической цепи с сосредоточенными постоянными  $L$ ,  $C$  и  $R$  (ср. далее § 15).

Проблему разбиения данной функции  $S_f(\omega)$  на множи-  
тели можно интерпретировать с помощью модели случай-  
ного процесса, рассмотренной в § 12. А именно, будем  
считать процесс  $f(t)$  наложением случайно возникающих  
возмущений  $v(t-t_\alpha)$  определенной формы. Тогда спект-  
ральная амплитуда  $V(\omega)$  этих возмущений должна быть  
связана с заданной спектральной интенсивностью  $S_f(\omega)$   
соотношением

$$S_f(\omega) = \sigma |V(\omega)|^2 = \sigma V(\omega) V(-\omega), \quad (13.01)$$

в соответствии с формулой (12.14). Функция  $v(t)$  должна  
удовлетворять условию (12.05), поэтому функция  $V(\omega)$   
должна быть аналитической в нижней полуплоскости  
 $\text{Im } \omega \leq 0$ , а функция  $V(-\omega)$  — в верхней. В частности,  $V(\omega)$   
можно определить соотношением

$$S_f^-(\omega) = \sqrt{\sigma} V(\omega) \quad (13.02)$$

и, в этом случае функция  $v(t)$  лишь постоянным множи-  
телем  $\sqrt{\sigma}$  отличается от реакции фильтра  $S_f^-(\omega)$  на еди-  
ничный импульс, о чем мы уже говорили в § 12.

Если для  $S_f(\omega)$  брать более широкий класс функций,  
чем рациональные, то мы можем встретиться с так назы-  
ваемыми *сингулярными* случайными процессами, для ко-  
торых функции  $S_f^-(\omega)$  и  $V(\omega)$  не существуют. Примерами  
сингулярных случайных процессов могут служить процес-  
сы с автокорреляционными функциями и спектральными  
интенсивностями (3.24) и (3.25). Такие процессы развитой  
выше теории не подчиняются, интегралы (11.08), (11.10)  
и (11.16) для них расходятся, поскольку  $\ln S_f(\omega)$  слишком  
быстро возрастает при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ . Случайный процесс,  
определяемый формулами (3.26), также является сингуляр-  
ным, так как для него  $\ln S_f(\omega) = -\infty$  при  $|\omega| > \omega_0$ .

Случайный процесс  $f(t)$  называется сингулярным, если  
интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln S_f(\omega) d\omega}{\omega^2 - \omega^2} \quad (13.03)$$

расходится. Для того чтобы подчеркнуть, что расходи-  
мость важна при  $\omega \rightarrow \infty$  (а не при  $\omega = \pm \omega_0$ ), в интеграле

(13.03) можно написать  $\omega_1^2$  вместо  $-\omega^2$ . Тогда условие сингулярности примет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln S_f(\omega) d\omega}{\omega^2 + \omega_1^2} = \infty \quad (\omega_1^2 > 0). \quad (13.04)$$

Сингулярность процесса означает, что он не может быть преобразован в эквивалент белого шума с помощью фильтра II типа и не может быть представлен в виде наложения беспорядочно возникающих возмущений. Ниже мы убедимся на примере, что сингулярные процессы обладают большей устойчивостью во времени, чем рассмотренные выше «регулярные» процессы, и поэтому могут быть прогнозированы сколь угодно далеко вперед со сколь угодно малой ошибкой. Регулярные же процессы, как мы видели выше, надежно прогнозируются лишь на интервал времени, сравнимый со временем корреляции, т. е. с длительностью единичного возмущения в «модели» соответствующего процесса.

Рассмотрим сингулярный процесс  $f(t)$ , удовлетворяющий условию

$$S_f(\omega) = 0 \quad \text{при } \omega < -\omega_0 \text{ и } \omega > \omega_0. \quad (13.05)$$

Частным случаем такого процесса является процесс, у которого функция  $S_f(\omega)$  постоянна в интервале  $(-\omega_0, \omega_0)$  и равна нулю вне этого интервала [формула (3.26)]. Вообще же четная функция  $S_f(\omega)$  может изменяться в интервале  $(-\omega_0, \omega_0)$  любым образом, и мы будем предполагать лишь, что она ограничена

$$S_f(\omega) \leq S_0 \quad \text{при } -\omega_0 < \omega < \omega_0. \quad (13.06)$$

Покажем, что процесс  $f(t)$  можно экстраполировать сколь угодно далеко. Для этого мы выразим [см. далее формулу (13.17)] в явной форме значение  $f(t)$  через значения функции  $f$  в предыдущие моменты  $t - \tau, t - 2\tau, \dots$ , где  $\tau > 0$  — надлежащим образом выбранный отрезок времени. Рассмотрим случайную величину

$$\begin{aligned} \Delta_p(t) = & f(t) - C_p^1 f(t - \tau) + C_p^2 f(t - 2\tau) - \\ & - \dots + (-1)^p C_p^p f(t - p\tau), \end{aligned} \quad (13.07)$$

где  $C_p^q$  суть биномиальные коэффициенты

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{q!}. \quad (13.08)$$

Величина  $\Delta_p(t)$  называется  $p$ -й разностью функции  $f(t)$ . В частности, при  $p=1$  и  $p=2$  получаем первую и вторую разности

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(t) &= f(t) - f(t - \tau) \\ \Delta_2(t) &= f(t) - 2f(t - \tau) + f(t - 2\tau). \end{aligned} \right\} \quad (13.09)$$

Случайные процессы  $f(t)$  и  $\Delta_p(t)$  связаны линейным преобразованием. Чтобы вычислить частотную характеристику фильтра, осуществляющего это преобразование, воспользуемся формулой (2.21), тогда

$$\Delta_p(t) = [1 - C_p^1 e^{-i\omega\tau} + C_p^2 e^{-2i\omega\tau} - \dots + (-1)^p C_p^p e^{-pi\omega\tau}] f_\omega e^{i\omega t} = (1 - e^{-i\omega\tau})^p f_\omega e^{i\omega t} \quad (13.10)$$

и, следовательно, частотная характеристика равна

$$\left. \begin{aligned} K(\omega) &= (1 - e^{-i\omega\tau})^p, \\ |K(\omega)|^2 &= \left(2 \sin \frac{\omega\tau}{2}\right)^{2p}. \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Средний квадрат случайной величины  $\Delta_p(t)$  можно вычислить по общей формуле (3.09)

$$\overline{\Delta_p^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \left(2 \sin \frac{\omega\tau}{2}\right)^{2p} S_f(\omega) d\omega. \quad (13.12)$$

Из неравенства (13.06) следует, что

$$\overline{\Delta_p^2} \leq \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_0} \left(2 \sin \frac{\omega\tau}{2}\right)^{2p} d\omega. \quad (13.13)$$

Если выбрать теперь  $\tau$  таким, чтобы было

$$2 \sin \frac{\omega_0\tau}{2} < 1 \quad (13.14)$$

или

$$\tau < \frac{\pi}{3\omega_0}, \quad (13.15)$$

то мы будем иметь предельное соотношение

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \overline{\Delta_p^2} = 0, \quad (13.16)$$

и, следовательно, переписывая формулу (13.07) в виде

$$\begin{aligned} f(t) = & C_p^1 f(t - \tau) - C_p^2 f(t - 2\tau) + \dots - \\ & - (-1)^p C_p^p f(t - p\tau) + \Delta_p(t), \end{aligned} \quad (13.17)$$

мы можем прогнозировать  $f(t)$  по предыдущим значениям  $f(t - \tau)$ ,  $f(t - 2\tau)$ , ...,  $f(t - p\tau)$ , делая при отбрасывании неизвестного нам слагаемого  $\Delta_p(t)$  ошибку, среднее квадратичное значение которой исчезает при  $p \rightarrow \infty$ . Найдя с любой заданной точностью  $f(t)$ , мы можем использовать это значение для определения  $f(t + \tau)$ ,  $f(t + 2\tau)$  и т. д., допуская при этом сколь угодно малую ошибку.

К приведенному выше доказательству добавим, что применимость формулы (3.07) к линейным операциям, в результате которых получается величина (13.09), мы обосновали в § 4 [см. формулы (4.13) и (4.14), в которых нужно положить  $s = -\tau$ ,  $s = -2\tau$  и т. д.]; тем самым обосновывается вычисление  $\overline{\Delta_p^2}$  по формуле (13.12).

Доказанное выше положение перекликается с теоремой Котельникова, которую мы рассмотрим далее (см. § 19). В самом деле, из формулы (19.10) следует, что случайная функция  $f(t)$  со спектральной интенсивностью (13.05) является аналитической функцией времени и, следовательно, может быть экстраполирована с помощью ряда Тэйлора. Ограничиваясь в этом ряде конечным числом членов (беря, например,  $p-1$  член), мы делаем по существу такую же ошибку, что и при отбрасывании члена  $\Delta_p(t)$  в формуле (13.17). Заметим также, что фигурирующий в теореме Котельникова промежуток времени  $\Delta t$ , по крайней мере втрое шире взятого выше интервала (13.15), необходимого для прогнозирования

$$\Delta t > 3\tau. \quad (13.18)$$

Сингулярность случайных процессов со спектральными интенсивностями, удовлетворяющими условию (13.05), заставляет с осторожностью относиться к формулировкам: радиостанция работает в такой-то полосе частот, телефонный разговор занимает такой-то диапазон частот. Если бы

границы этих диапазонов были вполне резкими и вне этих диапазонов передаваемые сообщения, рассматриваемые как стационарные случайные процессы, обладали бы нулевой спектральной интенсивностью, то данные процессы были бы сингулярными, и их «прошлое» однозначно определяло бы их «будущее». Разумеется, реальная радиопередача или телефонный разговор подобной определенностью не обладают, что указывает на размытость границ частотного диапазона.

Спектр реальных помех также не может удовлетворять условию (13.05), поскольку от сингулярной помехи можно было бы избавиться путем прогнозирования и вычитания. В соответствии с этим мы рассматриваем в теории оптимальных приемников помехи с произвольным спектром.

Подчеркнем, что сингулярные случайные процессы с физической точки зрения являются результатом чрезмерной идеализации реальных процессов. Это легко понять хотя бы из того, что при образовании разностей высокого порядка «исчезают знаки» и требуется все более точное знание значений  $f(t-\tau), \dots, f(t-p\tau)$ , чему мешают неизбежные погрешности и помехи. При наличии сколь угодно слабой помехи  $n(t)$  (например, белого шума), накладывающейся на сингулярный процесс  $m(t)$ , суммарный процесс

$$f(t) = m(t) + n(t) \quad (13.19)$$

перестает быть сингулярным. В самом деле, при отсутствии корреляции между  $m(t)$  и  $n(t)$  мы имеем [ср. формулу (2.37)]

$$S_f(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega), \quad (13.20)$$

и функция  $S_f(\omega)$  может быть разбита на множители  $S_f^+$  и  $S_f^-$ . Прогнозирование процесса  $m(t)$  в этом случае сочетается с отфильтровыванием помехи  $n(t)$ . Оказывается, что в этом случае прогнозирование имеет нормальный характер (ср. § 12): чем долгосрочнее прогноз, тем его средняя квадратичная ошибка больше. Конечно, при стремлении интенсивности помехи  $n(t)$  к нулю мы получаем формальную возможность прогнозирования  $m(t)$  сколь угодно далеко вперед, однако для существенного увеличения длительности надежного прогноза необходимо чрезвычайно сильно увеличивать отношение сигнал/помеха.

#### § 14. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим фильтрацию на фоне весьма интенсивных помех, равномерно распределенных в пределах спектра полезного сигнала

$$S_n(\omega) = S_n = \text{const при } S_m \neq 0. \quad (14.01)$$

Будем считать (ср. § 2), что

$$S_f(\omega) = S_m(\omega) \div S_n, \quad (14.02)$$

т. е. примем, что полезный сигнал и шум статистически независимы. Записав  $S_f(\omega)$  в виде

$$S_f(\omega) = S_n \left[ 1 + \frac{S_m(\omega)}{S_n} \right], \quad (14.03)$$

выразим  $S_f^+$  и  $S_f^-$  через неизвестную функцию  $E(\omega)$

$$\left. \begin{aligned} S_f^-(\omega) &= \sqrt{S_n} \left[ 1 + \frac{E(\omega)}{S_n} \right], \\ S_f^+(\omega) &= \sqrt{S_n} \left[ 1 + \frac{E(-\omega)}{S_n} \right], \end{aligned} \right\} \quad (14.04)$$

откуда

$$S_f^+(\omega) S_f^-(\omega) = S_n \left[ 1 + \frac{E(\omega) + E(-\omega)}{S_n} + \frac{E(\omega)E(-\omega)}{S_n^2} \right]. \quad (14.05)$$

Пренебрегая последним членом в квадратной скобке, можем написать

$$S_f^+(\omega) S_f^-(\omega) = S_n \left[ 1 + \frac{E(\omega) + E(-\omega)}{S_n} \right] = S_n + E(\omega) + E(-\omega). \quad (14.06)$$

Сравнивая равенство (14.06) с равенством (14.02), мы получаем с точностью до членов второго порядка малости

$$S_m(\omega) = E(\omega) \div E(-\omega). \quad (14.07)$$

Так как  $S_f^-(\omega)$  — функция, аналитическая в нижней полуплоскости, то из формулы (14.04) видно, что функция  $E(\omega)$  тоже должна быть аналитической в нижней полуплоскости. Аналогично, функция  $E(-\omega)$  должна быть аналитической в верхней полуплоскости. Значит, чтобы



найти  $E(\omega)$ , нужно разложить  $S_m(\omega)$  на слагаемые по лемме I или лемме II. Согласно лемме II

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S_m(\omega) d\omega. \quad (14.08)$$

При вещественных  $\omega$  вследствие четности функции  $S_m(\omega)$  мы имеем

$$E(-\omega) = E^*(\omega). \quad (14.09)$$

Так как сигнал и помеха предполагаются статистически независимыми, то

$$S_{hf}(\omega) = S_m(\omega), \quad (14.10)$$

и функция  $H(\omega)$  в первом приближении равна

$$H(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{\sqrt{S_n}}. \quad (14.11)$$

Разлагая дальше  $H(\omega)$  по лемме I, в силу постоянства знаменателя получим

$$H^-(\omega) = \frac{E(\omega)}{\sqrt{S_n}}, \quad (14.12)$$

откуда в том же приближении частотная характеристика оптимального фильтра II типа оказывается равной

$$K(\omega) = \frac{E(\omega)}{S_n}. \quad (14.13)$$

Реакция этого фильтра на единичный импульс равна

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{E(\omega)}{S_n} d\omega \quad (14.14)$$

или

$$\left. \begin{aligned} k(\tau) &= \frac{R_m(\tau)}{S_n} \quad \text{при } \tau > 0, \\ k(\tau) &= 0 \quad \text{при } \tau < 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

Средняя квадратичная ошибка фильтрации равна

$$\bar{\varepsilon}^2 = \bar{m}^2 - \frac{1}{2\pi S_n} \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega, \quad (14.16)$$

т. е.

$$\overline{\varepsilon^2} \approx \overline{m^2}. \quad (14.17)$$

Такой же результат был получен ранее для фильтров I типа (ср. § 2).

Формула (14.15) показывает, что при данных условиях функция  $k(\tau)$  пропорциональна корреляционной функции полезного сигнала. Для фильтров II типа это справедливо лишь при  $\tau > 0$ , так как при  $\tau < 0$  должно быть  $k(\tau) = 0$ . Для фильтров I типа формулы (2.43) дает

$$K(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_n}, \quad (14.18)$$

т. е.

$$k(\tau) = \frac{R_m(\tau)}{S_n} \quad (14.19)$$

при всех  $\tau$ .

Фильтры I типа должны иметь меньшую среднюю квадратичную ошибку, чем фильтры II типа, поскольку фильтры I типа используют входной процесс  $f(t)$  за все время от  $-\infty$  до  $\infty$ . Фильтры II типа используют входной сигнал лишь за полубесконечный отрезок времени. В силу ограничения, накладываемого на фильтр II типа, они всегда будут давать большую ошибку, поскольку ясно, что всякий условный минимум всегда больше абсолютного. Вообще можно сказать, что всякое сужение интервала времени, в течение которого используется входная функция, ведет к тому, что прибавляются некоторые дополнительные условия и поэтому увеличивается средняя квадратичная ошибка. Поэтому фильтры III типа имеют среднюю квадратичную ошибку, вообще говоря увеличивающуюся с уменьшением их «памяти» во времени.

Заметим также, что нет резкой границы между фильтрами I и II типов. Существует промежуточный случай, так называемые запаздывающие фильтры. Это такие фильтры II типа, для которых по определению

$$h(t) = m(t + s) \text{ при } s < 0, \quad (14.20)$$

т. е. фильтр выделяет сигнал в более ранний момент времени  $t+s$ , следовательно, использует и часть будущего — от  $t+s$  до  $t$ . Поэтому при  $s=0$  этот фильтр будет «чистым» фильтром II типа, при  $s \rightarrow -\infty$  он переходит в фильтр I типа.

В § 1 мы ввели также понятие фильтров III типа, использующих данный процесс за конечный отрезок времени [см. формулы (1.16)—(1.19)]. Теория таких фильтров довольно сложна, и мы ее не будем излагать в этой книге. Отметим лишь, что между этими фильтрами и рассмотренными выше фильтрами I и II типов также нет резкой границы.

## § 15. ВЫДЕЛЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ФИЛЬТРАМИ II ТИПА

В радиотехнике вопрос о частотной селекции сигналов хорошо изучен. Интересно поэтому сравнить, что дает статистическая теория фильтрации по сравнению с тем, что уже известно. Постановка задачи та же, что и в § 6. Спектральные интенсивности полезного сигнала  $m(t)$  и суммарного процесса  $f(t)$  мы возьмем в прежнем виде

$$S_m(\omega) = c^2 \alpha \left[ \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} \right] \quad (15.01)$$

и

$$S_f(\omega) = S_m(\omega) + S_n = S_n \frac{[\omega^2 - (\omega_0 + i\beta)^2][\omega^2 - (\omega_0 - i\beta)^2]}{[\omega^2 - (\omega_0 + i\alpha)^2][\omega^2 - (\omega_0 - i\alpha)^2]} \quad (15.02)$$

в соответствии с формулами (6.15), (6.18) и (6.25).

Отметим, что мы сейчас рассматриваем в некотором смысле особый случай, когда, например, в формулах (9.23) и (9.24) надо взять  $r=0$ . Функции  $S_f^+$  и  $S_f^-$  равны

$$\left. \begin{aligned} S_f^+(\omega) &= \sqrt{S_n} \frac{(\omega + \omega_0 + i\beta)(\omega - \omega_0 + i\beta)}{(\omega + \omega_0 + i\alpha)(\omega - \omega_0 + i\alpha)}, \\ S_f^-(\omega) &= \sqrt{S_n} \frac{(\omega + \omega_0 - i\beta)(\omega - \omega_0 - i\beta)}{(\omega + \omega_0 - i\alpha)(\omega - \omega_0 - i\alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (15.03)$$

Второй этап построения оптимального линейного фильтра II типа заключается в определении функции (11.27). Она равна

$$H(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_f^+(\omega)} = \frac{c^2}{2i\sqrt{S_n}} \cdot \frac{(\omega + \omega_0 + i\alpha)(\omega - \omega_0 + i\alpha)}{(\omega + \omega_0 + i\beta)(\omega - \omega_0 + i\beta)} \times \quad (15.04)$$

$$\times \left[ \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\alpha} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\alpha} + \frac{1}{\omega + \omega_0 - i\alpha} - \frac{1}{\omega + \omega_0 + i\alpha} \right].$$

Третий этап — вычисление функции  $H^-(\omega)$ . Здесь можно воспользоваться как леммой I, так и леммой II. Воспользовавшись леммой I, получим

$$H^-(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{H(\omega) d\omega}{\omega - \omega}. \quad (15.05)$$

Подставляя сюда выражение (15.04) и вычисляя интеграл по вычетам в полюсах, лежащих выше пути интегрирования, получим

$$H^-(\omega) = \frac{c^2}{i\sqrt{S_n}} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \left[ \frac{\omega_0 + i\alpha}{2\omega_0 + i\alpha + i\beta} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\alpha} + \frac{\omega_0 - i\alpha}{2\omega_0 - i\alpha - i\beta} \cdot \frac{1}{\omega + \omega_0 - i\alpha} \right]. \quad (15.06)$$

Окончательно формулу для частотной характеристики можно записать так:

$$K(\omega) = \frac{c^2\alpha}{iS_n(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0 - i\beta)(\omega + \omega_0 - i\beta)} \times \\ \times \left[ \frac{(\omega_0 + i\alpha)(\omega + \omega_0 - i\alpha)}{\omega_0 + i\frac{\alpha + \beta}{2}} + \frac{(\omega_0 - i\alpha)(\omega - \omega_0 - i\alpha)}{\omega_0 - i\frac{\alpha + \beta}{2}} \right]. \quad (15.07)$$

Реакцию на единичный импульс  $k(\tau)$  при  $\tau > 0$  найдем по вычетам в точках  $\omega = \pm \omega_0 + i\beta$

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{1 + S_n(\omega)} = \frac{c^2\alpha}{S_n(\alpha + \beta)} [Ae^{i(\omega_0 + i\beta)\tau} + A^*e^{i(-\omega_0 + i\beta)\tau}], \quad (15.08)$$

где введены обозначения

$$A = |A| e^{-i\psi} = \frac{(\omega_0 + i\alpha)(2\omega_0 - i\alpha + i\beta)}{\omega_0(2\omega_0 + i\alpha + i\beta)} + \frac{i(\omega_0 - i\alpha)(\beta - \alpha)}{\omega_0(2\omega_0 - i\alpha - i\beta)}. \quad (15.09)$$

Окончательно функция  $k(\tau)$  может быть записана в виде

$$\left. \begin{aligned} k(\tau) &= \frac{2c^2\alpha}{S_n(\alpha + \beta)} |A| e^{-\beta\tau} \cos(\omega_0\tau - \psi) \text{ при } \tau > 0, \\ k(\tau) &= 0 \text{ при } \tau < 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

В этих формулах

$$\beta = \alpha \sqrt{1 + \rho}, \quad (15.11)$$

где  $\rho$  — отношение сигнала к шуму, введенное в формуле (6.28). При  $\rho \ll 1$  мы имеем приближенно

$$\alpha = \beta, A = |A| = 1, \psi = 0, \quad (15.12)$$

и формула (15.10) принимает вид

$$k(\tau) = \frac{c^2 e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau}{S_n} \quad \text{при } \tau > 0, \quad (15.13)$$

что согласуется с формулой (14.15).

Выведенные выше формулы справедливы при выполнении условия (6.04), являющегося условием квазимонохроматичности сигнала. При более сильном условии

$$\omega_0 \gg \beta = \alpha \sqrt{1 + \rho} \quad (15.14)$$

мы получаем по формулам (15.09)  $A \approx 1$ ,  $\psi \approx 0$ , и выписанные выше формулы упрощаются следующим образом

$$k(\tau) = \frac{2\alpha\rho}{1 + \sqrt{1 + \rho}} e^{-\beta\tau} \cos \omega_0 \tau \quad \text{при } \tau > 0, \quad (15.15)$$

$$K(\omega) = \frac{\rho}{(1 + \sqrt{1 + \rho})\sqrt{1 + \rho}} \frac{2i\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \quad (15.16)$$

и

$$H^-(\omega) = \frac{c^2 \alpha}{i(\alpha + \beta)\sqrt{S_n}} \left( \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\alpha} + \frac{1}{\omega + \omega_0 - i\alpha} \right). \quad (15.17)$$

Отметим, что  $\alpha$  определяет ширину полосы сигнала [ср. формулу (6.20)], а  $\beta$  — ширину полосы фильтра, так как ширина полосы пропускания фильтра равна

$$\Delta\omega' = \frac{\pi}{2} \beta. \quad (15.18)$$

Найдем теперь среднюю квадратичную ошибку фильтра II типа. Произведя вычисление интегралов с помощью теории вычетов и пренебрегая членами порядка  $\frac{1}{\omega_0}$  по сравнению с  $\frac{1}{\alpha}$ , получим

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= c^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H^-(\omega)|^2 d\omega = c^2 - \frac{c^4 \alpha}{(\alpha + \beta)^2 S_n} = \\ &= c^2 \left[ 1 - \frac{\rho}{(1 + \sqrt{1 + \rho})^2} \right] \end{aligned} \quad (15.19)$$

или

$$\bar{\varepsilon}^2 = c^2 \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \rho}}. \quad (15.20)$$

Для фильтров I типа мы в § 6 получили выражение

$$\bar{\varepsilon}^2 = c^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \rho}}. \quad (15.21)$$

При  $\rho \ll 1$  ошибки для фильтров как I, так и II типа одинаковы и равны  $c^2$ . Это означает, что при большом уровне помех оба фильтра работают плохо.

Если  $\rho \gg 1$ , то средняя квадратичная ошибка фильтра II типа примерно вдвое больше, чем для фильтров I типа,

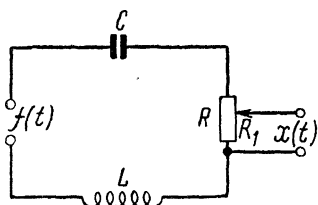


Рис. 17. Фильтр с частотной характеристикой (15.22):

$$R_1 = \Theta R, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$2\beta = \frac{1}{RC}.$$

которые используют более полную информацию о входном процессе.

Частотную характеристику (15.16) можно переписать так:

$$K(\omega) = \Theta \frac{2i\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}, \quad \Theta = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho}(1 + \sqrt{1 + \rho})}. \quad (15.22)$$

Такой фильтр есть простой резонансный контур с коэффициентом затухания  $\beta$  (рис. 17), сочетающийся с ослабителем (коэффициент пропорциональности  $\Theta$  всегда меньше единицы, достигая ее лишь в предельном случае  $\rho = \infty$ ).

Чисто монохроматические процессы характеризуются параметрами  $\rho = \infty$  и  $\alpha = \beta = 0$ . В таком случае квадратичная ошибка для фильтров I и II типов равна нулю. Она достигается за счет исключительной избирательности контура, когда входной процесс — смесь монохроматического сигнала и помехи — используется за бесконечно большое время.

## ГЛАВА III

### ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

#### § 16. ФИЛЬТРЫ ДЛЯ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ

В гл. I и II мы считали, что сигнал и помеха являются случайными процессами с известными корреляционными свойствами. Как мы уже отмечали выше (см. § 7), в радиолокации, а также в ряде других областей радиотехники форма полезного сигнала, поступающего в приемник, является фиксированной. В этом случае полезный сигнал нужно рассматривать не как случайный процесс, а как заданную функцию с одним или несколькими неизвестными параметрами (амплитуда, время прихода, высокочастотная фаза и т. п.). Цель фильтрации заключается уже не в воспроизведении формы сигнала (известной) с минимумом средней квадратичной ошибки, а в наиболее надежном обнаружении полезного сигнала на фоне случайных помех и в наиболее точном измерении его параметров, в особенности времени прихода сигнала, фиксирующего состояние до отражающего объекта. Поэтому качество фильтра, выделяющего сигналы известной формы, характеризуется отношением сигнал/помеха на выходе фильтра. Связь этого отношения с более тонкими вероятностными свойствами приемника будет исследована во второй части книги.

Предполагая, что полезный сигнал имеет вполне определенную форму, рассмотрим процесс его прохождения через линейный фильтр  $K$  с частотной характеристикой  $K(\omega)$ . На вход фильтра подается смесь полезного сигнала  $m(t)$ , имеющего известную форму, и помехи  $n(t)$ , представляющей собой стационарный случайный процесс,

$$f(t) = m(t) + n(t). \quad (16.01)$$

Полезный сигнал может отсутствовать, тогда на выходе фильтра имеется одна помеха

$$f(t) = n(t). \quad (16.02)$$

Мы будем сначала считать, что функция  $m(t)$  полностью известна, так что искомым фильтром должен максимально облегчить обнаружение полезного сигнала, т. е. помочь решить, какая из возможностей—(16.01) или (16.02)—реализуется в данном опыте. Более сложный случай, когда сигнал  $m(t)$  зависит от неизвестных параметров, будет рассмотрен в конце параграфа. На выходе фильтра при наличии сигнала мы получаем функцию

$$\varphi(t) = \mu(t) + \nu(t), \quad (16.03)$$

где  $\mu(t)$  есть результат преобразования полезного сигнала  $m(t)$  фильтром  $K$ , а  $\nu(t)$ —результат преобразования помехи. Сигнал  $m(t)$  можно, например, себе представить в виде прямоугольных радиоимпульсов, часто применяемых в радиолокации. Считая, что полезный сигнал имеет конечную длительность (или достаточно быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ ), мы можем разложить его в интеграл Фурье

$$m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} M(\omega) d\omega, \quad (16.04)$$

где

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} m(t) dt. \quad (16.05)$$

Функция  $\mu(t)$ — полезный сигнал на выходе фильтра  $K$ — равна

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} K(\omega) M(\omega) d\omega, \quad (16.06)$$

где  $K(\omega)$  [ср. формулу (2.23)] есть комплексная частотная характеристика фильтра  $K$ .

Для случайного процесса — помехи  $n(t)$  — вместо спектральных выражений вида (16.06) следует воспользоваться теоремой Хинчина (см. § 3), согласно которой, в частности, можно написать

$$\overline{n^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega. \quad (16.07)$$



Здесь  $\overline{n^2}$  есть интенсивность помехи (черта означает образование статистического среднего), а  $S_n(\omega)$  есть спектральная интенсивность помехи на входе фильтра. На выходе фильтра  $K$  помеха будет иметь согласно формуле (3.09) интенсивность

$$\overline{v^2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega. \quad (16.08)$$

Отношение сигнал/помеха (по мощности) на выходе фильтра мы будем определять выражением

$$\rho = \frac{\mu^2(t_0)}{\overline{v^2}}, \quad (16.09)$$

где  $\mu(t_0)$  — значение сигнала на выходе в некоторый момент  $t_0$ . Пользуясь формулами (16.06) и (16.08), получим

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} K(\omega) M(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega}. \quad (16.10)$$

Будем искать фильтр, который бы давал на выходе наибольшее значение  $\rho$  по сравнению со всеми остальными. Это значит, что мы будем принимать решение по значению

$$\varphi(t_0) = \mu(t_0) + \nu(t_0), \quad (16.11)$$

поэтому нам важно, чтобы слагаемое  $\mu(t_0)$  по своей абсолютной величине как можно более превосходило  $\overline{v^2}(t_0) = \overline{v^2}$ .

Частотную характеристику искомого фильтра можно найти из следующего неравенства

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} K(\omega) M(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega, \quad (16.12)$$

которое показывает, что

$$\rho \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega. \quad (16.13)$$

Мы получили таким образом верхний предел для  $\rho$ . Если взять

$$K(\omega) = ce^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (16.14)$$

где  $c$  — произвольная константа, то такой фильтр будет давать максимально достижимое значение  $\rho$ , равное

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega. \quad (16.15)$$

Неравенство (16.12) является обобщением известного алгебраического неравенства Шварца—Буняковского. Чтобы его доказать, возьмем двойной интеграл

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)B^*(\omega') - A(\omega')B^*(\omega)|^2 d\omega d\omega' = \\ & = \iint_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)B^*(\omega') - A(\omega')B^*(\omega)] [A^*(\omega)B(\omega') - \\ & - A^*(\omega')B(\omega)] d\omega d\omega' = \iint_{-\infty}^{\infty} [|A(\omega)|^2 |B(\omega')|^2 + \\ & + |A(\omega')|^2 |B(\omega)|^2 - A(\omega)B(\omega)A^*(\omega')B^*(\omega') - \\ & - A(\omega')B(\omega')A^*(\omega)B^*(\omega)] d\omega d\omega' \geq 0, \quad (16.16) \end{aligned}$$

поскольку исходный интеграл отрицательных значений принимать не может. Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 |B(\omega')|^2 d\omega d\omega' = \iint_{-\infty}^{\infty} |A(\omega')|^2 |B(\omega)|^2 d\omega d\omega' = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega, \quad (16.17) \\ & \iint_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(\omega)A^*(\omega')B^*(\omega') d\omega d\omega' = \\ & = \iint_{-\infty}^{\infty} A(\omega')B(\omega')A^*(\omega)B^*(\omega) d\omega d\omega' = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega)B^*(\omega) d\omega = \left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(\omega) d\omega \right|^2, \end{aligned}$$

мы получим неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega \quad (16.18)$$

для любых двух функций  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ , если выписанные интегралы имеют смысл (сходятся). Полагая

$$A(\omega) = e^{-i\omega t_0} K(\omega) \sqrt{S_n(\omega)}, \quad B(\omega) = \frac{M(\omega)}{\sqrt{S_n(\omega)}}, \quad (16.19)$$

мы и приходим к неравенству (16.12).

Таким образом, среди линейных фильтров наилучшим является фильтр с частотной характеристикой (16.14). Если помеха  $n(t)$  есть нормальный случайный процесс, то такой фильтр является абсолютно оптимальным, как мы покажем во второй части книги. Поэтому нелинейные фильтры могут иметь значение лишь при помехах, не являющихся нормальными, а тогда математическое исследование оптимальных фильтров и оптимальных приемников усложняется настолько, что ощутимых практических результатов получить не удастся.

Физический смысл формулы (16.14) очень прост: оптимальный линейный фильтр  $K$  пропускает элементарный интервал частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  в тем большей степени, чем больше спектральная амплитуда полезного сигнала и чем меньше спектральная интенсивность помех в этом интервале. Формула (16.15) при этом показывает, что отношение сигнал/помеха на выходе такого фильтра тем больше, чем больше отличие спектра сигнала от спектра помехи (ср. конец § 2). Так, например, если спектральная интенсивность  $S_n(\omega)$  весьма мала в некоторой части частотного диапазона, занятого сигналом, то оптимальный фильтр  $K$  будет пропускать практически только эту часть диапазона, и величина (16.15) будет весьма большой. Полезный сигнал  $\mu(t)$  на выходе фильтра сильно отличается по форме от сигнала  $m(t)$  на его входе (ср. далее § 17 и 20), однако эта форма известна и поэтому никаких опасностей при ее искажении не возникает.

Замегаим, что из формул (16.06) и (16.14) вытекает соотношение

$$\mu(t) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega, \quad (16.20)$$

откуда (ср. § 3)

$$|\mu(t)| \leq |\mu(t_0)| = |c| \rho. \quad (16.21)$$

При использовании данного фильтра для обнаружения полностью известного сигнала нужно только значение (16.11), т. е. значение выходной функции фильтра в один определенный момент времени, поскольку в другие моменты согласно формуле (16.21) полезный сигнал на выходе фильтра меньше. Если же полезный сигнал имеет вид

$$m(t) = G m_0(t - \tau), \quad (16.22)$$

т. е. зависит от неизвестных параметров  $G$  и  $\tau$  ( $G$  — амплитуда,  $\tau$  — время появления сигнала,  $m_0(t)$  — известная функция времени), то результаты несколько изменятся. Прежде всего, по формуле (16.05) мы будем иметь

$$M(\omega) = G M_0(\omega) e^{-i\omega\tau}, \quad (16.23)$$

где

$$M_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} m_0(t) dt, \quad m_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} M_0(\omega) d\omega, \quad (16.24)$$

так что функция  $M(\omega)$  зависит от неизвестных параметров. Чтобы не вводить в формулу (16.14) неизвестного параметра  $\tau$ , ее приходится изменить следующим образом:

$$K(\omega) = c e^{-i\omega t_0} \frac{M_0(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (16.25)$$

так как в противном случае мы должны применять столько фильтров, сколько имеется возможных значений  $\tau$ . Формула (16.20) тогда принимает вид:

$$\mu(t) = \frac{cG}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0-\tau)} \frac{|M_0(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega, \quad (16.26)$$

так что

$$|\mu(t)| \leq |\mu(t_0 + \tau)| = |c| G \rho_0 \quad (16.27)$$

где

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M_0(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega \quad (16.28)$$

есть отношение сигнал/помеха на выходе фильтра с частотной характеристикой (16.25), определяемое с помощью соотношения

$$\rho_0 = \frac{\mu^2(t_0 + \tau)}{\nu^2} \quad \text{при } G = 1. \quad (16.29)$$

При произвольном  $G$  отношение сигнал/помеха можно определить по формуле

$$\rho = \frac{\mu^2(t_0 + \tau)}{\nu^2} = G^2 \rho_0 \quad (16.30)$$

или же пользоваться усредненным параметром

$$\bar{\rho} = \bar{G}^2 \rho_0, \quad (16.31)$$

где  $\bar{G}^2$  вычисляется в соответствии с законом распределения случайной величины  $G$ .

Очевидно, что частотная характеристика (16.25) обеспечивает максимальное значение параметров (16.30) и (16.31), причем в данном случае процесс  $\varphi(t)$  на выходе фильтра используется более полно: а именно, если параметр  $\tau$  может принимать значения  $\tau_1, \dots, \tau_n$ , то необходимы значения  $\varphi(t_0 + \tau_1), \dots, \varphi(t_0 + \tau_n)$ . В частности, если  $\tau$  может принимать все значения в интервале  $0 \leq \tau \leq T$ , то нужно использовать функцию  $\varphi(t)$  при  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ . Если помехи отсутствуют ( $\rho = \infty$ ), то получающаяся таким образом функция  $\varphi(t) = \mu(t)$  позволит полностью определить параметры  $\tau$  и  $G$ :  $\tau$  находится по положению максимума функции  $\varphi(\tau)$ ,  $G$  — по величине этого максимума [см. формулу (16.27)]. Слабые помехи (т. е. большие значения  $\rho$ ) приводят, очевидно, к некоторым ошибкам в определении  $\tau$  и  $G$ , поскольку помехи случайным образом смещают максимум  $\varphi(t)$  [по отношению к максимуму  $\mu(t)$ ] так, что положение максимума на оси  $t$  и его абсолютная величина изменяются. При увеличении помех (т. е. при уменьшении  $\rho$ ) эти ошибки растут, причем при достаточно больших помехах (достаточно малых  $\rho$ ) наличие или отсутствие полезного сигнала почти полностью маскируется помехами и даже оптимальный фильтр, обеспечивающий максимальное значение  $\rho$ , не может выделить сигнала на фоне помех. Такова качественная картина работы оптимального линейного фильтра.

Заметим в заключение, что если в формуле (16.14) положить  $c = 1$ , то в силу соотношений (16.09) и (16.21) мы будем иметь

$$\mu(t_0) = \rho, \quad \sqrt{\nu^2(t)} = \rho. \quad (16.32)$$

Таким образом, параметр  $\rho$  — отношение сигнал/помеха — дает нам одновременно полезный сигнал  $\mu(t_0)$  и интенсивность помех  $\sqrt{\nu^2}$  на выходе оптимального линейного фильтра. Отметим также интересное соотношение

$$\mu(t) = R_\nu(t_0 - t), \quad (16.33)$$

связывающее полезный сигнал и корреляционную функцию помех на выходе оптимального фильтра. Аналогичные формулы можно вывести для частотной характеристики (16.25).

### § 17. СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР ИЛИ КОРРЕЛЯТОР

Исследуем более подробно оптимальный фильтр при условии

$$S_n(\omega) = S_n = \text{const}, \quad (17.01)$$

т. е. когда спектр помехи равномерно распределен по диапазону частот, занятому полезным сигналом. Такую помеху называют обычно белым шумом (ср. § 7 и 12), а соответствующий оптимальный фильтр  $K$  согласованным фильтром. Частотная характеристика этого фильтра равна

$$K(\omega) = e^{-i\omega t_0} M^*(\omega). \quad (17.02)$$

Она целиком определяется формой сигнала, „согласована“ с ним. Формула (17.02) получена из выражения (16.14), в котором для простоты записи мы положили

$$c = S_n. \quad (17.03)$$

Рассмотрим более детально действие согласованного фильтра. Вследствие соотношения (16.05) и вещественности функции  $m(t)$  имеем

$$M^*(\omega) = M(-\omega). \quad (17.04)$$

Сигнал  $\mu(t)$  на выходе согласованного фильтра по формулам (16.06) и (17.02) равен

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} M(-\omega) M(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} M(-\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} m(t') dt'. \end{aligned} \quad (17.05)$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0-t')} M(-\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'+t-t_0)} M(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (17.06)$$

где  $-\omega$  заменено на  $\omega$ . Принимая во внимание формулу (16.04), получаем

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t') m(t' - t + t_0) dt'. \quad (17.07)$$

Интеграл

$$R_m(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) m(t - \tau) dt \quad (17.08)$$

называется автокорреляционной функцией сигнала известной формы. Величина  $R_m(\tau)$  отличается от автокорреляционных функций, которые мы рассматривали раньше, поскольку вместо статистического усреднения величины  $m(t) m(t - \tau)$  производится простое интегрирование по  $t$  (ср., впрочем, конец § 1). Из формулы (17.08) видно, что

$$R_m(0) = \int_{-\infty}^{\infty} m^2(t) dt = E, \quad (17.09)$$

так что в данном случае значение  $R_m(0)$  определяет энергию  $E$  полезного сигнала, в то время как для стационарного случайного процесса величина  $R_m(0)$  определяет его интенсивность (или мощность). Заметим, что энергетические величины часто определяются значением  $R_m(0)$  лишь с точностью до некоторого постоянного множителя.

Вернемся к формуле для полезного сигнала на выходе фильтра. Пользуясь определением корреляционной функции, мы видим, что

$$\mu(t) = R_m(t - t_0). \quad (17.10)$$

Эта формула дает замечательный результат: согласованный фильтр есть не что иное, как коррелятор, выдающий не полезный сигнал, а его автокорреляционную функцию.

При  $t = t_0$  полезный сигнал на выходе согласованного фильтра принимает значение

$$\mu(t_0) = E. \quad (17.11)$$

Нетрудно показать, что формулы (3.12) и (3.13) применимы и к корреляционной функции (17.08). Поэтому

$$R_m(0) \geq |R_m(\tau)| \text{ и } \mu(t_0) \geq |\mu(t)|, \quad (17.12)$$

так что  $\mu(t_0)$  есть максимальное значение полезного сигнала на выходе, как это было уже доказано в § 16. Мы видим, что какова бы ни была форма полезного сигнала, максимальное значение сигнала на выходе согласованного фильтра определяется только полной энергией сигнала на входе. Формула (16.15) при условии (17.01) принимает вид:

$$\rho = \frac{1}{2\pi S_n} \int_{-\infty}^{\infty} |M(\omega)|^2 d\omega. \quad (17.13)$$

Из формул (17.05) — (17.09) следует тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |M(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} m^2(t) dt = E, \quad (17.14)$$

хорошо известное в теории интегралов Фурье. Поэтому формула (17.13) принимает следующий простой вид:

$$\rho = \frac{E}{S_n}. \quad (17.15)$$

Мы видим, что отношение сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра определяется двумя физическими величинами — полной энергией полезного сигнала  $E$  и спектральной интенсивностью помехи  $S_n$ , т. е. мощностью, приходящейся на полосу в 1 гц (ср. начало § 3). Таким образом, обнаружение полностью известного сигнала на фоне «абсолютно случайного процесса» — белого шума (ср. § 12) — можно улучшить лишь путем увеличения энергии полезного сигнала, в то время как при других помехах тот же результат можно получить, изменяя спектр сигнала, т. е. его форму (см. § 16).

Реакция согласованного фильтра на единичный импульс по формуле (2.19) равна

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} K(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} M(-\omega) d\omega$$



или

$$k(t) = m(t_0 - t). \quad (17.16)$$

Поэтому согласованный фильтр работает по формуле [ср. выражение (1.11)]

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') m(t' - t + t_0) dt', \quad (17.17)$$

так что по отношению ко всему процессу (16.01) он образует *взаимную* функцию корреляции полезного сигнала  $m(t)$  и входной функции  $f(t)$  [ср. формулы (1.19)]. Поэтому согласованный фильтр можно назвать также коррелятором.

Если полезный сигнал имеет вид (16.22), т. е. содержит неизвестные параметры  $G$  и  $\tau$ , то частотная характеристика в соответствии с формулами (16.25) и (17.02) будет равна

$$K(\omega) = e^{-i\omega t_0} M_0^*(\omega), \quad (17.18)$$

а его реакция на единичный импульс

$$k(t) = m_0(t_0 - t). \quad (17.19)$$

На выходе согласованного фильтра получается функция

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') m_0(t_0 - t + t') dt', \quad (17.20)$$

т. е. взаимная корреляционная функция вида (17.17), ввиду чего согласованный фильтр опять можно назвать коррелятором. Различие между формулами (17.17) и (17.20) в том, что в случае полностью известного сигнала по формуле (17.17) нужно образовывать только одно значение  $\varphi(t_0)$ , а в случае сигнала с неизвестным  $\tau$  нужны значения  $\varphi(t_0 + \tau)$ , вычисленные по формуле (17.20) при всех возможных значениях  $\tau$ .

Полезный сигнал на выходе согласованного фильтра будет образовываться по формуле

$$\mu(t) = G \int_{-\infty}^{\infty} m_0(t' - \tau) m_0(t_0 - t + t') dt' = GR_{m_0}(t - t_0 - \tau), \quad (17.21)$$

где  $R_{m_0}$  — автокорреляционная функция сигнала  $m_0(t)$ . По сигналу (17.21) можно определить параметры  $G$  и  $\tau$  исходного сигнала, а также решить вопрос об его наличии — с тем меньшими ошибками, чем больше параметр  $\rho$  (см. § 16).

В этом и предыдущем параграфах на функции  $K(\omega)$  и  $k(\tau)$  каких-либо ограничений не налагалось, так что в общем случае мы должны получить фильтр I типа (по классификации § 1). Если, однако, для согласованного фильтра взять параметр  $t_0$  таким, что

$$m(t) = 0 \text{ и } m_0(t - \tau) = 0 \text{ при } t > t_0, \quad (17.22)$$

то согласованный фильтр будет фильтром II типа. Этот результат совершенно очевиден: согласованный фильтр не может закончить своей работы раньше, чем закончится наиболее запаздывающий полезный сигнал. Начало работы фильтра определяется моментом появления наиболее раннего сигнала.

Чтобы правильно оценить действие согласованного фильтра, нужно учесть, что в радиотехнике полоса пропускания приемника (т. е. соответствующего высокочастотного фильтра в приемнике) всегда согласуется с полосой, занятой полезным сигналом. Рассмотрим фильтр с прямоугольной частотной характеристикой

$$\left. \begin{aligned} K(\omega) &= 1 \text{ при } \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega \text{ и} \\ &\quad -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega, \\ K(\omega) &= 0 \text{ при других } \omega, \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

воздействующий на прямоугольный радиоимпульс (20.01) со спектральной амплитудой (20.03), удовлетворяющей соотношению

$$M(-\omega) = M(\omega) \quad (17.24)$$

(см. далее § 20). В этом случае полезный сигнал на выходе фильтра  $K$  по формуле (16.06) равен

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0 + \Delta\omega} e^{i\omega t} M(\omega) d\omega + \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i\omega t} M(\omega) d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t M(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (17.25)$$

Ограничиваясь в выражении (20.03) первым слагаемым в квадратной скобке (что допустимо при условии  $\omega_0 T_0 \gg 1$ , где  $T_0$  — продолжительность импульса), мы получим

$$\mu(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) T_0}{2}}{\omega - \omega_0} d\omega. \quad (17.26)$$

Нетрудно показать, что при достаточно малых  $\Delta\omega$  максимальное значение функции (17.26) достигается при  $t=0$ . В самом деле, если выполняется условие

$$\frac{\Delta\omega T_0}{2} \leq \pi, \quad (17.27)$$

то множитель  $\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) T_0}{2}}{\omega - \omega_0}$  в интервале интегрирования неотрицателен, и мы имеем

$$|\mu(t)| \leq \frac{A}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} |\cos \omega t| \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) T_0}{2}}{\omega - \omega_0} d\omega \leq \mu(0), \quad (17.28)$$

где

$$\mu(0) = \frac{A}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) T_0}{2}}{\omega - \omega_0} d\omega = \frac{2A}{\pi} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx \quad (17.29)$$

и

$$X = \frac{\Delta\omega T_0}{2}. \quad (17.30)$$

Фильтр с частотной характеристикой (17.23) дает на выходе согласно формулам (16.08) и (17.01) шум с интенсивностью

$$\bar{v}^2 = \frac{2}{\pi} S_n \Delta\omega, \quad (17.31)$$

и отношение сигнал/шум по формуле (16.09) равно

$$\rho = \frac{\mu^2(0)}{\bar{v}^2} = \frac{2A^2}{\pi S_n \Delta\omega} (\text{si } X)^2, \quad (17.32)$$

где

$$\text{si } X = \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx \quad (17.33)$$

есть интегральный синус.

Чтобы сравнить формулу (17.32) с полученным ранее выражением (17.15), вычислим энергию прямоугольного импульса (20.01). Она равна

$$E = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} m^2(t) dt = A^2 \frac{T_0}{2}, \quad (17.34)$$

поскольку среднее значение  $\cos^2 \omega t$  равно  $\frac{1}{2}$ . Пользуясь обозначениями (17.30) и (17.34), получаем окончательно

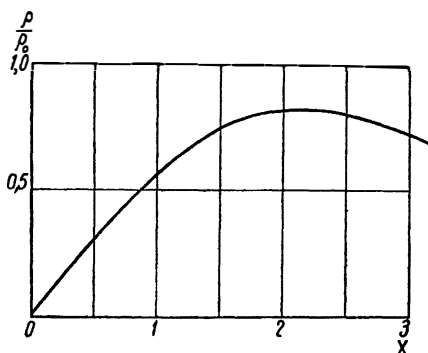
$$\rho = \frac{2E}{\pi S_n} \frac{(\text{si } X)^2}{X} \quad (17.35)$$

или

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{2(\text{si } X)^2}{\pi X}, \quad (17.36)$$

где через  $\rho_0$  обозначено отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра по формуле (17.15).

На рис. 18 изображена зависимость отношения  $\frac{\rho}{\rho_0}$  от параметра  $X$ . Мы видим, что максимальное значение до-



стигается при

$$X = 2,15, \quad (17.37)$$

т. е. когда

$$\Delta\omega = \frac{4,3}{T_0}, \quad (17.38)$$

причем при такой „оптимальной“ ширине полосы приемника

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 0,825, \quad (17.39)$$

Рис. 18. Сравнение согласованного фильтра и фильтра с прямоугольной частотной характеристикой.

т. е.  $\rho$  на 1 дБ меньше  $\rho_0$ . Согласованный фильтр да-

ет большее значение  $\rho$  за счет того, что его частотная характеристика не только по ширине полосы, но и по своей форме подбирается в соответствии со спектральной амплитудой сигнала, однако получаемый выигрыш невелик.

## § 18. КОРРЕЛЯТОР В ВИДЕОКАНАЛЕ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ

Одно время некоторые авторы возлагали большие надежды на корреляционные методы выделения сигналов из их смеси с помехами. Действительно, в § 17 мы показали, что оптимальным фильтром для обнаружения сигналов заданной формы среди белого шума является согласованный фильтр или коррелятор, образующий взаимную корреляционную функцию ожидаемого сигнала и смеси сигнала и шума, поступающей на вход фильтра. При этом, однако, оказалось, что корреляционный метод обработки входных процессов дает результаты, лишь немногим лучшие, чем обычные частотные методы разделения сигналов и помех.

В § 20 мы исследуем эффективность корреляционных методов при приеме последовательности когерентных импульсов, здесь же рассмотрим коррелятор в видеоканале приемника импульсной радиолокационной станции. Полезный сигнал  $m(t)$  является правильной последовательностью  $L$  прямоугольных импульсов с неизвестной амплитудой  $G$  и с неизвестным временным сдвигом  $\tau$

$$m(t) = Gm_0(t - \tau) \quad (18.01)$$

[ср. формулу (16.22) и рис. 19,а]. Шум маскирует наличие и положение полезного сигнала (18.01). Оптимальный способ выделения сигнала на фоне шума заключается согласно формуле (17.20) в образовании корреляционной функции входного процесса

$$f(t) = m(t) + n(t) \quad (18.02)$$

и «стандартного» сигнала  $m_0(t)$ , изображенного на рис. 19,б. Выражение (17.20), которое должно получаться на выходе коррелятора, можно записать в виде:

$$\varphi(t) = R_{fm_0}(s), \quad s = t - t_0, \quad (18.03)$$

где  $R_{fm_0}$  есть взаимная корреляционная функция (ср. конец § 1) входного процесса (18.02) и заданной функции  $m_0(t)$ . При отсутствии шума эта функция превращается в  $R_{mm_0}(s)$ ;

последняя изображена на рис. 19,в и состоит из „корреляционных“ видеоимпульсов треугольной формы с различными амплитудами. Максимальное значение функции

$$R_{mm_0}(s) = GR_{m_0}(t - t_0 - \tau)$$

достигается при  $s = \tau$ , когда каждый импульс рис. 19,а накладывается на соответствующий импульс рис. 19,б. При небольшом уменьшении или увеличении  $\tau$  функция

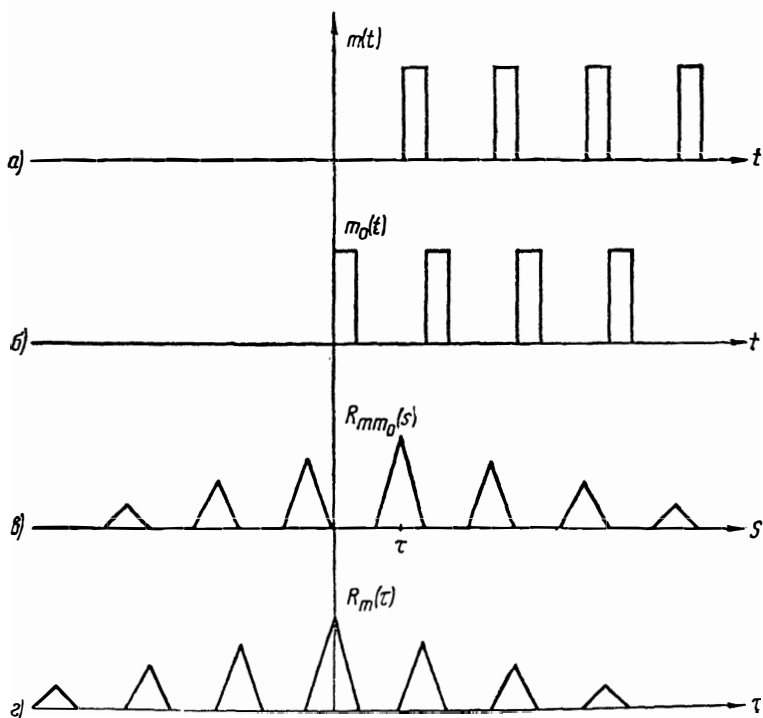


Рис. 19. Выделение последовательности видеоимпульсов корреляционным методом.

$R_{mm_0}(s)$  убывает линейно, и при сдвиге на  $\pm T_0$  обращается в нуль. «Побочные» максимумы функции (18.04) расположены периодически с периодом  $T$  повторения импульсов: они убывают по мере удаления от главного максимума, поскольку при наложении двух последовательностей (рис. 19,а и б) все меньшее число импульсов при-

ходится друг против друга; кроме главного максимума, имеется еще  $2L$  побочных.

Таким образом конкретизируются для видеоимпульсов выведенные в § 17 свойства коррелятора. Поскольку полезный сигнал (рис. 18,а) замаскирован шумом, корреляционные импульсы на рис. 18,в также получают несвободными от шумов. Однако энергия полезного сигнала сосредоточивается в главном максимуме, обнаружить который на шумовом фоне легче благодаря наибольшему значению отношения сигнал/шум.

Рассмотрим более подробно сущность математических операций, записанных в формуле (18.03). Благодаря простой форме сигнала  $m_0(t)$  (рис. 18,б) вычисление интеграла

$$\varphi(t) = R_{f m_0}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') m_0(t' - s) dt' \quad (18.04)$$

сводится к стробированию (т. е. вырезанию из каждого периода повторения  $T$  отрезка, соответствующего продолжительности импульса  $T_0$ ) и последующему накоплению сигнала (т. е. суммированию всех  $L$  значений, полученных из данных нам  $L$  периодов повторений). Эти операции легко производятся простыми радиотехническими средствами, так что применения счетнорешающих устройств обычно не требуется.

Можно поставить вопрос: как зависит отношение сигнал/шум после коррелятора от числа импульсов  $L$ ? Ответ дается формулой

$$\rho_L = L\rho_1, \quad (18.05)$$

где  $\rho_L$  есть значение  $\rho$  для  $L$  импульсов, а  $\rho_1$  — для одного импульса. Эта формула непосредственно следует из соотношения (17.15), поскольку при прочих равных условиях энергия  $E$  последовательности  $L$  импульсов в  $L$  раз больше энергии одного импульса.

Формулу (18.05) легко вывести из более элементарных соображений, рассматривая действие коррелятора (согласованного фильтра), как накопление. Действительно, если в одном стробе имеется полезный сигнал, то он присутствует во всех остальных стробах данной последовательности, и поэтому в результате накопления амплитуда сигнала увеличивается в  $L$  раз, а его мощность — в  $L^2$  раз. Что же касается шума, то его значения в различных стробах по-

следовательности статистически независимы друг от друга, поэтому при накоплении происходит «некогерентное» сложение шумов — складываются их мощности, в силу чего результирующая мощность шумов лишь в  $L$  раз больше мощности для каждого отдельного импульса. Отсюда и получается формула (18.05).

Все изложение этого параграфа неявно базировалось на предположении, что в видеоканале приемника можно говорить о «сигнале» и «помехе», как о четко разграниченных и статистически независимых процессах, сумма которых определяет данный нам процесс (18.02). Строго говоря, это предположение применимо лишь к высокочастотному каналу приемника, где полезный сигнал и помеха просто складываются. Поскольку переход от высокочастотного канала к каналу промежуточной частоты можно считать линейным, то на промежуточных частотах это предположение также оправдывается. Однако преобразование сигналов и помех к видеочастотам происходит обычно посредством нелинейного устройства — детектора, и вследствие этого суммарный процесс становится более сложным.

Рассмотрим детектирование более подробно, так как нам часто придется иметь с ним дело в дальнейшем. Поскольку высокочастотный тракт приемника имеет узкую полосу пропускания, помеха  $n(t)$  в нем имеет характер «квазимонохроматического» процесса (ср. § 6) и может быть записана в виде

$$n(t) = e_n \cos(\omega_0 t - \vartheta_n), \quad (18.06)$$

где  $e_n = e_n(t)$  есть огибающая, а  $\vartheta_n = \vartheta_n(t)$  — дополнительная фаза случайного процесса; эти функции медленно меняются по сравнению с высокочастотной фазой  $\omega_0 t$  ( $\omega_0$  — несущая частота сигнала). Даже если действующая на приемник помеха обладает широким спектром (например, является белым шумом), то все равно в приемник проходит лишь та часть помех, которая может быть записана в виде (18.06).

Полезный сигнал можно записать аналогичным образом

$$m(t) = e_m \cos(\omega_0 t - \vartheta_m), \quad (18.07)$$

где  $e_m$  — его огибающая,  $\vartheta_m$  — дополнительная фаза. Они являются «медленными» функциями времени. Для сигнала заданной формы эти функции фиксированы, в то время как  $e_n$  и  $\vartheta_n$  являются случайными функциями.



Суммарный процесс (18.02) в высокочастотном канале можно также представить в виде:

$$f(t) = e_f \cos(\omega_0 t - \vartheta_f), \quad (18.08)$$

где

$$e_f = \sqrt{e_m^2 + 2e_m e_n \cos(\vartheta_m - \vartheta_n) + e_n^2} \quad (18.09)$$

есть огибающая суммарного процесса (сигнал+помеха). Те же формулы годятся и в канале промежуточной частоты  $\omega_0$ .

Детектирование заключается в нелинейном преобразовании сигнала (например, с помощью «линейного» или квадратичного детектора) и в пропускании через линейный фильтр, отсеивающий высокочастотные составляющие. В дальнейшем под детектором мы будем понимать совокупность нелинейного устройства и фильтра. На выходе «линейного» детектора получается огибающая (18.09) входного процесса  $f(t)$ , на выходе квадратичного детектора — ее квадрат

$$e_f^2 = e_m^2 + 2e_m e_n \cos(\vartheta_m - \vartheta_n) + e_n^2. \quad (18.10)$$

При отсутствии помехи эти детекторы выдают функции  $e_m$  и  $e_m^2$ , при отсутствии сигнала — функции  $e_n$  и  $e_n^2$  соответственно. Однако при наличии как сигнала, так и помехи результирующая функция на выходе детектора не сводится к сумме их „индивидуальных вкладов“. В самом деле, в выражении (18.10) наряду с суммой  $e_m^2 + e_n^2$  фигурирует член  $2e_m e_n \cos(\vartheta_m - \vartheta_n)$ , имеющий смешанный характер („интерференционный“, поскольку он определяется разностью фаз сигнала и помехи) и появляющийся вследствие нелинейности преобразования. Такие же члены имеются и в выражении (18.09). В самом деле, будем считать помеху гораздо сильнее сигнала

$$e_m \ll e_n. \quad (18.11)$$

Пользуясь формулой

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 + \dots, \quad (18.12)$$

мы можем выражение (18.09) представить в виде

$$e_f = e_n + e_m \cos(\vartheta_m - \vartheta_n) + \frac{e_m^2}{4e_n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cos 2(\vartheta_m - \vartheta_n) \right], \quad (18.13)$$

где второй член  $e_m \cos(\vartheta_m - \vartheta_n)$ , а также частично и последний член правой части имеют интерференционный характер, т. е. зависят от  $\vartheta_m - \vartheta_n$ .

При теоретическом анализе детектирования интерференционные члены можно считать помехой. Тогда формулы (18.10) и (18.13) сразу позволяют рассчитывать интересный и важный эффект: подавление слабого сигнала сильной помехой при детектировании их смеси. В самом деле, отношение сигнала к помехе (по амплитуде) до детектирования равно

$$r' = \frac{e_m}{e_n}. \quad (18.14)$$

Если оно мало, то после квадратичного детектирования по формуле (18.10) будем иметь

$$r'' = \frac{e_m^2}{e_n^2} = (r')^2 \ll r', \quad (18.15)$$

а после линейного детектора в силу формулы (18.13)

$$r'' = \frac{e_m^2}{4e_n^2} = \left(\frac{r'}{2}\right)^2 \ll r'. \quad (18.16)$$

Наоборот, слабая помеха при детектировании подавляется сильным сигналом. В самом деле, если величина (18.14) велика, то на выходе квадратичного детектора будем иметь

$$r'' = \frac{e_m^2}{e_n^2} = (r')^2 \gg r'. \quad (18.17)$$

При условии

$$e_m \gg e_n \quad (18.18)$$

вместо формулы (18.13) получаем

$$e_f = e_m + e_n \cos(\vartheta_m - \vartheta_n) + \frac{e_n^2}{4e_m} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cos 2(\vartheta_m - \vartheta_n) \right], \quad (18.19)$$

и на выходе линейного детектора

$$r'' = \frac{4e_m^2}{e_n^2} = (2r')^2 \gg r'. \quad (18.20)$$

При выводе формул (18.17) и (18.20) интерференционные члены не учитывались; предполагается, что их можно уничтожить путем некоторого усреднения величин  $e_f^2$  или  $e_f$  на выходе детектора.

Выражения (18.15) и (18.16) показывают, что при малых отношениях сигнал/помеха квадратичный детектор лучше линейного (он дает вчетверо большее значение  $r''$ ). Наоборот, при больших отношениях сигнал/помеха линейный детектор лучше, поскольку он дает вчетверо большее значение  $r''$ , чем квадратичный.

Выше мы считали, что детектор тем лучше, чем больше отношение сигнал/помеха на его выходе. Следует отметить, что определение этого важного параметра при нелинейных преобразованиях суммы сигнала и помехи не вполне однозначно, поскольку интерференционные члены содержат какую-то информацию о сигнале и их можно причислять как к помехе, так и к сигналу. При линейных преобразованиях неопределенности нет, поэтому отношение сигнал/помеха их характеризует более полно.

Полученный выше эффект подавления слабых сигналов показывает, что в видеоканале корреляционный метод выделения сигналов (т. е. стробирование и накопление) должен быть менее эффективен, чем в канале высокой или промежуточной частоты. Задачу о выделении когерентной последовательности радиоимпульсов в этих каналах мы рассмотрим в § 20, а в следующем параграфе подготовим необходимый математический аппарат.

Заметим, что под коррелятором в литературе часто подразумевают прибор, образующий автокорреляционную функцию входного процесса  $f(t)$ , т. е. величину

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t - \tau) dt, \quad (18.21)$$

где под  $f(t)$  следует понимать, например, сумму сигнала и помехи (18.02) за  $L$  периодов повторения. В видеоканале радиолокационного приемника коррелятор (18.21) бесполезен, поскольку даже в отсутствие помехи  $n(t)$  он выдает функцию  $R_m(\tau)$ , изображенную на рис. 19,2: она имеет максимум при  $\tau=0$  безотносительно к тому, с каким запозданием пришел полезный сигнал (потеря дальности цели) и имеется ли один или два полезных сигнала с различными временами запаздывания (потеря разрешающей

способности). Можно также показать, что при сильной помехе коррелятор, работающий по формуле (18.21), приводит к дополнительному подавлению слабого сигнала помехой. Это подавление имеет тот же характер, что и при квадратичном детектировании.

Если в формуле (18.21) производить интегрирование по конечному промежутку времени и под  $f(t)$  понимать сумму высокочастотного сигнала и помехи, то получится «текущая» автокорреляционная функция. Можно показать, что прибор, образующий такую функцию, лишь незначительно отличается от квадратичного детектора, в который он переходит при  $\tau=0$ .

Выше мы говорили, что с помощью отношения сигнал/помеха трудно оценить нелинейную обработку принятых данных [например, по формулам (18.09), (18.10) или (18.21)]. Поэтому оптимальные способы нелинейной обработки приходится искать, опираясь на более тонкую статистическую теорию, изложенную во второй части книги.

## § 19. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА И СОПРЯЖЕННАЯ ТЕОРЕМА

Теорема Котельникова дает представление сигнала с ограниченным спектром. Возьмем интеграл Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega, \quad (19.01)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (19.02)$$

Будем считать, что

$$F(\omega) = 0 \text{ при } \omega < -\tilde{\omega} \text{ и } \omega > \tilde{\omega}. \quad (19.03)$$

Это значит, что спектральная амплитуда  $F(\omega)$  отлична от нуля лишь в пределах  $-\tilde{\omega} < \omega < \tilde{\omega}$ , и, следовательно, в этом интервале ее можно разложить в ряд Фурье, который мы берем в комплексной форме

$$F(\omega) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} D_{\alpha} e^{i \frac{\pi \alpha \omega}{\tilde{\omega}}}. \quad (19.04)$$

Коэффициенты ряда Фурье будут равны

$$D_\alpha = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-i \frac{\pi \alpha \omega}{\omega}} F(\omega) d\omega. \quad (19.05)$$

Сравнивая выражение (19.05) с формулой (19.01), получаем

$$D_\alpha = \frac{\pi}{\omega} f\left(-\frac{\pi \alpha}{\omega}\right) \quad (19.06)$$

или, положив для сокращения

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega}, \quad (19.07)$$

мы можем переписать формулы (19.06) и (19.04) в виде

$$\left. \begin{aligned} D_\alpha &= \Delta t \cdot f(-\alpha \Delta t), \\ F(\omega) &= \Delta t \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(-\alpha \Delta t) e^{i\alpha \omega \Delta t} = \\ &= \Delta t \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(\alpha \Delta t) e^{-i\alpha \omega \Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (19.08)$$

Подставляя это выражение в формулу (19.01) и учитывая условие (19.03), мы получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(\alpha \Delta t) \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\omega(t-\alpha \Delta t)} d\omega = \\ &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(\alpha \Delta t) \frac{\Delta t}{\pi} \frac{\sin \tilde{\omega}(t-\alpha \Delta t)}{t-\alpha \Delta t} \end{aligned} \quad (19.09)$$

или

$$f(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(\alpha \Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(t-\alpha \Delta t)}{\omega(t-\alpha \Delta t)}. \quad (19.10)$$

Это есть теорема Котельникова. Она показывает, что если сигнал имеет ограниченный спектр, то его значение

в любой момент времени определяется теми значениями, которые он принимает в моменты  $t_\alpha = \alpha \Delta t$ , отстоящие друг от друга на интервал (19.07).

Следует отметить, что значение суммы (19.10) в моменты  $t_\alpha = \alpha \Delta t$  определяется только одним  $\alpha$ -м слагаемым, а все остальные слагаемые дают нули, поскольку выражение  $\frac{\sin \tilde{\omega}(\alpha - \beta) \Delta t}{\tilde{\omega}(\alpha - \beta) \Delta t}$  обращается в нуль при  $\alpha \neq \beta$ .

Имеется и другая теорема, которую мы будем называть сопряженной теоремой Котельникова. Она относится к сигналу конечной длительности, т. е. предполагает, что

$$f(t) = 0 \quad \text{при } t < -\tilde{t} \text{ и } t > \tilde{t}. \quad (19.11)$$

Тогда функцию  $f(t)$  в интервале  $-\tilde{t} < t < \tilde{t}$  можно представить с помощью ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} C_\alpha e^{i \frac{\pi \alpha t}{\tilde{t}}}, \quad (19.12)$$

где

$$C_\alpha = \frac{1}{2\tilde{t}} \int_{-\tilde{t}}^{\tilde{t}} e^{-i \frac{\pi \alpha t}{\tilde{t}}} f(t) dt = \frac{1}{2\tilde{t}} F\left(\frac{\pi \alpha}{\tilde{t}}\right) = \frac{\Delta \omega}{2\pi} F(\alpha \Delta \omega) \quad (19.13)$$

и

$$\Delta \omega = \frac{\pi}{\tilde{t}}, \quad (19.14)$$

в виде

$$f(t) = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha \Delta \omega) e^{i \alpha \Delta \omega t}. \quad (19.15)$$

Подставляя это выражение в формулу (19.02) и учитывая условие (19.11), получим выражение для комплексной спектральной амплитуды  $F(\omega)$  сигнала конечной длительности

$$F(\omega) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha \Delta \omega) \frac{\sin(\omega - \alpha \Delta \omega) \tilde{t}}{(\omega - \alpha \Delta \omega) \tilde{t}}. \quad (19.16)$$

Это и есть сопряженная теорема Котельникова. Она показывает, что для сигнала конечной длительности значение спектральной амплитуды при любой частоте однозначно определяется теми ее значениями, которые она принимает при  $\omega = \alpha\Delta\omega$ .

Отметим, что формулу (19.10) можно применить к функции

$$f(t) = f_1(t_0 + t), \quad (19.17)$$

где  $t_0$  — произвольный момент времени, и мы получаем

$$f_1(t_0 + t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f_1(t_0 + \alpha\Delta t) \frac{\widetilde{\sin \omega(t - \alpha\Delta t)}}{\omega(t - \alpha\Delta t)}. \quad (19.18)$$

Здесь  $f_1$ , как и  $f$ , есть любая функция с ограниченным спектром. Поэтому, обозначая  $t_0 + t$  через  $t$  и беря вместо  $f_1$  просто  $f$ , мы получаем соотношение

$$f(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(t_0 + \alpha\Delta t) \frac{\widetilde{\sin \omega(t - t_0 - \alpha\Delta t)}}{\omega(t - t_0 - \alpha\Delta t)}, \quad (19.19)$$

несколько обобщающее выражение (19.10).

Теорема Котельникова (19.10) и (19.19) применима к таким функциям времени  $f(t)$ , которые разлагаются в интеграл Фурье (19.01). Для случайных функций  $f(t)$  вместо спектральной амплитуды  $F(\omega)$  вводится (ср. § 3) спектральная интенсивность  $S_f(\omega)$ . Поэтому для случайных функций (например, для помех) теорема Котельникова, хотя и очевидна с физической точки зрения, строго говоря, нуждается в особом доказательстве, которое мы сейчас и приведем.

Пусть спектральная интенсивность  $S_f(\omega)$  удовлетворяет условию

$$S_f(\omega) = 0 \text{ при } \omega < -\widetilde{\omega} \text{ и } \omega > \widetilde{\omega}, \quad (19.20)$$

аналогичному условию (19.03). Тогда корреляционная функция

$$R_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_f(\omega) d\omega, \quad (19.21)$$

связанная с  $S_f(\omega)$  интегральным преобразованием Фурье

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f(\tau) d\tau, \quad (19.22)$$

очевидно, может быть представлена в виде, подобном (19.10),

$$R_f(\tau) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_f(\alpha\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(\tau - \alpha\Delta t)}{\tilde{\omega}(\tau - \alpha\Delta t)}, \quad (19.23)$$

или, как в формуле (19.19),

$$R_f(\tau) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} R_f(t_0 + \beta\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(\tau - t_0 - \beta\Delta t)}{\tilde{\omega}(\tau - t_0 - \beta\Delta t)}, \quad (19.24)$$

где  $t_0$  — произвольный момент времени. Действительно, при выводе формул (19.10) и (19.19) были использованы лишь свойства интегрального преобразования Фурье и условие (19.03).

Чтобы доказать формулу (19.10) для самой случайной функции  $f(t)$ , обозначим

$$x(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(\alpha\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)}{\tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)} \quad (19.25)$$

и докажем, что средний квадрат разности

$$\varepsilon(t) = x(t) - f(t) \quad (19.26)$$

равен нулю. Действительно

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{x^2(t)} - 2\overline{x(t)f(t)} + \overline{f^2(t)}, \quad (19.27)$$

и, учитывая, что

$$R_f(\tau) = \overline{f(t)f(t-\tau)}, \quad (19.28)$$

мы будем иметь

$$\overline{x^2(t)} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} R_f(\beta\Delta t - \alpha\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)}{\tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)} \frac{\sin \tilde{\omega}(t - \beta\Delta t)}{\tilde{\omega}(t - \beta\Delta t)}, \quad (19.29)$$

$$\overline{x(t)f(t)} = \sum_{\alpha} R_f(t - \alpha\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)}{\tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)} \quad (19.30)$$



и

$$\overline{\dot{f}^2(t)} = R_f(0). \quad (19.31)$$

По формуле (19.24) получаем (при  $t_0 = -\alpha\Delta t$ ,  $\tau - t_0 = t$ )

$$\sum_{\beta} R_f(-\alpha\Delta t + \beta\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(t - \beta\Delta t)}{\tilde{\omega}(t - \beta\Delta t)} = R_f(t - \alpha\Delta t), \quad (19.32)$$

поэтому

$$\overline{x^2(t)} = \sum_{\alpha} R_f(t - \alpha\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)}{\tilde{\omega}(t - \alpha\Delta t)} = \overline{x(t) f(t)}. \quad (19.33)$$

Полагая, кроме того, в формуле (19.24)  $t_0 = -t$ ,  $\tau = 0$  и учитывая четность функции  $R_f(\tau)$ , будем иметь

$$\overline{\dot{f}^2(t)} = R_f(0) = \sum_{\beta} R_f(-t + \beta\Delta t) \frac{\sin \tilde{\omega}(t - \beta\Delta t)}{\tilde{\omega}(t - \beta\Delta t)} = \overline{x(t) \dot{f}(t)}, \quad (19.34)$$

откуда и получаем искомое соотношение

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = 0, \quad (19.35)$$

доказывающее формулу (19.10) для случайного процесса с ограниченным спектром.

## § 20. ГРЕБЕНЧАТЫЙ ФИЛЬТР И СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР (КОРРЕЛЯТОР) ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАДИОИМПУЛЬСОВ

В данном параграфе мы рассмотрим последовательность прямоугольных радиоимпульсов. Возьмем сначала один импульс, заданный следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m(t) &= A \cos \omega_0 t \quad \text{при} \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}, \\ m(t) &= 0 \quad \text{при} \quad t < -\frac{T_0}{2} \quad \text{и} \quad t > \frac{T_0}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.01)$$

Здесь  $\omega_0$  — несущая частота,  $A$  — амплитуда импульса и  $T_0$  — его длительность. Спектральная амплитуда  $M(\omega)$  одностороннего импульса равна

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} m(t) dt = A \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-i\omega t} \cos \omega_0 t dt \quad (20.02)$$

или

$$M(\omega) = A \left[ \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) T_0}{2}}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) T_0}{2}}{\omega + \omega_0} \right]. \quad (20.03)$$

Графическое изображение этой функции дано на рис. 20 для положительных частот  $\omega$ . При  $\omega < 0$  получим такую же кривую, поскольку

$$M(-\omega) = M(\omega). \quad (20.04)$$

Эти соотношения мы уже использовали в § 17.

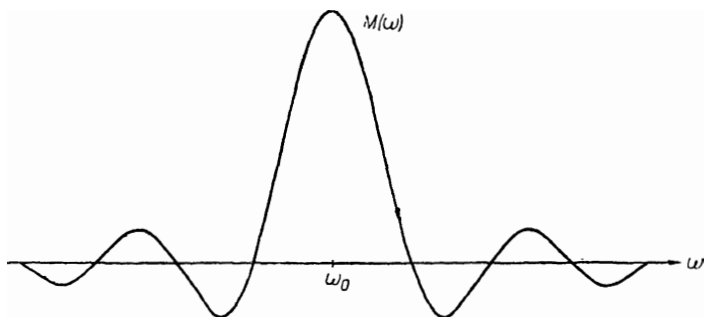


Рис. 20. Спектральная амплитуда  $M(\omega)$  прямоугольного радиопульса.

Импульс (20.01) симметричен относительно момента  $t = 0$ . Беря прямоугольный импульс более общего вида

$$\left. \begin{aligned} m(t) &= A \cos(\omega_0 t - \vartheta) \quad \text{при } \tau - \frac{T_0}{2} < t < \tau + \frac{T_0}{2}, \\ m(t) &= 0 \quad \text{при других } t, \end{aligned} \right\} \quad (20.05)$$

мы вместо выражения (20.03) получим

$$M(\omega) = A e^{-i\omega\tau} \left[ e^{i(\omega_0\tau - \vartheta)} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) T_0}{2}}{\omega - \omega_0} + e^{-i(\omega_0\tau - \vartheta)} \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) T_0}{2}}{\omega + \omega_0} \right]. \quad (20.06)$$

Если прямоугольные импульсы возникают беспорядочно, то мы получаем случайный процесс со спектральной интенсивностью

$$S(\omega) = \sigma |M(\omega)|^2, \quad (20.07)$$

как это показано в § 12: параметр  $\sigma$  равен среднему числу импульсов, возникающих в единицу времени. Соотношение (20.07) применимо к случаю, представляющему интерес для радиолокации, когда импульсы появляются периодически (с периодом повторения  $T$ ), но каждый раз со случайной фазой  $\vartheta$ , не зависящей от фаз всех остальных импульсов. В этом случае говорят о последовательности некогерентных импульсов. Если любое расположение этой последовательности на оси времени имеет одинаковую вероятность, то эта последовательность имеет спектральную интенсивность (20.07) с коэффициентом

$$\sigma = \frac{1}{T} \quad (20.08)$$

и корреляционную функцию

$$R(\tau) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |M(\omega)|^2 d\omega = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} m(t) m(t-\tau) dt, \quad (20.09)$$

как это следует из формул (17.05) — (17.08). Соотношения (20.07) — (20.09) пригодны для любой бесконечной последовательности некогерентных сигналов, но для прямоугольного импульса (20.01) и  $0 < \tau < T_0$  формула (20.09) дает

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \sigma A^2 \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t - \tau) dt = \\ &= \frac{\sigma A^2}{2} \int_{-\frac{T_0}{2} + \tau}^{\frac{T_0}{2}} [\cos \omega_0 \tau + \cos \omega_0 (2t - \tau)] dt = \\ &= \frac{\sigma A^2}{2} (T_0 - \tau) \cos \omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (20.10)$$

где интегралом от  $\cos \omega_0 (2t - \tau)$  мы пренебрегли, поскольку он по порядку величины в  $\omega_0 T_0$  раз меньше учтенного, а произведение  $\omega_0 T_0$  предполагается большим — в радиоимпульсе содержится много периодов высокой частоты. Окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= \sigma E \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right) \cos \omega_0 \tau \quad \text{при } -T_0 < \tau < T_0, \\ R(\tau) &= 0 \quad \text{при } \tau < -T_0 \text{ и } \tau > T_0, \end{aligned} \right\} \quad (20.11)$$

где  $E$  есть энергия импульса, определенная формулой (17.34). Таким образом, ввиду некогерентности различных импульсов корреляция в данном случайном процессе простирается лишь на промежутки времени порядка  $T_0$  (рис. 21).

Найдем теперь спектральное разложение бесконечной периодической последовательности когерентных импульсов,

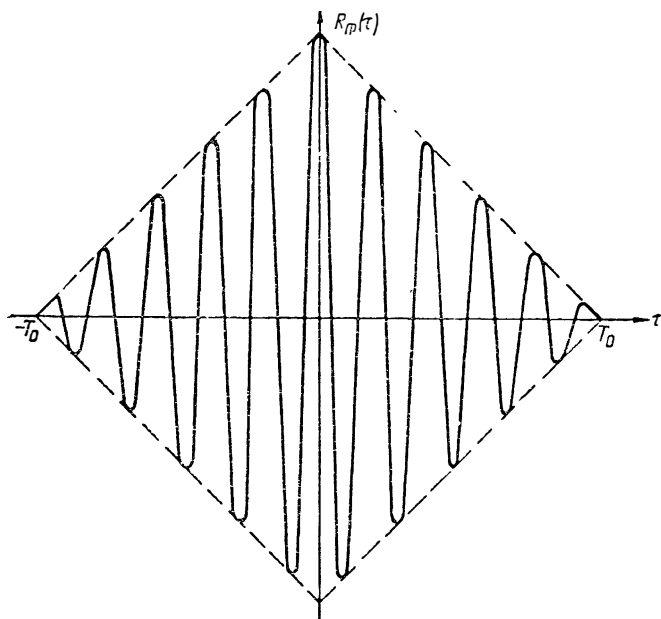


Рис. 21. Корреляционная функция прямоугольного радиоимпульса.

т. е. будем считать, что формула (20.01) применима в пределах  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  ( $T$  — период повторения) и вне этого интервала функция  $m(t)$  продолжается периодически. Тогда ее можно разложить в ряд Фурье

$$m(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} M_{\alpha} e^{i \frac{2\pi \alpha t}{T}}, \quad (20.12)$$

коэффициенты  $M_\alpha$  которого будут равны

$$M_\alpha = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-i \frac{2\pi\alpha t}{T}} m(t) dt. \quad (20.13)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (20.02), мы можем написать

$$M_\alpha = \frac{1}{T} M\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right) = \frac{1}{T} M(\alpha\omega_1), \quad (20.14)$$

где

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (20.15)$$

есть частота повторения.

Коэффициент  $M_\alpha$  дает вес  $\alpha$ -й гармоники, т. е. он показывает, какая амплитуда приходится на долю частоты  $\omega_\alpha = \alpha\omega_1$ . Если отвлечься от множителя  $\frac{1}{T}$ , то можно по-

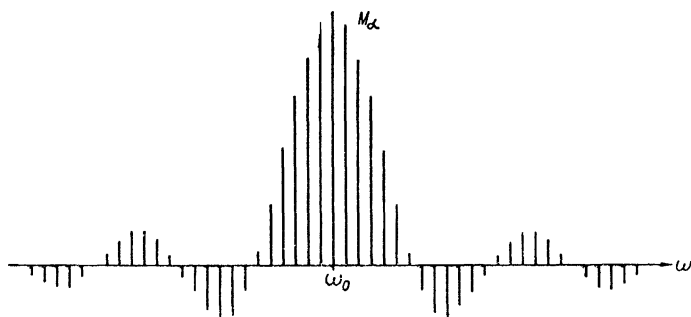


Рис. 22. Спектральные коэффициенты  $M_\alpha$  для бесконечной периодической последовательности прямоугольных радиоимпульсов.

строить  $M_\alpha$ , как показано на рис. 22: по отношению к линейчатому спектру периодической последовательности импульсов функция  $M(\omega)$  — спектральная амплитуда одиночного импульса такой же формы (см. рис. 20) — является своего рода „спектральной огибающей“. Спектральные линии  $M_\alpha$  расположены весьма часто, так как  $T \gg T_0$ .

Интересно рассмотреть еще спектр конечной последовательности периодических радиоимпульсов. Такой сигнал будет разлагаться в интеграл Фурье и иметь непрерывный

спектр. Но при увеличении числа импульсов  $L$  энергия импульсов будет концентрироваться вблизи частот  $\omega_a = \alpha\omega_1$ .

Представим себе, что имеется  $L$  импульсов, периодически следующих за импульсом (20.01). Вычислим функцию  $M(\omega)$  для такой последовательности:

$$\begin{aligned}
 M(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} m(t) dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-i\omega t} m(t) dt + \\
 &+ \int_{T_0 - \frac{T_0}{2}}^{T_0 + \frac{T_0}{2}} e^{-i\omega t} m(t) dt + \dots + \int_{(L-1)T_0 - \frac{T_0}{2}}^{(L-1)T_0 + \frac{T_0}{2}} e^{-i\omega t} m(t) dt = \\
 &= [1 + e^{-i\omega T} + \dots + e^{-i\omega(L-1)T}] \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-i\omega t} m(t) dt. \quad (20.16)
 \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках является геометрической прогрессией. Оно равно

$$\frac{e^{-i\omega LT} - 1}{e^{-i\omega T} - 1} = \frac{\sin \frac{\omega LT}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} e^{-\frac{i\omega(L-1)T}{2}}, \quad (20.17)$$

и, значит,

$$M(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega LT}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} e^{-\frac{i\omega(L-1)T}{2}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-i\omega t} m(t) dt. \quad (20.18)$$

Это выражение показывает, что

$$M\left(\frac{\alpha\omega_1}{L}\right) = M\left(\frac{2\pi\alpha}{LT}\right) = 0 \quad \text{при } \alpha \neq \kappa L, \quad (20.19)$$

где  $x$  — любое целое число, потому что при  $\omega = \frac{\alpha\omega_1}{L}$  множитель  $\sin \frac{\omega LT}{2}$  обращается в нуль. При  $\alpha = xL$  имеем

$$M(x\omega_1) = L \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-ix\omega_1 T} m(t) dt \quad (20.20)$$

или

$$M(x\omega_1) = LTM_x, \quad (20.21)$$

где  $M_x$  — коэффициент Фурье, определенный формулой (20.14).

Более наглядно спектральную амплитуду периодической последовательности  $L$  импульсов можно записать с помощью теоремы (19.16). В самом деле, перенося начало отсчета времени, мы можем последовательность импульсов заключить в интервал

$$-\tilde{t} < t < \tilde{t}, \quad \text{где } \tilde{t} = \frac{LT + T_0}{2} \approx \frac{LT}{2}, \quad (20.22)$$

причем величина (19.14) будет равна

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{LT + T_0} \approx \frac{\omega_1}{L}. \quad (20.23)$$

Формулы (20.19) и (20.21) показывают, что

$$M(\alpha\Delta\omega) = 0 \quad \text{при } \alpha \neq xL, \quad M(\alpha\Delta\omega) = LTM_x \quad \text{при } \alpha = xL, \quad (20.24)$$

поэтому формула (19.16) принимает вид

$$M(\omega) = LT \sum_{x=-\infty}^{\infty} M_x \frac{\sin(\omega - x\omega_1) \frac{LT}{2}}{(\omega - x\omega_1) \frac{LT}{2}}. \quad (20.25)$$

Данная формула показывает, что в случае конечной последовательности радиоимпульсов каждая спектральная линия расплывается (по сравнению с бесконечной последовательностью) по закону  $\frac{\sin x}{x}$ , где  $x = (\omega - x\omega_1) \frac{LT}{2}$ . Чем

больше  $L$ , тем острее становится функция  $\frac{\sin x}{x}$ . В пределе  $L \rightarrow \infty$  получаем дискретный спектр, как на рис. 22, при

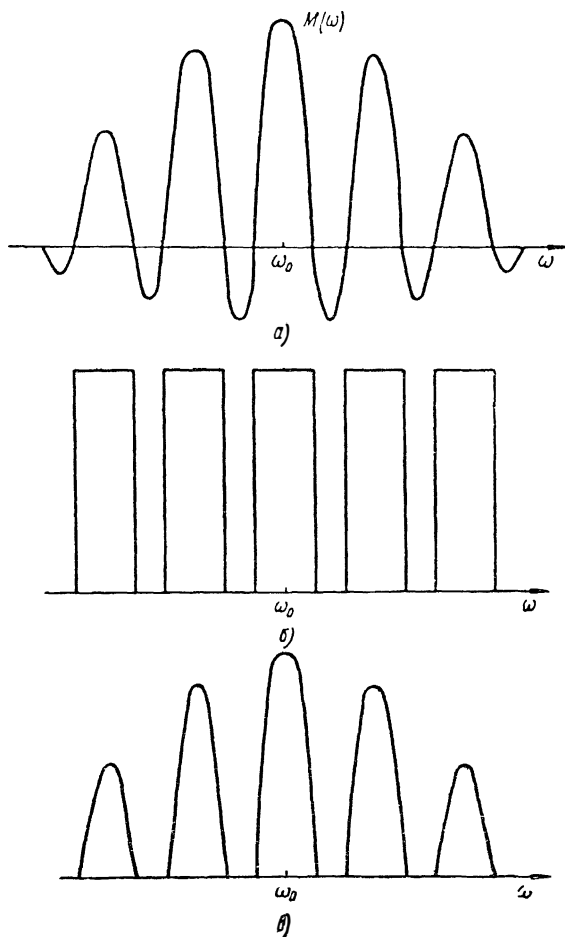


Рис. 23. Гребенчатый и согласованный фильтр для последовательности из трех прямоугольных радиоимпульсов:

а) спектральная амплитуда  $M(\omega)$  трех когерентных импульсов; б) частотная характеристика гребенчатого фильтра; в) частотная характеристика, приближенно соответствующая согласованному фильтру.



$L=1$  будет спектр одиночного импульса (рис. 20). На рис. 23,а изображен промежуточный случай, когда  $L=3$ .

Поскольку при больших  $L$  спектр конечной последовательности имеет квазилинейчатый вид, то для пропускания полезного сигнала  $m(t)$  без заметной потери энергии и без заметного искажения и вместе с тем для максимального снижения интенсивности помех нужно взять фильтр, частотная характеристика которого имеет вид гребня (см. рис. 23,б). Высота «зубьев» одна и та же, ширина также (она зависит от  $L$ ). Середина каждого зуба приходится на одну из частот  $\omega_x = \kappa\omega_1$ . Это — так называемый гребенчатый фильтр.

Согласованный фильтр является некоторой модификацией гребенчатого. В согласованном фильтре зубья не одинаковы по величине и не имеют прямоугольной формы, а воспроизводят форму спектральной амплитуды  $M^*(\omega)$  полезного сигнала (рис. 23,в).

Согласованный фильтр в противоположность гребенчатому фильтру сильно искажает полезный сигнал, зато дает возможность получить на выходе большее отношение сигнал/помеха, чем гребенчатый фильтр, а именно дает выигрыш, равный 4,3 дб. Это число получено Джорджем и Заманакосом в предположении, что ширина зубьев гребенчатого фильтра взята равной  $\frac{4\pi}{T_0}$  и что частотная характеристика согласованного фильтра отлична от нуля только в пределах этих зубьев (рис. 23,в). При точном выполнении согласованного фильтра его частотная характеристика должна воспроизводить спектр полезного сигнала (рис. 23,а) и, в частности, обращаться в нуль только, в отдельных точках, а не в интервалах, однако «неоптимальность» фильтра, изображенного на рис. 23,в, лишь весьма незначительно уменьшает его эффективность.

Выше мы рассмотрели работу согласованного фильтра с частотной точки зрения (рис. 23). Для изучения того же вопроса с временной точки зрения нужно иметь в виду, что согласованный фильтр является коррелятором и образует функцию

$$R_{f m_0}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) m_0(t-s) dt, \quad (20.26)$$

(ср. § 17 и § 18), где  $m_0(t)$  есть «стандартный» зондирующий сигнал, состоящий в данном случае из  $L$  когерентных радиоимпульсов, а  $f(t)$  — принятая функция за  $L$  периодов

повторения. Выражение (20.26) можно также переписать в виде

$$\begin{aligned}
 R_{f m_0}(s) &= \sum_{\alpha=1}^L \int_{-\infty}^{\infty} f(t) m_{\alpha}(t-s) dt = \\
 &= \sum_{\alpha=1}^L \int_{s + (\alpha-1)T - \frac{T_0}{2}}^{s + (\alpha-1)T + \frac{T_0}{2}} f(t) \cos \omega_0(t-s) dt, \quad (20.27)
 \end{aligned}$$

где через  $m_{\alpha}(t)$  обозначен  $\alpha$ -й радиоимпульс, в соответствии с формулами (20.01) и (20.16) равный

$$\left. \begin{aligned}
 m_{\alpha}(t) &= \cos \omega_0 t \text{ при } (\alpha-1)T - \frac{T_0}{2} < t < \\
 &< (\alpha-1)T + \frac{T_0}{2}, \\
 m_{\alpha}(t) &= 0 \text{ при других } t.
 \end{aligned} \right\} \quad (20.28)$$

Таким образом, работа согласованного фильтра или коррелятора сводится к следующим операциям.

1. Умножение на  $\cos \omega_0 t$  при различных сдвигах  $s$ . Эта операция может быть легко произведена с помощью когерентного (фазового) детектора, как раз осуществляющего перемножение косинусоидального напряжения (с несущей частотой  $\omega_0$ ) и входного напряжения  $f(t)$ .

2. Интегрирование произведения по интервалу времени  $T_0$ . Такое интегрирование (или усреднение во времени) производит линейный фильтр, пропускающий только достаточно низкие частоты и поставленный в схеме, как это обычно и делается на практике, за когерентным детектором. Отметим, что действие «усредняющего» фильтра не совсем эквивалентно интегрированию по вполне определенному интервалу  $T_0$ , однако ведь и наличие импульсов строго прямоугольной формы и продолжительности  $T_0$  также является теоретической идеализацией.

3. Суммирование или накопление полученных значений за  $L$  периодов повторения. Эта операция опять приводит к формуле (18.05), показывающей увеличение отношения сигнал/шум по мощности за счет накопления. Отношение

сигнал/шум после всей обработки определяется формулой (17.15).

Совокупность всех трех операций можно назвать когерентным накоплением (в отличие от некогерентного накопления в видеоканале, описанного в § 18). Мы видели, что когерентное накопление легко осуществляется обычными радиотехническими средствами.

В радиолокации даже в случае одного неподвижного отражающего объекта принимаемые импульсы обычно не образуют строго периодической последовательности в силу того, что высокочастотные фазы излученных импульсов случайным образом меняются от импульса к импульсу. Поэтому согласованный фильтр в цепи высокой или промежуточной частоты радиолокационного приемника можно осуществить лишь при когерентном детектировании, использующем колебание с несущей (или промежуточной) частотой  $\omega_0$  и с фазой, соответствующей фазе излученного импульса; благодаря когерентному детектору все происходит так же, как если бы излучалась строго периодическая последовательность радиоимпульсов, в которой каждый импульс имеет одну и ту же фазу. Остальные операции должны быть такими же, как описано выше.

Быстрое движение отражающего объекта (например, самолета) чрезвычайно усложняет техническое осуществление когерентного накопления. С частотной точки зрения при конструировании гребенчатых или согласованных фильтров нужно учесть смещение частоты принимаемого сигнала из-за эффекта Доплера; для разных частот приходится применять различные фильтры, причем эти фильтры должны быть расположены на шкале частот тем чаще, чем длительнее интервал времени, в течение которого производится накопление. С временной точки зрения нужно для каждой цели, движущейся с постоянной радиальной скоростью, производить обработку принятой функции  $f(t)$  не по формуле (20.27), а по формуле

$$\begin{aligned}
 R_{f m_x}(s) &= \sum_{\alpha=1}^L \int_{-\infty}^{\infty} f(t) m_{\alpha}(t-s) dt = \\
 &= \sum_{\alpha=1}^L \int_{s + (\alpha-1)T - \frac{T_0}{2}}^{s + (\alpha-1)T + \frac{T_0}{2}} f(t) \cos[\omega_0(t-s) - (\alpha-1)\Delta\theta] dt, \quad (20.29)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha}(t) &= \cos [\omega_0 t - (\alpha - 1) \Delta\vartheta] \quad \text{при } (\alpha - 1) T - \frac{T_0}{2} < \\ &< t < (\alpha - 1) T + \frac{T_0}{2}, \\ m_{\alpha}(t) &= 0 \quad \text{при других } t \end{aligned} \right\} \quad (20.30)$$

есть  $\alpha$ -й импульс из последовательности импульсов, отраженных от движущегося объекта, а  $\Delta\vartheta$  есть дополнительная разность фаз между импульсами, обусловленная этим движением. Легко показать, что

$$\Delta\vartheta = \zeta T, \quad (20.31)$$

где  $\zeta$  есть смещение частоты из-за эффекта Допплера (ср. гл. XI).

Необходимость применения различных операций при разных (и, вообще говоря, неизвестных) значениях  $\Delta\vartheta$ , т. е. осуществление «многовариантного» когерентного детектирования, приводит к чрезвычайно громоздкой схеме приемника.

## § 21. ФИЛЬТР УРКОВИЦА

В предыдущих параграфах (§ 17, 18 и 20) мы подробно рассмотрели оптимальные линейные фильтры для обнаружения сигналов известной формы и измерения их параметров на фоне белого шума. В некоторых случаях, однако, представляют интерес и другие помехи, спектральная интенсивность которых не является постоянной в пределах полосы частот, занятой сигналом. Наиболее важным примером таких помех являются помехи, обусловленные отражением зондирующих радиолокационных сигналов от многочисленных и хаотически расположенных местных предметов. Подробное рассмотрение таких помех дано в гл. XI, здесь мы ограничимся краткой формулировкой тех их свойств, которые нам понадобятся в этом параграфе.

Источником помех данного типа является большое число рассеивающих частиц, например капель дождя, беспорядочно расположенных в пространстве и благодаря своей многочисленности маскирующий полезный радиолокационный сигнал, отраженный от наблюдаемого объекта. В качестве первого приближения к действительности примем, что как рассеивающие частицы, так и наблюдаемый объект неподвижны, и что облучение производится с помощью последовательности некогерентных импульсов (или неко-

герентных радиолокационных сигналов другой формы). При такой постановке вопроса полезный сигнал отличается от помехи лишь своей «концентрацией» во времени, поскольку обуславливающий его объект находится в определенном месте, а рассеивающие частицы распределены (приблизительно равномерно) в большом объеме, окружающем этот объект. Это физическое различие может быть использовано для увеличения отношения сигнал/помеха при обработке принятой суммы сигнал+помеха за один период повторения.

Поскольку каждая частица становится источником отраженного сигнала и все эти сигналы складываются некогерентно в силу случайного (хаотического) расположения частиц, спектральная интенсивность помех может быть вычислена по формуле (20.07), т. е.

$$S_n(\omega) = \sigma |M(\omega)|^2, \quad (21.01)$$

где  $M(\omega)$  — комплексная спектральная амплитуда зондирующего радиолокационного сигнала (одиночного, т. е. за один период повторения). Частотная характеристика оптимального фильтра (16.14) в этом случае равна

$$K(\omega) = \frac{c}{\sigma} e^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega)}{|M(\omega)|^2}. \quad (21.02)$$

Беря для простоты  $c = \sigma$  и  $t_0 = 0$ , мы получаем

$$K(\omega) = \frac{1}{M(\omega)}. \quad (21.03)$$

Если бы удалось осуществить фильтр с комплексной частотной характеристикой (21.03), то полезный сигнал (16.06) на выходе такого фильтра был бы равен

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t), \quad (21.04)$$

а отношение сигнал/помеха на выходе фильтра согласно формуле (16.15) было бы равно

$$\rho = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega = \infty. \quad (21.05)$$

Бесконечное значение  $\rho$  получилось из-за того, что частотная характеристика (21.03) соответствует фильтру с бес-

конечно широкой полосой пропускания. Такой фильтр, во-первых, практически невозможно реализовать и, во-вторых, он будет весьма уязвим по отношению к белым шумам, например к собственным шумам приемника.

Поэтому мы предположим, что частотная характеристика равна

$$\left. \begin{aligned} K(\omega) &= \frac{1}{M(\omega)} && \text{при } \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega \\ & && \text{и } -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega, \\ K(\omega) &= 0 && \text{при других } \omega. \end{aligned} \right\} (21.06)$$

Тогда полезный сигнал (16.06) на выходе фильтра определяется сходящимся интегралом

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0 + \Delta\omega} e^{i\omega t} d\omega + \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i\omega t} d\omega \right) \quad (21.07)$$

или

$$\mu(t) = \frac{2}{\pi} \cos \omega_0 t \frac{\sin(\Delta\omega t)}{t}, \quad (21.08)$$

причем его максимальное значение достигается при  $t=0$ , оно равно

$$\mu(0) = \frac{2\Delta\omega}{\pi}. \quad (21.09)$$

Формулы (21.04) и (21.08) показывают, что фильтры (21.03) и (21.06) концентрируют полезный сигнал, давая в момент  $t=0$  резкий выброс, величина которого пропорциональна  $\Delta\omega$ . Спектральная интенсивность помех на выходе фильтра равна

$$S_y(\omega) = |K(\omega)|^2 S_n(\omega) = \sigma |K(\omega) M(\omega)|^2, \quad (21.10)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} S_y(\omega) &= \sigma && \text{при } \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega \\ & && \text{и } -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega, \\ S_y(\omega) &= 0 && \text{при других } \omega. \end{aligned} \right\} (21.11)$$

Таким образом, фильтр (21.06) «обеляет» помеху, превращая ее в стационарный процесс с постоянной (в пределах полосы пропускания фильтра) спектральной интенсивностью. Белый шум получается потому, что каждый эле-

ментарный сигнал, даваемый одиночным рассеивателем, как и полезный сигнал от наблюдаемого объекта, превращается в весьма кратковременный импульс (21.08) или в пределе — в (21.04), а совокупность таких случайно возникающих импульсов как раз дает нам белый шум (ср. § 12).

Отметим, что рассмотренный ранее согласованный фильтр, имеющий частотную характеристику (17.02), преобразует помеху в обратную сторону — он превращает белый шум со спектральной интенсивностью (17.01) в помеху со спектральной интенсивностью

$$S_v(\omega) = S_n |M(\omega)|^2, \quad (21.12)$$

которую можно рассматривать как совокупность случайно возникающих импульсов той же формы, что и сам полезный сигнал на входе фильтра.

Интенсивность помех (16.09) на выходе фильтра с частотной характеристикой (21.06) равна

$$\overline{v^2} = \frac{2\sigma\Delta\omega}{\pi}, \quad (21.13)$$

так что формула (16.08) дает

$$\rho = \frac{2\Delta\omega}{\pi\sigma}. \quad (21.14)$$

Это выражение полезно сопоставить с отношением сигнал/помеха на входе фильтра. Если сигнал представляет собой прямоугольный импульс (20.01), то по формулам (20.10) и (20.11) имеем

$$m(0) = A, \quad \overline{n^2} = R_n(0) = \frac{\sigma A^2}{2} T_0, \quad (21.15)$$

так что

$$\rho_1 = \frac{m^2(0)}{\overline{n^2}} = \frac{2}{\sigma T_0} \quad (21.16)$$

и

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\Delta\omega T_0}{\pi}. \quad (21.17)$$

Таким образом, действие фильтра, определяемого формулой (21.06), проявляется тем сильнее, чем больше произведение полосы фильтра  $\Delta\omega$  на длительность импульса  $T_0$ . Из формул (21.14) и (21.15) видно, что само по себе увеличение  $T_0$  не улучшает обнаружения сигнала на фоне

помех, поскольку интенсивность помех  $\bar{n}^2$  сама пропорциональна длительности импульса  $T_0$ , и можно лишь утверждать, что обнаружение сигнала облегчается при увеличении ширины полосы  $\Delta\omega$ . В статье Урковица содержатся соображения о практической реализации фильтров с частотными характеристиками, близкими к (21.06).

Сравним также действие фильтра (21.06) с действием прямоугольного фильтра с частотной характеристикой (17.23). При условии (17.27) максимальное значение  $\mu(t)$  согласно формуле (17.29) равно

$$\mu(0) = \frac{2A}{\pi} \operatorname{si} X, \quad X = \frac{\Delta\omega T_0}{2}. \quad (21.18)$$

При больших  $\Delta\omega$  максимальное значение  $\mu(t)$  [несколько превышающее  $\mu(0)$ ] достигается при некоторых значениях  $t \neq 0$ , так что огибающая сигнала  $\mu(t)$  становится немонотонной функцией  $t$ . Если прямоугольная частотная характеристика фильтра несколько сглажена, то этот эффект места не имеет. В дальнейшем мы им пренебрегаем и определяем отношение сигнал/помеха на выходе прямоугольного фильтра, как и раньше, формулой

$$\rho = \frac{\mu^2(0)}{\bar{v}^2}, \quad (21.19)$$

где согласно выражениям (16.08) и (20.03)

$$\bar{v}^2 = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} |M(\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma A^2}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{\sin^2 \frac{\omega T_0}{2}}{\omega^2} d\omega$$

или

$$\bar{v}^2 = \frac{\sigma A^2 T_0}{\pi} \int_0^X \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (21.20)$$

Последний интеграл легко приводится к интегральному синусу (17.33). В самом деле, интегрирование по частям дает

$$\int_0^X \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = - \int_0^X \frac{\sin^2 x}{x} + \int_0^X 2 \frac{\sin x \cos x}{x} dx = - \frac{\sin^2 X}{X} + \int_0^X \frac{\sin 2x}{x} dx, \quad (21.21)$$



так что

$$\sqrt{v^2} = \frac{\sigma A^2 T_0}{2} \left( \text{si } 2X - \frac{\sin^2 X}{X} \right) \quad (21.22)$$

и

$$\rho = \frac{4}{\pi \sigma T_0} \cdot \frac{(\text{si } X)^2}{\text{si } 2X - \frac{\sin^2 X}{X}}. \quad (21.23)$$

Действие прямоугольного фильтра можно характеризовать отношением

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{2}{\pi} \frac{(\text{si } X)^2}{\text{si } 2X - \frac{\sin^2 X}{X}}, \quad (21.24)$$

где  $\rho_1$  есть величина (21.16). Это отношение изображено на рис. 24: мы видим, что вплоть до  $X \approx 3$  расширение

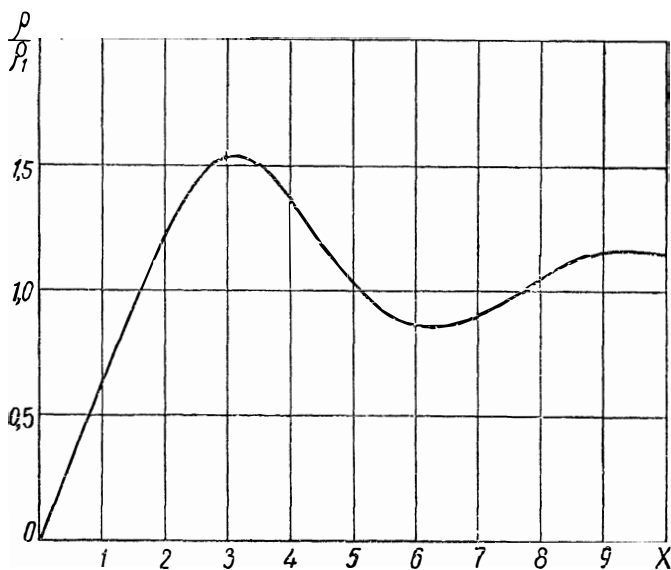


Рис. 24. Выделение сигнала на фоне хаотических отражений с помощью прямоугольного фильтра.

ширины полосы ведет к увеличению  $\rho$ , при меньших  $X$  увеличение  $\rho$  происходит приблизительно линейно, как в формуле (21.17).

Обозначая через  $\rho_0$  величину (21.14), реализуемую фильт-

ром Урковица с той же шириной полосы  $\Delta\omega$ , мы будем иметь

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(\operatorname{si} X)^2}{X \operatorname{si} 2X - \sin^2 X}. \quad (21.25)$$

Это отношение изображено на рис. 25. Мы видим, что при  $X \lesssim 2$  оба фильтра примерно равноценны, и лишь при бóльших значениях  $X$  (широкополосные фильтры) проявляются преимущества фильтра (21.06).

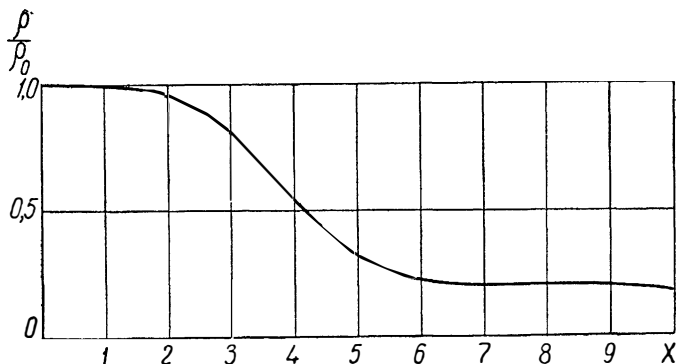


Рис. 25. Сравнение прямоугольного фильтра с фильтром Урковица.

Фактически допустимая ширина полосы  $\Delta\omega$  определяется интенсивностью белых шумов, всегда присутствующих в радиоприемных устройствах. Если обозначить постоянную (не зависящую от частоты) спектральную интенсивность белого шума через  $S_0$ , то полная спектральная интенсивность помех равна

$$S_n(\omega) = S_0 + \sigma |M(\omega)|^2, \quad (21.26)$$

так что вместо формулы (21.02) мы будем иметь (при  $t_0 = 0$ )

$$K(\omega) = c \frac{M^*(\omega)}{S_0 + \sigma |M(\omega)|^2}. \quad (21.27)$$

Если мы имеем прямоугольный радиоимпульс, то по формуле (20.03)

$$M(\omega_0) = \frac{AT_0}{2} \quad (21.28)$$

и если отношение

$$\varepsilon = \frac{S_0}{\sigma |M(\omega_0)|^2} = \frac{4S_0}{\sigma A^2 T_0^2} \quad (21.29)$$

достаточно мало, то при  $\omega \approx \omega_0$  фильтр (21.27) достаточно близок к фильтру (21.06). В силу неравенства

$$|M(\omega)|^2 \leq \frac{A^2}{(\omega - \omega_0)^2} \quad (21.30)$$

максимальную величину  $\Delta\omega$  для фильтра (21.06) можно найти из требования

$$S_0 = \frac{\sigma A^2}{(\Delta\omega)^2}, \quad (21.31)$$

поскольку при  $|\omega - \omega_0| > \Delta\omega$  слагаемое  $\sigma |M(\omega)|^2$  в знаменателе (21.27) будет меньше первого члена  $S_0$ , и весь фильтр (21.27) будет ближе к согласованному фильтру (17.02), чем к фильтру (21.06). Формулы (21.29) и (21.31) дают

$$\Delta\omega = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon} T_0} \quad (21.32)$$

или

$$X_{\text{макс}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (21.33)$$

Следует отметить, что помехи, обусловленные хаотическими отражениями, и белые шумы, например собственные шумы приемника, предъявляют к приемному устройству в значительной степени противоречивые требования. Как выше отмечалось, увеличение  $\rho$  при хаотических отражениях достигается увеличением полосы  $\Delta\omega$  фильтра, однако серьезному увеличению  $\Delta\omega$  препятствуют шумы. В дальнейшем мы будем неоднократно сталкиваться с подобным обстоятельством.

В данном параграфе выделение радиолокационного сигнала на фоне отражений от множества частиц рассмотрено в предположении, что как наблюдаемый объект, так и частицы неподвижны. Обычно же объект движется относительно частиц, что дает дополнительные возможности для его обнаружения; движение же рассеивателей затрудняет компенсацию помех (ср. гл. VI, VII и XI).

## § 22. О ФИЛЬТРАХ, ВЫДЕЛЯЮЩИХ СИГНАЛЫ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ

Теория фильтров для сигналов заданной формы, которая изложена в данной главе, базируется на двух основных предположениях: во-первых, мы считали фильтр линейным, и, во-вторых, мы характеризовали его качество с помощью отношения сигнал/помеха.

Последний критерий довольно привычен с практической точки зрения, однако его связь с видимостью сигнала на индикаторах различных типов довольно сложна. Поэтому как с теоретической, так и с практической стороны не совсем ясно, что означает какое-либо значение этого отношения (скажем,  $\rho=2$ ) и чем оно количественно лучше какого-либо другого значения (например  $\rho=1$ ). Во второй части книги, посвященной статистической теории оптимальных приемников, мы рассмотрим проблему обнаружения сигнала на фоне нормальной помехи с более фундаментальной точки зрения и покажем, как величина  $\rho$  связана количественно с основными характеристиками приемника, осуществляющего оптимальное обнаружение: вероятностью ложной тревоги и вероятностью пропуски сигнала.

Отметим, что отношение сигнал/помеха имеет прямой вероятностный смысл лишь при линейных преобразованиях, а при детектировании, например, теряет этот смысл. В частности, для одиночного полезного сигнала квадратичное и линейное детектирование суммы сигнала и помехи дает одни и те же вероятностные характеристики (см. гл. V), в то время как согласно § 18 отношения сигнал/помеха на выходе этих детекторов различны.

Первое предположение о линейности обнаруживающего фильтра является довольно сильным ограничением даже для нормальных процессов. В этом отношении фильтры, обнаруживающие сигнал, отличаются от фильтров, восстанавливающих (с минимальной квадратичной ошибкой) все значения полезного сигнала; последние (ср. § 7 и гл. VIII) всегда являются линейными, по крайней мере, для нормальных процессов, в то время как обнаруживающие фильтры могут быть и нелинейными. Отсылая читателя за подробностями ко второй части этой книги, мы отметим здесь лишь следующее обстоятельство. Задача об обнаружении (т. е. принятии решения о наличии или отсутствии) полезного сигнала, без восстановления его значений в различные моменты времени, может быть поставлена не толь-

ко для сигнала, являющегося заданной функцией времени, но и для сигнала, являющегося случайным процессом или случайной последовательностью. Эта задача требует иного подхода, и с помощью одних линейных фильтров ее решить нельзя (см. вторую часть книги).

Перед тем, как перейти к изложению статистической теории оптимальных приемников, мы рассмотрим в следующей главе теорию случайных последовательностей. При этом мы кратко остановимся на тех вопросах теории фильтрации последовательностей, которые в первых трех главах были более детально исследованы для случайных процессов.

Г Л А В А IV  
СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 23. ФИЛЬТРАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Наряду со случайными процессами, рассмотренными ранее, представляют интерес и случайные последовательности (последовательности случайных величин). Элементы случайной последовательности мы будем обозначать через  $f(t)$  и т. д., где  $t$  есть целочисленная переменная:  $t=0, 1, 2, \dots$  или  $t=\dots-2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , которую для наглядности мы будем называть временем (дискретное время). Переменная  $t$  является в сущности индексом, т. е. можно вместо  $f(t)$  писать  $f_t$ . Однако обозначение  $f(t)$  более удобно, поскольку получается единообразие, облегчающее перенос ряда понятий из теории случайных процессов в теорию случайных последовательностей.

Пусть две стационарные случайные последовательности  $f(t)$  и  $g(t)$  имеют равные нулю средние значения

$$\overline{f(t)}=0, \quad \overline{g(t)}=0. \quad (23.01)$$

Введем их взаимную корреляционную функцию по формуле

$$R_{fg}(\tau)=\overline{f(t)g(t-\tau)} \quad (23.02)$$

и (авто) корреляционную функцию

$$R_f(\tau)=\overline{f(t)f(t-\tau)}. \quad (23.03)$$

Эти определения отличаются от соответствующих определений для случайных процессов только тем, что переменные  $t$  и  $\tau$  являются целочисленными. Стационарность последовательностей проявляется в том, что корреляционные функции (23.02) и (23.03) не зависят от  $t$ .

Проблема *фильтрации* стационарных случайных последовательностей ставится следующим образом. Пусть мы имеем входную последовательность

$$f(t) = m(t) + n(t), \quad (23.04)$$

состоящую из полезного сигнала  $m(t)$  и помехи  $n(t)$ . Требуется по известным значениям  $f(t)$  в  $H$  моментов  $t - H, t - H + 1, \dots, t - 1$  с наибольшей возможной точностью определить  $m(t + s)$ ; при  $s \geq 0$  фильтрация соединяется с прогнозированием (упреждением), при  $s = -1, -2, \dots$  это есть „чистая“ фильтрация.

В общем виде решена лишь задача о *линейной* фильтрации, когда ищется наилучшая формула вида

$$x = k_1 f(t - 1) + k_2 f(t - 2) + \dots + k_H f(t - H) = \sum_{\tau=1}^H k_{\tau} f(t - \tau) \quad (23.05)$$

для величины  $x = x(t)$ , с наименьшей ошибкой воспроизводящей нужное нам значение  $m(t + s)$ . При этом используется критерий средней квадратичной ошибки, для чего вводится ошибка

$$\varepsilon = x - m(t + s) = \sum_{\tau} k_{\tau} f(t - \tau) - m(t + s) \quad (23.06)$$

и образуется ее средний квадрат

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 &= \overline{m^2(t + s) + x^2 - 2m(t + s)x} = \\ &= \bar{m}^2 + \sum_{\tau} \sum_{\sigma} k_{\tau} k_{\sigma} \overline{f(t - \tau) f(t - \sigma)} - 2 \sum_{\tau} k_{\tau} \overline{m(t + s) f(t - \tau)}. \end{aligned} \quad (23.07)$$

Пользуясь формулами (23.02) и (23.03), можно написать

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}^2 &= R_m(0), \\ \overline{f(t - \tau) f(t - \sigma)} &= R_f(\tau - \sigma), \\ \overline{m(t + s) f(t - \tau)} &= R_{mf}(\tau + s), \end{aligned} \right\} \quad (23.08)$$

и выражение (23.07) преобразуется к виду

$$E = R_m(0) + \sum_{\tau} \sum_{\sigma} k_{\tau} k_{\sigma} R_f(\tau - \sigma) - 2 \sum_{\tau} k_{\tau} R_{mf}(\tau + s). \quad (23.09)$$

Оптимальная линейная фильтрация соответствует минимуму  $E$ , который можно найти по правилам дифференциального исчисления, полагая

$$\frac{\partial E}{\partial k_\tau} = 0 \text{ при } \tau = 1, 2, \dots, H, \quad (23.10)$$

в результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $k_\tau$

$$\sum_{\sigma=1}^H k_\sigma R_f(\tau - \sigma) = R_{mf}(\tau + s) \quad (\tau = 1, 2, \dots, H), \quad (23.11)$$

из которой эти коэффициенты определяются, вообще говоря, однозначно, ибо число уравнений равно числу неизвестных  $k_\tau$ . Система алгебраических уравнений (23.11) аналогична интегральному уравнению оптимального линейного фильтра (§ 2) или его обобщению (§ 5), поскольку теперь выделяемый сигнал  $h(t)$  есть

$$h(t) = m(t + s) \text{ и } R_{hf}(\tau) = R_{mf}(\tau + s). \quad (23.12)$$

Как в теории фильтров для случайных процессов, решение уравнений (23.11) действительно дает минимум средней квадратичной ошибки (а не просто экстремум), что трудно доказать тем же путем.

Если мы возьмем коэффициенты  $k_\tau$  в соответствии с уравнениями (23.11), то средний квадрат ошибки фильтрации будет равен

$$\overline{\varepsilon^2} = R_m(0) - \sum_{\tau} \sum_{\sigma} k_\tau k_\sigma R_f(\tau - \sigma) \quad (23.13)$$

или

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{m^2} - \overline{x^2}. \quad (23.14)$$

Соотношения, полученные выше для линейной фильтрации стационарных последовательностей, отличаются более элементарным характером: в них фигурируют суммы и алгебраические уравнения вместо интегралов и интегральных уравнений, полученных ранее в теории фильтрации случайных процессов. Однако в вычислительном отношении дело обстоит не так просто, поскольку при больших  $H$  (скажем, при  $H > 4$ ) численное решение уравнений (23.11) является довольно трудоемкой задачей, быстро усложняющейся при росте  $H$ .



Чтобы получить общую ориентировку в возможностях линейной фильтрации, будем считать, что случайная последовательность  $f(t)$  нам известна целиком, т. е. при

$$t = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad \ddagger(23.15)$$

и нам нужно найти формулу фильтрации

$$x(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} k_{\tau} f(t - \tau), \quad (23.16)$$

с наименьшей ошибкой воспроизводящую значение  $m(t)$ . Такая постановка в теории случайных процессов ведет к фильтру I типа, дающему среди всех линейных фильтров наименьшую среднюю квадратичную ошибку. Здесь эта постановка задачи ведет также к наилучшей фильтрации, поскольку используется бесконечная в обе стороны последовательность  $f(t)$ .

В данном случае уравнения (23.11) принимают вид

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} k_{\sigma} R_f(\tau - \sigma) = R_{mf}(\tau) \quad (\tau = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (23.17)$$

Их решение можно получить в замкнутом виде. Для этого умножим каждое уравнение (23.17) на  $e^{-i\omega\tau}$  и просуммируем по всем  $\tau$

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} k_{\sigma} R_f(\tau - \sigma) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mf}(\tau). \quad (23.18)$$

Левая часть этого уравнения преобразовывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau} e^{-i\omega\tau} \sum_{\sigma} k_{\sigma} R_f(\tau - \sigma) &= \sum_{\sigma} k_{\sigma} \sum_{\tau} e^{-i\omega\tau} R_f(\tau - \sigma) = \\ &= \sum_{\sigma} e^{-i\omega\sigma} k_{\sigma} \sum_{\tau} e^{-i\omega\tau} R_f(\tau). \end{aligned} \quad (23.19)$$

Введем по аналогии с § 2 обозначения

$$\left. \begin{aligned} S_f(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_f(\tau), \\ S_{mf}(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{mf}(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (23.20)$$

и, кроме того, обозначим

$$K(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} k_{\tau}, \quad (23.21)$$

тогда уравнение (23.18) можно записать в виде

$$K(\omega) S_f(\omega) = S_{mf}(\omega), \quad (23.22)$$

откуда

$$K(\omega) = \frac{S_{mf}(\omega)}{S_f(\omega)}. \quad (23.23)$$

Зная функцию  $K(\omega)$ , мы легко найдем коэффициенты в формуле фильтрации. Действительно, формула (23.21) является в сущности комплексным рядом Фурье. Если умножить обе части формулы (23.21) на  $e^{i\omega\tau}$  и проинтегрировать от  $-\pi$  до  $\pi$  или в пределах любого другого интервала длиной  $2\pi$ , то получаем

$$k_{\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} K(\omega) d\omega. \quad (23.24)$$

Аналогичным образом производится „обращение“ формул (23.20)

$$\left. \begin{aligned} R_f(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} S_f(\omega) d\omega, \\ R_{mf}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} S_{mf}(\omega) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (23.25)$$

Подсчитаем теперь средний квадрат ошибки фильтрации. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\tau} \sum_{\sigma} k_{\tau} k_{\sigma} R_f(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} \sum_{\sigma} k_{\tau} k_{\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(\tau-\sigma)} S_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(\omega) d\omega \sum_{\tau} \sum_{\sigma} k_{\tau} k_{\sigma} e^{i\omega(\tau-\sigma)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(\omega) d\omega \sum_{\tau} e^{i\omega\tau} k_{\tau} \sum_{\sigma} e^{-i\omega\sigma} k_{\sigma} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\omega) K(-\omega) S_f(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega, \quad (23.26)$$

поскольку

$$K(-\omega) = K^*(\omega) \quad (23.27)$$

в силу вещественности коэффициентов  $k_r$  в формуле (23.21). Окончательно формула (23.13) преобразуется в виду

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_m(\omega) - |K(\omega)|^2 S_f(\omega)] d\omega, \quad (23.28)$$

аналогичному выражению (2.31). Подставляя в формулу (23.28) выражение (23.23), получаем

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_m(\omega) S_f(\omega) - |S_{mf}(\omega)|^2}{S_f(\omega)} d\omega. \quad (23.29)$$

Если полезный сигнал и помеха некоррелированы (или статистически независимы), то

$$S_{mf}(\omega) = S_m(\omega), \quad S_f(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega), \quad (23.30)$$

и мы приходим к соотношениям

$$K(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)} \quad (23.31)$$

и

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_m(\omega) S_n(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)} d\omega. \quad (23.32)$$

Физический смысл этих соотношений тот же, что и смысл соответствующих формул § 2. В следующем параграфе мы на нем остановимся подробнее.

#### § 24. ТЕОРЕМА ХИНЧИНА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФИЛЬТРАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Опираясь на аналогию между случайными последовательностями и случайными процессами, естественно считать функцию  $S_f(\omega)$ , определяемую первой формулой

(23.20), спектральной интенсивностью случайной последовательности  $f(t)$ . Рассматривая далее формулы (2.18) и (2.19), с одной стороны, и формулы (23.21) и (23.24) — с другой, естественно назвать функцию  $K(\omega)$  комплексной частотной характеристикой (или коэффициентом передачи) фильтра, работающего по формуле (23.05) или (23.16).

Справедливость последнего наименования можно обосновать следующим образом: будем брать в формуле (23.16) входную последовательность  $f(t)$  в виде

$$f(t) = f_{\omega} e^{i\omega t}, \quad (24.01)$$

тогда последовательность  $x(t)$  на выходе линейного фильтра дается формулами

$$x(t) = x_{\omega} e^{i\omega t}, \quad x_{\omega} = K(\omega) f_{\omega}, \quad (24.02)$$

где  $K(\omega)$  определяется формулой (23.21). Отсюда видно, что функция  $K(\omega)$  является частотной характеристикой, как она обычно вводится в радиотехнике (ср. § 2). Сама же переменная  $\omega$  есть, очевидно, круговая частота (безразмерная).

В качестве примера рассмотрим фильтр, работающий по формуле

$$x(t) = f(t) - f(t-1). \quad (24.03)$$

Сравнивая эту формулу с выражением (23.16), мы видим, что

$$k_0 = 1, \quad k_1 = -1, \quad \text{все другие } k_r = 0, \quad (24.04)$$

и потому по формуле (16.21) получаем

$$K(\omega) = 1 - e^{-i\omega} = 2i e^{-\frac{i\omega}{2}} \sin \frac{\omega}{2}. \quad (24.05)$$

Из первой формулы (23.25) вытекает соотношение

$$R_f(0) = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(\omega) d\omega, \quad (24.06)$$

на основании которого естественно считать, что величина  $\frac{1}{2\pi} S_f(\omega) d\omega$  есть интенсивность случайной последовательности в полосе частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ , так что  $S_f(\omega)$

есть интенсивность, соответствующая единичной полосе (ср. начало § 3). Доказательство этого утверждения трудно получить, пропуская данную последовательность через полосовой фильтр (ср. §3); оно совершенно аналогично тому, которое было проведено для процессов, поэтому мы его здесь не повторяем. Таким образом мы получаем обобщение теоремы Хинчина на случайные последовательности.

Единственным отличием спектральной интенсивности случайной последовательности является ее периодичность (с периодом  $2\pi$ ), вытекающая из формул (23.20). Таким же свойством обладает и частотная характеристика любого линейного фильтра для последовательностей: действительно, по формуле (23.21) получаем

$$K(\omega + 2\pi r) = K(\omega), \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.07)$$

Периодичность функций  $K(\omega)$  и  $S_f(\omega)$  объясняется тем, что при замене  $\omega$  на  $\omega + 2\pi r$  элементы входных и выходных последовательностей (24.01) и (24.02) не изменяются.

Из энергетического смысла функции  $S_f(\omega)$  вытекает условие

$$S_f(\omega) \geq 0, \quad (24.08)$$

накладывающее ограничение также на числа  $R_f(\tau)$ .

Рассмотрим простейшие примеры случайных последовательностей. Если элементы последовательности не коррелированы, то

$$R_f(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.09)$$

и такая последовательность имеет спектральную интенсивность

$$S_f(\omega) = R_f(0) = \text{const}. \quad (24.10)$$

Это — аналог абсолютно случайного процесса — белого шума (§ 12), также имеющего постоянную спектральную интенсивность. Всякая корреляция между элементами последовательности приводит к неравномерному спектру. Так, например, при

$$R_f(\tau) = Ca^{|\tau|} \quad (|a| < 1) \quad (24.11)$$

получаем

$$S_f(\omega) = C \frac{1 - a^2}{|e^{i\omega} - a|^2}, \quad (24.12)$$

причем при  $a \rightarrow 0$  мы возвращаемся к формулам (24.09) (24.10).

Спектральная интенсивность, соответствующая взаимной корреляционной функции, не имеет такого четкого энергетического смысла, как для автокорреляционной функции (ср. § 3).

Фильтрация стационарных последовательностей по формуле (23.31) в сущности сводится к их частотному разделению (ср. § 2). Как показывает формула (23.32), разделение происходит без ошибки, если спектры полезного сигнала и помехи не перекрываются, т. е. если

$$S_m(\omega) S_n(\omega) = 0, \quad (24.13)$$

причем мы считаем, что взаимная корреляция между сигналом и помехой отсутствует. Если же спектры перекрываются, то фильтрация сопровождается ошибкой даже при использовании всех элементов последовательности  $f(t)$  от  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ . При фильтрации по части элементов ошибка будет больше (во всяком случае не меньше).

Какое применение может найти теория фильтрации стационарных случайных последовательностей? Прежде всего ясно, что случайные процессы и случайные последовательности весьма близки друг к другу. Это видно не только из аналогии между формулами, но также из теоремы Котельникова (§ 19), по которой случайный процесс с ограниченным спектром определяется последовательностью своих значений через промежутки времени  $\Delta t$ .

Выше мы рассмотрели задачу об оптимальном фильтре, работающем по формуле (23.05), т. е. комбинирующем  $N$  элементов последовательности так, чтобы помеха была подавлена, а полезный сигнал — усилен по сравнению с помехой. Такое комбинирование может производиться с помощью ручного счета или счетно-решающего устройства: все равно имеет смысл говорить о частотной характеристике прибора, осуществляющего это комбинирование.

В этой задаче выделяется элемент случайной последовательности  $m(t)$  с минимальной ошибкой. Вообще говоря, такая постановка задачи характерна для техники связи, где  $m(t)$  — полезный сигнал — переносит некоторое неизвестное сообщение. Часто бывает достаточным лишь *обнаружение* последовательности  $m(t)$  (установление ее наличия или отсутствия «в целом») или *измерение* некоторых ее неизвестных параметров. Такая постановка задачи

в теории случайных процессов ведет к фильтрам для сигналов известной формы (см. гл. III). В следующем параграфе мы рассмотрим аналогичную задачу для последовательностей.

### § 25. ФИЛЬТР ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ

Исследуем возможности обнаружения известной последовательности  $m(t)$  на фоне помехи  $n(t)$ . Можно также считать, что «форма» последовательности  $m(t)$  известна, но не известно время ее появления  $\tau$  и ее амплитуда  $G$ :

$$m(t) = Gm_0(t - \tau), \quad (25.01)$$

причем последовательность  $m_0(t)$  — вполне определенная (скажем,  $m_0(t) = 1$  при  $t = 1, 2, \dots, 7$  и  $m_0(t) = 0$  при всех других  $t$ ). Линейная фильтрация входной последовательности

$$f(t) = m(t) \dagger n(t) \quad (25.02)$$

дает выходную последовательность

$$\varphi(t) = \sum_{\sigma} k_{\sigma} f(t - \sigma) = \mu(t) \dagger \nu(t), \quad (25.03)$$

состоящую из полезного сигнала

$$\mu(t) = \sum_{\sigma} k_{\sigma} m(t - \sigma) \quad (25.04)$$

и помехи

$$\nu(t) = \sum_{\sigma} k_{\sigma} n(t - \sigma). \quad (25.05)$$

Рассуждая, как и в § 16, нетрудно вывести формулы

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} K(\omega) M(\omega) d\omega, \quad M(\omega) = \sum_t e^{-i\omega t} m(t), \quad (25.06)$$

где  $M(\omega)$  — спектральная амплитуда полезного сигнала, и

$$\bar{\nu}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega \quad (25.07)$$

есть интенсивность помех на выходе фильтра.

Требую, чтобы в момент  $t_0$  достигалось максимальное отношение сигнал/помеха на выходе фильтра

$$\rho = \frac{\mu^2(t_0)}{\nu^2}, \quad (25.08)$$

мы приходим к частотной характеристике

$$K(\omega) = ce^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega)}{S_n(\omega)} \quad (25.09)$$

[ср. формулу (16.14)]. При выделении последовательности вида (25.01) мы получаем выражение

$$K(\omega) = ce^{-i\omega t_0} \frac{M_0^*(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (25.10)$$

аналогичное выражению (16.25); здесь  $M_0(\omega)$  образовано по  $m_0(t)$  так же, как  $M(\omega)$  по  $m(t)$  [см. формулу (25.06)].

Если помеха есть белый шум, т. е. ее спектр можно считать равномерным

$$S_n(\omega) = S_n = \text{const}, \quad (25.11)$$

то формула (25.09) при  $c = S_n$  дает частотную характеристику согласованного фильтра для последовательностей

$$K(\omega) = e^{-i\omega t_0} M^*(\omega). \quad (25.12)$$

Подставляя это выражение для частотной характеристики  $K(\omega)$  в формулу (23.24), получим

$$k_\sigma = m(t_0 - \sigma), \quad (25.13)$$

так что формула „согласованной“ фильтрации имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{\sigma} m(t_0 - \sigma) f(t - \sigma), \\ \mu(t) &= \sum_{\sigma} m(t_0 - \sigma) m(t - \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (25.14)$$

Если ввести корреляционную функцию  $R_m(\tau)$  последовательности  $m(t)$ , имеющей конечную длительность, по формуле

$$R_m(\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} m(t) m(t - \tau), \quad (25.15)$$



то формула (25.14) дает

$$\mu(t) = R_m(t_0 - t) \quad (25.16)$$

и, в частности,

$$\mu(t_0) = R_m(0) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} m^2(t). \quad (25.17)$$

Таким образом, отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра равно

$$\rho = \frac{E}{S_n}, \quad E = \sum_{t=-\infty}^{\infty} m^2(t). \quad (25.18)$$

Все это аналогично результатам гл. III.

## § 26. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПРОЦЕССОВ. I

В предыдущих параграфах мы рассмотрели задачи о фильтрации последовательностей, причем обозначения были выбраны таким образом, чтобы подчеркнуть далеко идущую аналогию с непрерывными процессами. В теории оптимальных приемников (во второй части книги) удобнее применять несколько иные обозначения, которые мы и приведем в этом и следующем параграфах. Во второй части книги мы будем для простоты рассуждений ограничиваться, главным образом, последовательностями, поскольку переход к непрерывным процессам, как правило, достаточно прост. Оптимальные приемники, исследуемые во второй части книги, в качестве своего существенного звена часто содержат оптимальные линейные фильтры, изученные в первой части данной книги, поэтому целесообразно представить теорию этих фильтров в виде, удобном для сравнения с теорией оптимальных приемников.

Пусть нам известна случайная последовательность

$$f_1, \dots, f_H, \quad (26.01)$$

элементы которой  $f_h$  равны сумме элементов  $m_h$  (полезный сигнал) и  $n_h$  (помеха)

$$f_h = m_h + n_h \quad (h = 1, \dots, H). \quad (26.02)$$

Величины  $n_h$  образуют случайную последовательность, их первые и вторые моменты соответственно равны

$$\overline{n_h} = 0, \quad \overline{n_g n_h} = R_{gh}^n \quad (g, h = 1, \dots, H), \quad (26.03)$$

так что свойства помехи определяются матрицей  $\|R_{gh}^n\|$  — симметричной матрицей  $H$ -го порядка.

В зависимости от свойств последовательности  $m_h$  возникают разные задачи. Если величины  $m_k$  также случайны, причем их моменты известны

$$\overline{m_h} = 0, \quad \overline{m_g m_h} = R_{gh}^m \quad (g, h = 1, \dots, H), \quad (26.04)$$

то возникает задача об оптимальном восстановлении (или выделении) величин  $m_h$  из их смеси (26.02) с помехой. Ограничиваясь линейными операциями над заданными числами  $f_h$ , мы ищем коэффициенты  $k_{gh}$  в формуле

$$x_g = \sum_h k_{gh} f_h, \quad (26.05)$$

обеспечивающие минимум среднего квадрата ошибки

$$\overline{\varepsilon_g^2} = \overline{(x_g - m_g)^2} = \sum_h \sum_j k_{gh} k_{gj} \overline{f_h f_j} - 2 \sum_h k_{gh} \overline{m_g f_h} + \overline{m_g^2}. \quad (26.06)$$

Если ввести в дополнение к (26.03) и (26.04) обозначения

$$R_{gh}^f = \overline{f_g f_h}, \quad R_{gh}^{mj} = \overline{m_g f_h}, \quad (26.07)$$

то средний квадрат ошибки (26.06) равен

$$\overline{\varepsilon_g^2} = \sum_h \sum_j k_{gh} k_{gj} R_{hj}^f - 2 \sum_h k_{gh} R_{gh}^{mj} + R_{gg}^m. \quad (26.08)$$

Условие минимума

$$\frac{\partial}{\partial k_{gh}} \overline{\varepsilon_g^2} = 0 \quad (26.09)$$

приводит к уравнениям

$$\sum_j k_{gj} R_{hj}^f = R_{gh}^{mj}, \quad (26.10)$$

позволяющим, по крайней мере в принципе, определить искомые коэффициенты  $k_{gh}$ . В самом деле, если через  $Q_{gh}^f$  обозначить элементы матрицы, обратной  $\|R_{gh}^f\|$ , т. е. если  $Q_{gh}^f$  удовлетворяют уравнениям

$$\sum_j R_{gj}^f Q_{jh}^f = \delta_{gh}, \quad (26.11)$$

где  $\delta_{gh}$  — символ Кронекера, то искомые величины  $k_{gh}$  будут равны

$$k_{gh} = \sum_j R_{gj}^{mf} Q_{jh}^f. \quad (26.12)$$

В дальнейшем мы будем для простоты считать последовательности  $m_1, \dots, m_H$  и  $n_1, \dots, n_H$  взаимно некоррелированными

$$\overline{m_g n_h} = 0 \text{ при } g, h = 1, \dots, H, \quad (26.13)$$

тогда выражения (26.07) примут вид

$$R_{gh}^f = R_{gh}^m + R_{gh}^n, \quad R_{gh}^{mf} = R_{gh}^m, \quad (26.14)$$

а формулу (26.12) можно будет переписать в виде

$$k_{gh} = \sum_j R_{gj}^m Q_{jh}^f = \delta_{gh} - \sum_j R_{gj}^n Q_{jh}^f. \quad (26.15)$$

Сами уравнения (26.10) можно переписать следующим образом:

$$k_{gh} + \sum_{j,l} k_{gj} R_{lj}^n Q_{lh}^m = \delta_{gh} \quad (26.16)$$

или

$$k_{gh} + \sum_{j,l} k_{gj} R_{lj}^m Q_{lh}^n = \sum_j R_{gj}^m Q_{jh}^f, \quad (26.17)$$

где мы использовали первую формулу (26.14) и обозначили через  $\|Q_{gh}^m\|$  и  $\|Q_{gh}^n\|$  матрицы, обратные матрицам  $\|R_{gh}^m\|$  и  $\|R_{gh}^n\|$  соответственно. В силу уравнений (26.10) средняя квадратичная ошибка при оптимальных коэффициентах  $k_{gh}$  равна

$$\overline{\varepsilon_g^2} = R_{gg}^m - \sum_{h,i} k_{gh} k_{gi} R_{hi}^f. \quad (26.18)$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда последовательность  $m_1, \dots, m_H$  известна полностью, однако при этом может либо присутствовать, либо отсутствовать в последовательности  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_H$ ; в отсутствие  $m_1, \dots, m_H$  величины  $\hat{f}_h$  сводятся к чистой помехе, т. е. вместо (26.02) мы имеем

$$\hat{f}_h = n_h. \quad (26.19)$$

Здесь также можно искать коэффициенты  $k_h$  — такие, что при образовании величины

$$\varphi = \sum_h k_h f_h \quad (26.20)$$

получается наибольшее отношение сигнал/помеха, определяемое формулой

$$\rho = \frac{\mu^2}{\nu^2} \quad (26.21)$$

и характеризующее достоверность обнаружения полезной последовательности  $m_1, \dots, m_H$  на фоне помех. Здесь

$$\varphi = \mu + \nu, \quad \mu = \sum_h k_h m_h, \quad \nu = \sum_h k_h n_h \quad (26.22)$$

и

$$\overline{\nu^2} = \sum_{g,h} k_g k_h R_{gh}^n \quad (26.23)$$

Условие максимума

$$\frac{\partial \rho}{\partial k_g} = 0 \quad (26.24)$$

приводит нас к системе уравнений для неизвестных коэффициентов

$$\sum_h k_h R_{gh}^n = c m_g, \quad (26.25)$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Если опять воспользоваться обратной матрицей  $\|Q_{gh}^n\|$ , то

$$k_g = c \sum_h m_h Q_{gh}^n. \quad (26.26)$$

Если вместо известной последовательности  $m_1, \dots, m_H$  во входной последовательности (26.02) может содержаться одна из  $P$  последовательностей  $m_{1p}, \dots, m_{Hp}$  ( $p = 1, \dots, P$ ) и нам нужно решить, какая из  $P$  возможностей реализуется, то естественно образовывать величины

$$\varphi_p = \sum_h k_{ph} f_h \quad (p = 1, \dots, P) \quad (26.27)$$

и искать коэффициенты  $k_{ph}$  так, чтобы параметры

$$\rho_p = \frac{\mu_p^2}{\nu_p^2} \quad (\mu_p = \sum_h k_{ph} m_{hp}, \quad \nu_p = \sum_h k_{ph} n_h) \quad (26.28)$$

принимали наибольшие значения. Это приводит к уравнениям

$$\sum_h k_{ph} R_{gh}^n = c m_{gp} \quad (p = 1, \dots, P), \quad (26.29)$$

по существу не отличающимся от уравнений (26.25). Те же соотношения получаются, если полезный сигнал появляется с неизвестной амплитудой  $G$ , т. е. в виде последовательностей  $Gm_{1p}, \dots, Gm_{Hp}$ . Решение уравнений (26.29) можно представить в виде

$$k_{pg} = c \sum_h m_{hp} Q_{gh}^n. \quad (26.30)$$

Если последовательность (26.01) задана в моменты времени

$$t_h = t_1 + (h-1) \Delta t \quad (h = 1, 2, \dots, H), \quad (26.31)$$

так что

$$f_h = f(t_h), \quad m_h = m(t_h), \quad n_h = n(t_h), \quad (26.32)$$

то корреляционные функции можно записать следующим образом:

$$R_{gh}^f = R_f(t_g, t_h), \quad R_{gh}^m = R_m(t_g, t_h), \quad R_{gh}^n = R_n(t_g, t_h). \quad (26.33)$$

Коэффициенты  $k_{gh}$  в формуле (26.05) удобно, однако, писать в виде

$$k_{gh} = k(t_g, t_h) \Delta t, \quad (26.34)$$

так что формула (26.05) и уравнения (26.10) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x(t_g) &= \Delta t \sum_h k(t_g, t_h) f(t_h), \\ \Delta t \sum_j k(t_g, t_j) R_f(t_j, t_h) &= R_m(t_g, t_h). \end{aligned} \right\} \quad (26.37)$$

Отсюда уже легко перейти к процессам, являющимся функцией непрерывного времени  $t$  — достаточно заменить суммы на интегралы

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \int_{t_1}^{t_1+T} k(t, t') f(t') dt', \\ \int_{t_1}^{t_1+T} k(t, s) R_f(s, t') ds &= R_m(t, t'), \end{aligned} \right\} \quad (26.38)$$

где

$$T = (H-1)\Delta t \quad (26.39)$$

есть интервал времени, в течение которого задана функция  $f(t)$ .

Если все процессы стационарны, то

$$R_m(t, t') = R_m(t - t'), \quad R_f(t, t') = R_f(t - t'), \quad (26.40)$$

и поэтому можно считать

$$k(t, t') = k(t - t'). \quad (26.41)$$

Тогда формулы (26.38) переходят в соотношения гл. I.

В случае, когда полезный сигнал полностью известен, мы полагаем [ $t_0$  — произвольный элемент последовательности (26.31)]

$$k_h = k(t_0 - t_h) \Delta t, \quad (26.42)$$

так что формулы (26.20) и (26.25) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \Delta t \sum_h k(t_0 - t_h) f(t_h), \\ \Delta t \sum_h k(t_0 - t_h) R_n(t_g, t_h) &= cm(t_g) \end{aligned} \right\} \quad (26.43)$$

и для непрерывных процессов мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int_{t_1}^{t_1+T} k(t_0 - t) f(t) dt, \\ \int_{t_1}^{t_1+T} k(t_0 - t') R_n(t, t') dt' &= cm(t). \end{aligned} \right\} \quad (26.44)$$

Последняя формула есть интегральное уравнение для искомой функции  $k(t)$ . В случае, когда помеха  $n(t)$

является стационарным случайным процессом, мы имеем:

$$R_n(t, t') = R_n(t - t'), \quad (26.45)$$

и ядро этого уравнения является четной функцией разности  $t - t'$ .

Ограничиваясь стационарными помехами, рассмотрим, наконец, обнаружение полезного сигнала

$$m(t_h) = Gm_0(t_h - p\Delta t) \quad (26.46)$$

с неизвестной амплитудой  $G$  и неизвестным временем появления. В этом случае вместо (26.43) мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t_g) &= \Delta t \sum_h k(t_g - t_h) f(t_h), \\ \Delta t \sum_h k(t_g - t_h) R_n(t_g - t_h) &= cm_0(t_g) \end{aligned} \right\} \quad (26.47)$$

или для непрерывных процессов

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{t_1}^{t_1+T} k(t - t') f(t') dt, \\ \int_{t_1}^{t_1+T} k(t - t') R_n(t - t') dt' &= cm_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (26.48)$$

Частотное представление всех этих операций будет систематизировано в следующем параграфе.

## § 27. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПРОЦЕССОВ. II

В задачах фильтрации большое значение имеют частотные соотношения, а именно соотношения между спектральными интенсивностями (или амплитудами) и частотными характеристиками соответствующих фильтров (ср. § 2, 16, 23 и 25). Эти соотношения применимы, если соответствующие случайные процессы или случайные последовательности являются стационарными.

Начнем со случайных последовательностей. Если корреляционная функция  $R_f(t_g, t_h)$  [ср. формулу (26.33)] является четной функцией разности  $t_g - t_h$

$$R_f(t_g, t_h) = R_f(t_g - t_h) = R_f(|g - h| \Delta t), \quad (27.01)$$

то спектральную интенсивность  $S_f(\omega)$  можно определить формулой

$$S_f(\omega) = \Delta t \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega h \Delta t} R_f(h \Delta t), \quad (27.02)$$

обращение которой имеет вид

$$R_f(h \Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} e^{i\omega h \Delta t} S_f(\omega) d\omega. \quad (27.03)$$

Последнюю формулу легко вывести, обобщая рассуждения § 24.

Аналогичным образом вводится частотная характеристика фильтра, для которого функция  $k(t_g, t_h)$  [ср. формулу (26.41)] удовлетворяет соотношению

$$k(t_g, t_h) = k(t_g - t_h) = k((g - h) \Delta t). \quad (27.04)$$

По определению, комплексная частотная характеристика фильтра равна

$$K(\omega) = \Delta t \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega h \Delta t} k(h \Delta t), \quad (27.05)$$

причем

$$k(h \Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} e^{i\omega h \Delta t} K(\omega) d\omega. \quad (27.06)$$

Согласно § 23 частотная характеристика оптимального фильтра I типа, восстанавливающего элементы  $m_h$  стационарной случайной последовательности по значениям бесконечной последовательности  $f_h$ , равна

$$K(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)}. \quad (27.07)$$

где  $S_m(\omega)$  — спектральная интенсивность полезной последовательности,  $S_n(\omega)$  — спектральная интенсивность помехи. При этом предполагается отсутствие корреляции между



помехой и полезным сигналом; тогда средний квадрат ошибки фильтрации равен

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \frac{S_m(\omega)S_n(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)} d\omega. \quad (27.08)$$

Для фильтров II и III типов получаются более сложные формулы, и средняя квадратичная ошибка увеличивается (или, в порядке исключения, остается постоянной).

Переход к непрерывным процессам получаем, полагая  $\Delta t \rightarrow 0$  и обозначая  $\tau = h\Delta t$ . При этом ряды (27.02) и (27.05) превращаются в интегралы, а в формулах (27.03), (27.06) и (27.08) интегрирование производится в пределах  $-\infty < \omega < \infty$ . Соответствующие выражения были выписаны в гл. I.

В задаче об обнаружении последовательности (26.46) на фоне помех мы пришли к уравнению

$$\Delta t \sum_h k(t_0 - t_h) R_n(|g - h| \Delta t) = cm_0(t_g), \quad (27.09)$$

где  $R_n(\tau) = R_n(-\tau)$  есть корреляционная функция помех. Если считать, что мы располагаем последовательностью  $f_h = f(t_h)$ , бесконечной в обе стороны, то в формуле (27.09) производится суммирование в пределах  $-\infty < h < \infty$ , и частотная характеристика (27.05) в данной задаче согласно § 25 получается равной

$$K(\omega) = ce^{-i\omega t_0} \frac{M_0^*(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (27.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_0(\omega) &= \Delta t \sum_h e^{-i\omega t_h} m_0(t_h), \\ S_n(\omega) &= \Delta t \sum_h e^{-i\omega h \Delta t} R_n(h \Delta t), \end{aligned} \right\} \quad (27.11)$$

а  $t_0$  — произвольный элемент последовательности (26.31). Отношение сигнал/помеха в частотном представлении дается выражением

$$\rho = \frac{G^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \frac{|M_0(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega \quad (27.12)$$

при фиксированном значении  $G$ . Если же амплитуда  $G$  является случайной величиной, то средним отношением сигнал/помеха (на выходе оптимального фильтра обнаружения) естественно считать величину.

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{G}^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \frac{|M_0(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega. \quad (27.13)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  мы возвращаемся к формулам § 16.

В предыдущем изложении мы неявно предполагали, что сдвиг полезного сигнала во времени может быть произвольным, т. е.  $p$  в формуле (26.46) есть любое целое число — положительное или отрицательное. Если возможные значения  $p$  ограничены, то можно по-прежнему вводить частотную характеристику фильтра, но при этом нужно помнить, что для выделения и обнаружения полезного сигнала нужна лишь соответствующая часть значений  $\varphi(t_g)$ , а именно  $\varphi(t_0 + p\Delta t)$ . В частности, если  $p$  может принимать лишь одно значение  $p=0$ , то мы возвращаемся к случаю сигнала известной формы и с известным временем появления, когда в результате «фильтрации» последовательности  $f_n$  или функции  $f(t)$  получается число (а не последовательность или функция). Поскольку к последнему случаю можно перейти, постепенно уменьшая число возможных значений  $p$ , то можно считать, что фильтрация по формулам (26.20), (26.22) и (26.23) имеет частотную характеристику

$$K(\omega) = ce^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (27.14)$$

причем отношение сигнал/помеха на выходе фильтра равно

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega. \quad (27.15)$$

С таким фильтром мы будем неоднократно иметь дело в теории оптимальных приемников, обнаруживающих сигнал известной формы. К непрерывным процессам мы переходим, полагая  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\frac{\pi}{\Delta t} \rightarrow \infty$ .

Вообще говоря, фильтр с частотной характеристикой (27.10) или (27.14) будет фильтром I типа, обрабатывающим функцию  $f(t)$  или последовательность  $f(t_k)$ , заданные в бесконечном интервале времени (при  $-\infty < t < \infty$ ). Однако при некоррелированной помехе (белом шуме) этот фильтр по существу использует функцию  $f(t)$  или последовательность  $f(t_k)$  в конечном интервале времени, начальный момент которого определяется появлением самого раннего сигнала, а конечный момент — окончанием самого позднего сигнала (см. § 17). Для коррелированной помехи этот интервал следует несколько расширить за счет добавочных интервалов в начале и конце, продолжительность которых определяется временем корреляции помехи. Если функция  $f(t)$  или последовательность  $f(t_k)$  на входе приемника заданы в таком интервале, то линейный фильтр, производящий оптимальную обработку этих данных, будет по-прежнему иметь частотную характеристику (27.10) или (27.14).

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРИЕМНИКОВ

---

### Г Л А В А V

#### ПРИЕМ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

##### § 28. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ХАРАКТЕР ПРИЕМА

Прием полезных сигналов при наличии случайных помех всегда дает нам сведения, имеющие вероятностный характер, и лишь при достаточно малой интенсивности случайных помех эти вероятностные сведения становятся практически достоверными.

Действительно, на фоне случайных помех (шумов) обнаружить полезные сигналы и различить их тем труднее, чем интенсивнее этот фон. Шумовой фон маскирует полезные сигналы, накладываясь на них случайным образом и делая необходимым некоторое «угадывание», в результате чего сигнал может быть принят за другой сигнал или вообще пропущен, а сильный выброс шума принят за полезный сигнал. Но даже тогда, когда полезный сигнал обнаружен правильно, измерение его параметров вследствие помех производится с той или иной ошибкой.

Случайный характер собственных шумов приемника и других помех, а также зависимость полезного сигнала от случайных параметров заставляют нас анализировать прием с помощью статистических методов.

Статистическая теория приема рассматривалась впервые В. А. Котельниковым, Ф. Вудвордом, И. Дэвисом, Д. Мидлтоном и др. авторами. Главной проблемой этой теории является нахождение наилучшего (оптимального) способа обработки принятого сигнала, и, в частности, наилучшего способа «угадывания», о котором говорилось выше. Но что понимать под словом «наилучший»? В первой части книги мы пользовались критерием максимума отношения сигнал/помеха или же критерием минимума средней квадратичной ошибки на выходе системы. Однако эти

критерии нуждаются, в сущности, в более глубоком обосновании.

Приведем в связи с этим поучительное высказывание Вудворда: «Задачей приема является извлечение информации из смеси полезного сигнала и шума. По этому вопросу существует обширная литература. Значительная ее часть касается методов получения возможно большего отношения сигнала к шуму на том основании, что именно шум, в конечном счете, ограничивает чувствительность и поэтому чем слабее шум, тем лучше. Этот подход правилен до тех пор, пока он приводит к цели, однако он не содержит постановки задачи об извлечении информации. Иногда он может ввести в заблуждение, так как не существует общей теоремы, утверждающей, что максимальное отношение сигнала к шуму на выходе обеспечивает максимальное извлечение информации».

Как мы увидим ниже, в статистической теории приема также фигурирует параметр, играющий роль отношения сигнал/помеха и определяющий характеристики оптимального приемника. Однако здесь этот параметр занимает более скромное положение, поскольку выбор оптимального приемника производится без его помощи.

Статистическая теория приема исходит из следующей постановки задачи.

Пусть входной процесс

$$f(t) = m(t) + n(t) \quad (28.01)$$

состоит из полезного сигнала  $m(t)$  и помехи  $n(t)$ , данных в виде функций времени  $t$ ; в свою очередь, помеха  $n(t)$  может состоять из помех различного типа (собственные шумы приемника, отражения от хаотически расположенных частиц и т. д.). Мы будем в дальнейшем рассматривать случаи, когда имеется вероятность того, что полезный сигнал отсутствует. Тогда вместо формулы (28.01) будем иметь

$$f(t) = n(t), \quad (28.02)$$

т. е. входной процесс сводится к одной помехе.

Оптимальным приемником мы назовем устройство, которое при подаче на его вход функции  $f(t)$  образует на выходе условные вероятности интересующих нас событий, т. е. вероятность присутствия полезного сигнала  $P_f(m)$  и вероятность его отсутствия  $P_f(0) = 1 - P_f(m)$  при условии, что нам известна функция  $f(t)$  — процесс на входе

приемника. В задачах о *различении* нескольких или многих полезных сигналов на фоне помех оптимальный приемник должен образовывать более богатый набор условных вероятностей (ср. гл. VIII).

Условные вероятности  $P_f(m)$  и т. д. называют вероятностями апостериорными, или вероятностями после проведения опыта, подчеркивая тот факт, что они являются вероятностями, основанными на результатах опыта, в данном случае на известной функции  $f(t)$ . Обычно вводят также априорные вероятности  $P(m)$  и  $P(0) = 1 - P(m)$  или вероятности появления и отсутствия полезного сигнала при приеме, характеризующие ситуацию до проведения опыта; эти вероятности более подробно будут рассмотрены в § 30.

Данное выше определение оптимального приемника отображает то обстоятельство, что при наличии случайных помех на основании входной функции  $f(t)$  можно говорить о наличии или отсутствии полезного сигнала  $m(t)$  или о том, что он имеет те или иные параметры, лишь с некоторыми вероятностями. Апостериорные вероятности дают наиболее полное и подробное описание результатов, к которым приводит прием. Как правило, по результатам приема приходится предпринимать определенные действия и, следовательно, принимать решения, которые используют апостериорные вероятности лишь частичным, неполным образом, например, считают наиболее вероятное событие действительно наступившим или применяют какую-либо другую схему решения (см. § 30). Вопрос о выборе оптимального правила решения («угадывания») или оптимальной схемы, принимающей, например, решение о наличии или отсутствии полезного сигнала, является более сложным, поэтому мы начнем изложение с исследования оптимального приемника, образующего апостериорные вероятности.

При приеме возникают две задачи:

- 1) оптимальное обнаружение полезного сигнала на фоне помех,
- 2) оптимальное измерение некоторых параметров полезного сигнала при наличии помех.

Полезный сигнал  $m(t)$  зависит от времени  $t$  и ряда параметров. Разделим эти параметры на три группы:

1. Известные параметры, которые мы будем обозначать самой буквой  $m$ ; они определяют, в частности, форму сигнала или же его статистические свойства, если  $m(t)$

есть случайная последовательность или случайный процесс.

2. Неизвестные параметры, которые мы измеряем при приеме; для радиолокационного сигнала к ним относятся, например, дальность цели, азимут цели и т. д. Такой параметр мы обозначим буквой  $\tau$  (в случае нескольких таких параметров  $\tau$  заменяет группу символов  $\tau_1, \tau_2, \dots$ ).

3. Неизвестные параметры, которые мы не измеряем при приеме; в радиолокации к ним относятся, например, высокочастотная фаза сигнала и его флюктуирующая амплитуда. Такой параметр (или группу таких параметров) мы обозначим буквой  $\theta$ .

Итак, полезный сигнал в общем случае имеет вид:

$$m = m(t, \tau, \theta). \quad (28.03)$$

Помеху  $n(t)$  на входе приемника мы будем считать случайным процессом с известными статистическими свойствами.

Пользуясь обозначением (28.03), можно дать следующую классификацию функций, которые должен выполнять приемник.

1. Простое обнаружение — обнаружение полностью известного полезного сигнала  $m = m(t)$  на фоне помехи.

2. Сложное обнаружение — обнаружение сигнала  $m = m(t, \theta)$  с неизвестными параметрами без измерения последних.

3. Простое измерение — обнаружение сигнала  $m = m(t, \tau)$  и измерение его неизвестных параметров  $\tau$ .

4. Сложное измерение — обнаружение сигнала  $m = m(t, \tau, \theta)$  с измерением его неизвестных параметров  $\tau$ .

Заметим, что в радиолокации всегда осуществляется сложное измерение. Однако, начиная теоретическое исследование с самых простых случаев, можно лучше понять более сложные проблемы, возникающие на практике.

## § 29. АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРАВДОПОДОБИЯ

Вычислим апостериорные вероятности, получающиеся в результате приема, для чего воспользуемся некоторыми формулами теории вероятностей. Известно, что вероятность совместного наступления событий  $A$  и  $B$ , записываемая как  $P(AB)$ , удовлетворяет следующему соотношению:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A), \quad (29.01)$$

где  $P(A)$  — вероятность события  $A$ ;  $P_A(B)$  — вероятность события  $B$  при условии, что событие  $A$  произошло; символы  $P(B)$  и  $P_B(A)$  имеют аналогичный смысл.

Соотношение (29.01) можно переписать так:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}. \quad (29.02)$$

Пусть имеется полная система несовместимых событий

$$A_1, A_2, \dots, A_K, \quad (29.03)$$

т. е. таких событий, что одно из них непременно должно произойти, а сразу несколько событий произойти не может. Если  $B$  есть событие, которое может произойти только совместно с любым из событий системы (29.03), то для вероятности  $P(B)$  мы имеем выражение:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots \\ &\dots + P(A_K)P_{A_K}(B) = \sum_{k=1}^K P(A_k)P_{A_k}(B), \end{aligned} \quad (29.04)$$

называемое формулой полной вероятности.

Если известно, что событие  $B$  произошло, то естественно возникает вопрос, совместно с каким событием  $A_k$  произошло событие  $B$ . События (29.03) в этом случае называются гипотезами, вероятности которых необходимо определить. Из формул (29.02) и (29.04) мы получаем выражение

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{k=1}^K P(A_k)P_{A_k}(B)}, \quad (29.05)$$

которое называется формулой Байеса или формулой обратных вероятностей. Так как гипотезы образуют полную систему, то для вероятностей  $P_B(A_k)$  имеем следующее контрольное равенство:

$$\sum_{k=1}^K P_B(A_k) = 1. \quad (29.06)$$

Вероятности, входящие в формулу (29.05), имеют следующие специальные названия:  $P(A_k)$  — априорная вероят-



ность гипотезы  $A_k$ , т. е. ее вероятность до опыта;  $P_B(A_k)$  | апостериорная вероятность гипотезы  $A_k$ , т. е. вероятность гипотезы  $A_k$  после опыта — после того, как событие  $B$  совершилось;  $P_{A_k}(B)$  — функция правдоподобия.

Применим выписанные выше формулы к вычислению апостериорной вероятности присутствия полезного сигнала  $m(t)$  в принятой функции  $f(t)$ . В нашем случае событие  $B$  есть появление на входе приемника функции  $f(t)$ , событие  $A$  — наличие в нем полезного сигнала  $m(t)$ . Апостериорная вероятность  $P_f(m)$  будет равна

$$P_f(m) = \frac{P(m)P_m(f)}{P(f)}, \quad (29.07)$$

где  $P(m)$  — априорная вероятность появления полезного сигнала (вероятность до приема);  $P_m(f)$  — функция правдоподобия [условная вероятность принять функцию  $f(t)$  при наличии полезного сигнала  $m(t)$ ],  $P(f)$  — априорная вероятность принять функцию  $f(t)$ ,  $P_f(m)$  — апостериорная вероятность наличия полезного сигнала  $m(t)$  в принятой функции  $f(t)$  (вероятность после приема).

Рассмотрим вид выражения (29.07) в случаях, предусмотренных классификацией в конце § 28.

1. *Простое обнаружение* — полезный сигнал полностью известен. Принятая функция  $f(t)$  может иметь двоякое происхождение: а) функция  $f(t)$  образована одной помехой,  $f(t) = n(t)$ ; б) функция  $f(t)$  является смесью полезного сигнала и помехи,  $f(t) = m(t) + n(t)$ . Тогда вероятность сложного события  $f$  можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} P(f) &= P(m)P_m(f) + P(0)P_0(f), \\ P(m) + P(0) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (29.08)$$

где  $P(m)$  — априорная вероятность появления полезного сигнала  $m$ ;  $P_m(f)$  — условная вероятность  $f$  при наличии  $m$ ;  $P(0)$  — априорная вероятность отсутствия полезного сигнала,  $P_0(f)$  условная вероятность  $f$  при отсутствии  $m$ .

Общую формулу (29.07) можно переписать с учетом (29.08) следующим образом:

$$P_f(m) = \frac{P(m)P_m(f)}{P(m)P_m(f) + P(0)P_0(f)} = \frac{\Lambda}{\Lambda + \frac{P(0)}{P(m)}} \quad (29.09)$$

где величину

$$\Lambda = \frac{P_m(f)}{P_o(f)} \quad (29.10)$$

мы будем называть коэффициентом правдоподобия.

Коэффициент правдоподобия определяет также апостериорную вероятность отсутствия полезного сигнала

$$P_f(0) = \frac{P(0) P_o(f)}{P(0) P_o(f) + P(m) P_m(f)} = \frac{\frac{P(0)}{P(m)}}{\Lambda + \frac{P(0)}{P(m)}}, \quad (29.11)$$

причем отношение апостериорных вероятностей (29.09) и (29.11) равно

$$\frac{P_f(m)}{P_f(0)} = \frac{P(m)}{P(0)} \Lambda. \quad (29.12)$$

2. *Сложное обнаружение* — полезный сигнал имеет неизвестный параметр  $\theta$ , который не измеряется. При сложном обнаружении принятая функция  $f(t)$  может реализоваться следующим образом: а) она состоит из одной помехи,  $f(t) = n(t)$ ; б) она является суммой полезного сигнала с каким-то определенным значением неизвестного дискретного параметра  $\theta_k$  и помехи,  $f(t) = m(t, \theta_k) + n(t)$ . Тогда вероятность сложного события  $f$  можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} P(f) &= \sum_{k=1}^K P[m(\theta_k)] P_{m(\theta_k)}(f) + P(0) P_o(f), \\ \sum_{k=1}^K P[m(\theta_k)] + P(0) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (29.13)$$

где  $P[m(\theta_k)]$  — вероятность того, что полезный сигнал есть и имеет параметр  $\theta = \theta_k$ , а  $P_{m(\theta_k)}(f)$  — условная вероятность приема функции  $f(t)$  при наличии в ней полезного сигнала  $m$  с параметром  $\theta_k$ . Суммирование в формулах (29.13) производится по всем возможным дискретным значениям параметра  $\theta$  ( $k=1, \dots, K$ ). Если неизвестный параметр  $\theta$  может принимать непрерывную совокупность значений, то вместо вероятностей  $P[m(\theta_k)]$  нужно ввести плотность вероятности  $p[m(\theta)]$  и в формулах (29.13) заменить суммы на интегралы. Тогда получим

$$P(f) = \int p[m(\theta)] P_{m(\theta)}(f) d\theta + P(0) P_o(f), \quad (29.14)$$

где  $p[m(\theta)]d\theta$  есть вероятность того, что полезный сигнал есть и имеет параметр  $\theta$  в интервале  $(\theta, \theta + d\theta)$ , а интегрирование производится по всем возможным значениям  $\theta$ .

Условие нормировки можно записать в виде

$$P(m) + P(0) = 1, \quad (29.15)$$

где

$$P(m) = \int p[m(\theta)] d\theta. \quad (29.16)$$

Величина  $P(m)$  есть вероятность появления полезного сигнала. Плотность вероятности  $p[m(\theta)]$  можно также представить в виде

$$p[m(\theta)] = P(m) p_m(\theta), \quad (29.17)$$

где  $p_m(\theta)d\theta$  есть условная вероятность того, что полезный сигнал  $m$  имеет параметр  $\theta$  в интервале  $(\theta, \theta + d\theta)$  при условии, что он присутствует. Плотность условной вероятности  $p_m(\theta)$  удовлетворяет соотношению

$$\int p_m(\theta) d\theta = 1. \quad (29.18)$$

Апостериорная вероятность наличия полезного сигнала с параметром  $\theta_k$  равна

$$P_f[m(\theta_k)] = \frac{P[m(\theta_k)] P_{m(\theta_k)}(f)}{P(f)}. \quad (29.19)$$

Ввиду того, что неизвестный параметр  $\theta_k$  нас не интересует, мы образуем апостериорную вероятность наличия полезного сигнала

$$P_f(m) = \sum_{k=1}^K P_f[m(\theta_k)] = \frac{\sum_{k=1}^K P[m(\theta_k)] P_{m(\theta_k)}(f)}{\sum_{k=1}^K P[m(\theta_k)] P_{m(\theta_k)}(f) + P(0) P_0(f)}. \quad (29.20)$$

Если параметр  $\theta$  принимает непрерывную совокупность значений, то последняя формула приобретает вид

$$P_f(m) = \frac{P(m) \int p_m(\theta) P_{m(\theta)}(f) d\theta}{P(m) \int p_m(\theta) P_{m(\theta)}(f) d\theta + P(0) P_0(f)} \quad (29.21)$$

или

$$P_f(m) = \frac{\Lambda}{\Lambda + \frac{P(0)}{P(m)}}, \quad (29.22)$$

причем  $\Lambda$  есть коэффициент правдоподобия, равный

$$\Lambda = \int \Lambda(\theta) d\theta, \quad (29.23)$$

где

$$\Lambda(\theta) = p_m(\theta) \frac{P_{m(\theta)}(f)}{P_0(f)}. \quad (29.24)$$

В формулах (29.22) — (29.24) мы различаем величину  $\Lambda(\theta)$  и коэффициент правдоподобия  $\Lambda$  получаемый в результате интегрирования (или суммирования)  $\Lambda(\theta)$  по всем возможным значениям  $\theta$ . Если мы имеем несколько неизвестных параметров  $\theta_1, \theta_2, \dots$ , то в предыдущих формулах интегралы по  $\theta$  нужно заменить кратными интегралами.

С помощью коэффициента правдоподобия  $\Lambda$  мы записали апостериорную вероятность при сложном обнаружении в таком же виде, что и при простом [ср. формулы (29.09) и (29.22)], однако сам коэффициент  $\Lambda$  теперь вычисляется по более сложной формуле (29.23).

Следует также иметь в виду, что вероятности  $P_m(f)$  и  $P_0(f)$  обычно равны нулю, а при вычислении коэффициентов правдоподобия  $\Lambda$  и  $\Lambda(\theta)$  нужно раскрывать неопределенности следующим образом:

$$\Lambda = \frac{P_m(f)}{P_0(f)} = \frac{p_m(f)df}{p_0(f)df} = \frac{p_m(f)}{p_0(f)}; \quad \Lambda(\theta) = p_m(\theta) \frac{P_{m(\theta)}(f)}{P_0(f)} \quad (29.25)$$

т. е. брать вместо равных нулю вероятностей  $P_m(f)$ ,  $P_{m(\theta)}(f)$  и  $P_0(f)$  соответствующие плотности вероятностей  $p_m(f)$ ,  $p_{m(\theta)}(f)$  и  $p_0(f)$ .

3. *Простое измерение* — сигнал с неизвестным параметром, который измеряется. Считая, что параметр  $\tau$  меняется непрерывно, мы можем записать вероятность появления функции  $f(t)$ , как и при сложном обнаружении, в виде

$$\left. \begin{aligned} P(f) &= \int p[m(\tau)] P_{m(\tau)}(f) d\tau + P(0) P_0(f) = \\ &= P(m) \int p_m(\tau) P_{m(\tau)}(f) d\tau + P(0) P_0(f) \\ \int p[m(\tau)] d\tau + P(0) &= P(m) + P(0) = 1, \\ p[m(\tau)] &= P(m) p_m(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (29.26)$$

где  $P(m)$ ,  $P(0)$ ,  $p[m(\tau)]$  и  $p_m(\tau)$  имеют тот же смысл, что и аналогичные выражения при сложном обнаружении.

При измерении нас интересует вопрос о том, присутствует ли во входном сигнале  $f$  полезный сигнал  $m$  или нет, а если присутствует, то что можно сказать об его неизвестном параметре  $\tau$ . В результате приема мы находим плотность апостериорной вероятности для всех возможных значений измеряемого параметра

$$p_f[m(\tau)] = \frac{p[m(\tau)] P_{m(\tau)}(f)}{P(f)}. \quad (29.27)$$

С учетом формул (29.26) мы получаем следующее выражение для апостериорной плотности вероятности

$$p_f[m(\tau)] = \frac{\Lambda(\tau)}{\Lambda + \frac{P(0)}{P(m)}}, \quad (29.28)$$

являющейся функцией  $\tau$  причем

$$\Lambda(\tau) = p_m(\tau) \frac{P_{m(\tau)}(f)}{P_0(f)} \quad (29.29)$$

и

$$\Lambda = \int \Lambda(\tau) d\tau. \quad (29.30)$$

4. *Сложное измерение* — сигнал с неизвестными параметрами  $\tau$  и  $\theta$ , из которых параметр  $\tau$  измеряется, а параметр  $\theta$  не измеряется; возможные значения  $\tau$  и  $\theta$  образуют непрерывную совокупность. Вероятность появления функции  $f(t)$  в этом случае равна

$$\left. \begin{aligned} P(f) &= \iint p[m(\tau, \theta)] P_{m(\tau, \theta)}(f) d\tau d\theta + P(0) P_0(f) = \\ &= P(m) \iint p_m(\tau, \theta) P_{m(\tau, \theta)}(f) d\tau d\theta + P(0) P_0(f), \\ P(m) + P(0) &= 1, \\ p[m(\tau, \theta)] &= P(m) p_m(\tau, \theta), \quad \iint p_m(\tau, \theta) d\tau d\theta = 1, \end{aligned} \right\} \quad (29.31)$$

причем обозначения понятны из предыдущего.

Так как нас интересует параметр  $\tau$  и не интересует параметр  $\theta$ , мы должны образовать плотность апостериорной вероятности для параметра  $\tau$

$$p_f[m(\tau)] = \int p_f[m(\tau, \theta)] d\theta = \frac{\int p[m(\tau, \theta)] P_{m(\tau, \theta)}(f) d\theta}{P(f)}, \quad (29.32)$$

произведя интегрирование по всем возможным значениям параметра  $\theta$ . Иначе можно написать

$$p_f[m(\tau)] = \frac{\Lambda(\tau)}{\Lambda + \frac{P(0)}{P(m)}}, \quad (29.33)$$

где обозначено

$$\Lambda(\tau) = \int \Lambda(\tau, \theta) d\theta, \quad (29.34)$$

$$\Lambda = \iint \Lambda(\tau, \theta) d\tau d\theta, \quad (29.35)$$

$$\Lambda(\tau, \theta) = p_m(\tau, \theta) \frac{P_{m(\tau, \theta)}(f)}{P_0(f)}. \quad (29.36)$$

В данной задаче, таким образом, приходится различать три величины:  $\Lambda$ ,  $\Lambda(\tau)$  и  $\Lambda(\tau, \theta)$ , причем  $\Lambda(\tau, \theta)$  есть коэффициент правдоподобия при измерении параметров  $\tau$  и  $\theta$ ;  $\Lambda(\tau)$  — коэффициент правдоподобия при измерении одного параметра  $\tau$ , а  $\Lambda$  — коэффициент правдоподобия при сложном обнаружении сигнала  $m(t, \tau, \theta)$ .

Если параметры  $\tau$  и  $\theta$  независимы, то

$$p_m(\tau, \theta) = p_m(\tau) p_m(\theta) \quad (29.37)$$

и формула (29.34) несколько упрощается:

$$\Lambda(\tau) = p_m(\tau) \int p_m(\theta) \frac{P_{m(\tau, \theta)}(f)}{P_0(f)} d\theta. \quad (29.38)$$

Вышеприведенные формулы дают возможность найти вид оптимального приемника, если известны статистические свойства помехи  $n(t)$  и неизвестных параметров полезного сигнала  $m(t)$ . Прежде чем приступить к соответствующим вычислениям, мы в следующем параграфе рассмотрим вопрос об априорных вероятностях.

Заметим в заключение, что в литературе иногда коэффициенты правдоподобия  $\Lambda(\tau)$ ,  $\Lambda(\tau, \theta)$  и т. д. вводятся по формулам

$$\Lambda(\tau) = \frac{P_{m(\tau)}(f)}{P_0(f)}; \quad \Lambda(\tau, \theta) = \frac{P_{m(\tau, \theta)}(f)}{P_0(f)}, \quad (29.39)$$

не включающим априорных вероятностей  $p_m(\tau)$  и  $p_m(\tau, \theta)$ . В этом случае выписанные выше формулы имеют несколько иной вид.

### § 30. АПРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ. РЕШАЮЩИЕ СХЕМЫ

В статистической теории оптимальных приемников, основные понятия которой были рассмотрены в предыдущих параграфах, вопрос об априорных вероятностях полезного сигнала связан с определенными трудностями. Действительно, априорные вероятности нужны для вычисления апостериорных вероятностей, т. е. они необходимы для фактического осуществления оптимального приемника. Однако априорные вероятности часто неизвестны. Так, Вудворд пишет: «Рассмотрим, например, априорную вероятность обнаружения самолета некоторой радиолокационной установкой на расстоянии 16 км завтра в 9 ч утра. Если установка расположена на аэродроме с регулярным движением, статистический анализ прошлого может дать нам нужные вероятности в предположении, что движение самолетов представляет собой стационарный случайный процесс. Для большого класса задач, однако, мы не располагаем статистикой либо потому, что она не изучалась, либо вследствие более фундаментального обстоятельства: в прошлом не существовало совокупности сходных ситуаций, из которой можно было бы вывести определенное суждение».

Как мы показали в § 29, плотности априорных вероятностей  $p[m(\tau)]$ ,  $p[m(\theta)]$  и  $p[m(\tau, \theta)]$  можно представить в виде двух множителей

$$\left. \begin{aligned} p[m(\tau)] &= P(m) p_m(\tau), & p[m(\theta)] &= P(m) p_m(\theta), \\ p[m(\tau, \theta)] &= P(m) p_m(\tau, \theta). \end{aligned} \right\} (30.01)$$

Априорные вероятности  $P(m)$  и  $P(0) = 1 - P(m)$  являются соответственно вероятностями наличия и отсутствия полезного сигнала на входе приемника. Эти вероятности наиболее трудно оценить. Априорные вероятности  $p_m(\tau)$ ,  $p_m(\theta)$  и  $p_m(\tau, \theta)$  являются вероятностями распределения полезных сигналов по неизвестным параметрам при условии, что полезный сигнал присутствует на входе приемника. Эти распределения в ряде случаев можно более или менее уверенно найти из теоретических соображений. Так, например, случайную высокочастотную фазу при некогерентном приеме естественно предположить равномерно распределенной по окружности, амплитуду флюктуирующего сигнала — по закону Релея. Дальность и азимут цели можно в некоторой небольшой области воздушного пространства

предположить равномерно распределенными; при увеличении размеров области это предположение может стать уже несправедливым.

Учитывая выше приведенные рассуждения и предполагая, что закон распределения априорных вероятностей полезного сигнала по неизвестным параметрам  $\tau$  и  $\theta$  известен, мы можем вычислить введенные выше для различных случаев коэффициенты правдоподобия  $\Lambda$ ,  $\Lambda(0)$ ,  $\Lambda(\tau)$  и  $\Lambda(\tau, \theta)$ . Если далее образовать отношение апостериорных вероятностей присутствия и отсутствия полезного сигнала, то получим при обнаружении

$$\frac{P_f(m)}{P_f(0)} = \frac{P(m)}{P(0)} \Lambda, \quad (30.02)$$

а при измерении

$$\frac{P_f[m(\tau)]}{P_f(0)} = \frac{P(m)}{P(0)} \Lambda(\tau). \quad (30.03)$$

Эти формулы нетрудно вывести из выражений (29.09), (29.22), (29.28), (29.33) и соотношений

$$P_f(0) = 1 - P_f(m) = \frac{P(0)}{\Lambda + \frac{P(0)}{P(m)}}, \quad (30.04)$$

$$P_f(m) = \int P_f[m(\tau)] d\tau. \quad (30.05)$$

Формулы (30.02) и (30.03) показывают, что в отношениях апостериорных вероятностей от априорных вероятностей  $P(m)$  и  $P(0)$  зависит лишь постоянный множитель  $P(m)/P(0)$ , а принятая функция  $f(t)$  определяет коэффициенты правдоподобия  $\Lambda$  и  $\Lambda(\tau)$ .

Трудность, обусловленную незнанием отношения  $\frac{P(m)}{P(0)}$ , можно обойти, если изменить определение оптимального приемника и назвать оптимальным приемник, образующий коэффициенты правдоподобия (а не апостериорные вероятности). В таком случае оптимальные приемники по *опреде-*



лению должны выдавать следующие математические величины:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ при простом обнаружении } \Lambda, \\ 2) \text{ при сложном обнаружении } \Lambda = \int \Lambda(\theta) d\theta, \\ 3) \text{ при простом измерении } \Lambda(\tau), \\ 4) \text{ при сложном измерении } \Lambda(\tau) = \int \Lambda(\tau, \theta) d\theta. \end{array} \right\} (30.06)$$

На основании входных данных и образованных с их помощью величин (30.06) обычно приходится принимать решения. Если решать должен человек, например ответить «есть сигнал» или «нет сигнала», то оптимальный приемник лишь помогает человеку, оставляя за ним операцию решения. Надо сказать, что в своих решениях человек всегда использует (часто не осознавая этого явно) априорные знания о вероятности появления сигнала: в частности, если априорная вероятность появления сигнала достаточно мала, то для ответа «есть сигнал» потребуется более сильное превышение сигнала над шумами, т. е. большее значение  $\Lambda$ .

Процесс решения нетрудно автоматизировать. Ограничиваясь задачей обнаружения (сложного или простого), мы должны учесть, что вероятность наличия полезного сигнала

$$P_f(m) = \frac{\Lambda}{\Lambda + \frac{P(0)}{P(m)}} \quad (30.07)$$

есть монотонная функция коэффициента правдоподобия  $\Lambda$ . Совершенно естественно считать, что сигнал  $m$  присутствует, если вероятность  $P_f(m)$  достаточно велика (т. е. достаточно близка к единице), и что полезного сигнала нет, если вероятность  $P_f(m)$  достаточно мала. Поэтому простейшее правило решения имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } P_f(m) \geq P_*, \text{ то сигнал есть,} \\ \text{если } P_f(m) < P_*, \text{ то сигнала нет,} \end{array} \right\} (30.08)$$

где  $P_*$  — некоторое „пороговое“ значение вероятности, скажем,  $P_* = 0,5$ ;  $P_* = 0,9$  или  $P_* = 0,99$ .

Более сложное правило:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } P_f(m) \geq P^*, \text{ то сигнал есть,} \\ \text{если } P^* > P_f(m) > P_*, \text{ то имеем неопределенность,} \\ \text{если } P_f(m) \leq P_*, \text{ то сигнала нет,} \end{array} \right\} (30.09)$$

с двумя порогами  $P^*$  и  $P_*$  использует апостериорные вероятности на выходе оптимального приемника более полно, но при этом иногда дает неопределенный ответ. Если сигнал  $f(t)$  принят, дальнейшая информация в приемник не поступает и на основании имеющихся сведений требуется принять какое-то определенное решение, то единственный выход заключается, очевидно, в применении правила (30.08) с одним порогом. Если же информация поступает в приемник постепенно, то на основании входных данных, накопившихся за фиксированный промежуток времени, можно принять и неопределенное решение, указывающее на необходимость продолжать наблюдение. В этом случае можно применить «двухпороговое» правило (30.09); в принципе можно было бы, вероятно, использовать и более сложные правила.

Рассмотрим более подробно правило (30.08). Коль скоро мы выберем одно из двух возможных решений, то мы всегда можем или принять правильное решение или ошибиться. Ошибки могут быть двух типов. Первый тип ошибки — принятие решения «да», когда на входе присутствует только помеха. Эта ошибка называется ложной тревогой, ее вероятность мы обозначим через  $F$ . Второй тип ошибки — принятие решения «нет», когда на входе присутствуют как помеха, так и полезный сигнал. Эта ошибка называется пропуском сигнала, вероятность этой ошибки мы будем обозначать через  $D_0$ . Вероятность ложной тревоги  $F$  является вероятностью принять помеху за сумму сигнал+помеха; вероятность пропуска  $D_0$  есть вероятностью принять сумму сигнал+помеха за чистую помеху.

Правильные решения также могут быть двух типов: правильное обнаружение и правильное необнаружение. Вероятность правильного обнаружения, которую мы обозначим через  $D$ , есть вероятность принять сумму сигнал+помеха за сигнал+помеха, а вероятность правильного необнаружения, которую мы обозначим через  $F_0$ , есть вероятность принять помеху за помеху. Очевидно, что  $F$ ,  $D_0$ ,  $D$  и  $F_0$  — условные вероятности:  $F_0$  и  $F$  — вероятности принять правильное или неправильное решение при условии, что полезного сигнала нет,  $D$  и  $D_0$  — такие же вероятности при условии, что полезный сигнал присутствует. Поэтому выполняются соотношения

$$D_0 = 1 - D; F_0 = 1 - F. \quad (30.10)$$

Полная вероятность принять правильное решение, очевидно, равна

$$W = P(m)D + P(0)F_0 = P(m)D + P(0)(1 - F), \quad (30.11)$$

где  $P(0)$  и  $P(m)$  суть априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала  $m$ .

При использовании правила (30.08) необходимо задать, помимо порога  $P_*$ , априорные вероятности  $P(0)$  и  $P(m)$ . Если последние неизвестны, то можно воспользоваться, как это было указано выше, коэффициентом правдоподобия, с помощью которого правило (30.08) переписывается в виде

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \Lambda \geq \Lambda_*, \text{ то сигнал есть,} \\ \text{если } \Lambda < \Lambda_*, \text{ то сигнала нет,} \end{array} \right\} \quad (30.12)$$

где

$$\Lambda_* = \frac{P(0)}{P(m)} \cdot \frac{P_*}{1 - P_*} \quad (30.13)$$

есть пороговое значение коэффициента правдоподобия. „Двухпороговое“ правило (30.09) примет такой вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \Lambda \geq \Lambda^*, \text{ то сигнал есть,} \\ \text{если } \Lambda^* > \Lambda > \Lambda_* \text{ — неопределенность,} \\ \text{если } \Lambda \leq \Lambda_*, \text{ то сигнала нет.} \end{array} \right\} \quad (30.14)$$

Согласно этим правилам нетрудно построить схемы, автоматически принимающие решения. Таким образом, „решающий“ оптимальный приемник должен образовывать коэффициент правдоподобия  $\Lambda$  и подавать его на вход решающей схемы (30.12) или (30.14). Заметим, что вместо  $\Lambda$  можно использовать любую монотонно возрастающую функцию  $\Lambda$  (например,  $\ln \Lambda$ ), что часто упрощает схему оптимального приемника. Порог  $\Lambda_*$  в формуле (30.12) обычно находят из требования, чтобы вероятность ложных тревог равнялась заданному значению (часто весьма малому, например,  $F = 10^{-3}$ ,  $F = 10^{-5}$  или  $F = 10^{-10}$ ).

Остановимся в заключение на терминологии, принятой в литературе.

Наблюдателем Неймана-Пирсона (Neumann-Pearson) называют наблюдателя, который на основании принятых данных принимает решения о наличии сигнала  $m(t)$  по правилу, которое обеспечивает мак-

симальную вероятность правильного обнаружения  $D$  при фиксированной вероятности ложной тревоги  $F$  за данный промежуток времени наблюдения  $T$ . В математической статистике доказывается, что наблюдатель Неймана-Пирсона принимает решения как раз по „одно-пороговому“ правилу (30.12), причем величина порога  $\Lambda_*$  определяется фиксированным значением  $F$ . Любое другое правило решения приводит к меньшим  $D$  (при заданных  $F$  и  $T$ ).

Идеальный наблюдатель Зигерта (Siebert) принимает решение, обеспечивающее максимальную вероятность  $W$  по формуле (30.11) при фиксированном времени наблюдения  $T$ . Решение принимается также по правилу (30.12), но величина порога выбирается равной

$$\Lambda_* = \frac{P(0)}{P(m)}.$$

Последовательный наблюдатель Вальда (Wald) производит анализ данных, непрерывно поступающих на вход приемника. Последовательный наблюдатель имеет возможность задержать решение до поступления новых данных; правило решения для него имеет вид (30.14). Однако математическая теория последовательного наблюдения отличается большей сложностью, и мы в дальнейшем будем исключительно применять схему решения (30.12) с одним порогом, интерпретируя ее в духе наблюдателя Неймана-Пирсона.

Более глубокий подход к статистической теории приема дает современная теория игр и статистических решений, использованная в теории оптимальных приемников Д. ван Метером и Д. Мидлтоном. Некоторые относящиеся сюда вопросы рассмотрены в приложении I.

### § 31. ПРОСТОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Согласно классификации § 29 простое обнаружение — это обнаружение полностью известного сигнала на фоне помех. В данной задаче полезный сигнал  $m(t)$  может либо отсутствовать, либо быть вполне определенной функцией времени.

Что касается помехи, то в теории оптимальных приемников мы будем считать, что она является стационарным случайным процессом нормального (гауссова) типа со средним значением, равным нулю

$$\overline{n(t)} = 0 \quad (31.01)$$

и произвольной функцией корреляции

$$R_n(\tau) = \overline{n(t)n(t-\tau)}, \quad (31.02)$$

которая полностью определяет статистические свойства помехи (см. гл. IX). Нормальный характер помехи позволяет сравнительно просто вычислять различные вероятности, связанные с помехой, поскольку мы опираемся на распределения Гаусса. Стационарность помехи не очень важна

в общих рассуждениях, однако лишь для стационарных помех удастся в большинстве задач довести исследование до выводов, которые могут быть эффективно использованы на практике.

Данные предположения о свойствах помехи позволяют охватить ряд помех, представляющих технический интерес, в частности собственные шумы приемника и радиолокационные помехи, обусловленные хаотическими отражениями (см. гл. IX и XI).

Начнем рассмотрение простого обнаружения со случая, когда входной процесс  $f(t)$  нам известен только в дискретные моменты времени

$$t_h = t_1 + (h - 1) \Delta t, \quad h = 1, 2, \dots, H. \quad (31.03)$$

Значения  $f(t_h)$  мы будем обозначать через  $f_h$  и называть выборками входного процесса или элементами входной последовательности. Аналогично вводим выборки полезного сигнала  $m(t)$  и помехи  $n(t)$  по формулам

$$m_h = m(t_h); \quad n_h = n(t_h). \quad (31.04)$$

Очевидно, что формула

$$f(t) = m(t) + n(t) \quad (31.05)$$

примет вид

$$f_h = m_h + n_h. \quad (31.06)$$

Итак, если за время наблюдения мы сделали  $H$  выборок, то корреляционная матрица помехи будет иметь элементы

$$R_{gh} = \overline{n_g n_h} = R_n(|g - h| \Delta t); \quad g, h = 1, 2, \dots, H. \quad (31.07)$$

Она обладает следующими особенностями: по главной диагонали стоят элементы  $R_n(0)$ , имеющие наибольшую абсолютную величину; элемент, стоящий на  $h$  столбцов левее или правее главной диагонали, равен  $R_n(h \Delta t)$ .

Обратная матрица  $Q_{gh}$  удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=1}^H R_{gj} Q_{jh} = \delta_{gh}, \quad (31.08)$$

где  $\delta_{gh}$  — символ Кронекера, равный 1 при  $g = h$  и 0 при  $g \neq h$ . Элементы этой матрицы определяются соотношением

$$Q_{gh} = \frac{\text{Ad}(R_{hg})}{\text{Det} \|R_{gh}\|}; \quad (31.09)$$

где  $\text{Det} \|R_{gh}\|$  есть детерминант, соответствующий корреляционной матрице,  $\text{Ad}(R_{gh})$  — адьюнкта (алгебраическое дополнение) элемента  $R_{gh}$ . Обратная матрица  $Q_{gh}$ , как и прямая матрица, симметрична

$$Q_{gh} = Q_{hg}; \quad R_{gh} = R_{hg}, \quad (31.10)$$

однако ее элементы в общем случае зависят от  $g$  и  $h$ , а не только от  $|g - h|$ .

Найдем коэффициент правдоподобия (29.10). Считая помеху  $n(t)$  нормальной, мы можем сразу написать многомерную плотность вероятности для выборок  $n_1, \dots, n_H$  в виде [см. формулу (59.13)]

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n_1, \dots, n_H) = \\ &= \frac{1}{V(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}\|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} n_g n_h \right\}. \end{aligned} \quad (31.11)$$

Это  $H$ -мерное распределение Гаусса.

Плотность вероятности величин  $f_1, \dots, f_H$  при отсутствии сигнала  $m$ , когда  $f_h = n_h$ , равна

$$p_0(f) = p(f) = \frac{1}{V(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}\|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} f_g f_h \right\}. \quad (31.12)$$

Плотность вероятности тех же величин при наличии сигнала, когда  $n_h = f_h - m_h$ , равна

$$\begin{aligned} p_m(f) &= p(f - m) = \\ &= \frac{1}{V(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}\|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} (f_g - m_g)(f_h - m_h) \right\}. \end{aligned} \quad (31.13)$$

Коэффициент правдоподобия, равный

$$\Lambda = \frac{p_m(f)}{p_0(f)} = \frac{p(f-m)}{p(f)}, \quad (31.14)$$

для гауссова распределения (31.11) принимает следующий вид

$$\Lambda = \exp \left\{ \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} f_g m_h - \frac{1}{2} \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} m_g m_h \right\}. \quad (31.15)$$

Если ввести обозначения

$$\varphi = \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} f_g m_h, \quad (31.16)$$

$$\mu = \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} m_g m_h, \quad \nu = \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} n_g m_h, \quad (31.17)$$

то коэффициент правдоподобия будет равен

$$\Lambda = e^{\varphi - \frac{1}{2} \mu}, \quad (31.18)$$

где от входной последовательности  $f_h$  зависит только величина  $\varphi$ , причем  $\Lambda$  есть монотонно возрастающая функция  $\varphi$ . Поэтому оптимальный приемник может образовывать не величину  $\Lambda$ , а более простую величину  $\varphi$ , и принимать решения на основании этой последней. Тогда оптимальное правило решения будет

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \varphi \geq \varphi_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } \varphi < \varphi_*, \text{ то считаем } f = n, \end{array} \right\} \quad (31.19)$$

где  $\varphi_*$  — порог решения.

Исследуем величину  $\varphi$  подробнее. Ее можно записать так

$$\varphi = \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} f_g m_h = \sum_{g=1}^H k_g f_g, \quad (31.20)$$

где коэффициенты  $k_g$  равны

$$k_g = \sum_{h=1}^H Q_{gh} m_h; \quad g = 1, 2, \dots, H. \quad (31.21)$$

Формула (31.20) показывает, что операция образования  $\varphi$  из  $\hat{f}$  является линейной, т. е. *оптимальный приемник простого обнаружения при нормальных помехах является линейным приемником*, причем коэффициенты  $K_g$  зависят как от формы сигнала (от выборок  $m_h$ ), так и от корреляционных свойств помехи (от элементов  $Q_{gh}$  обратной корреляционной матрицы).

Обычно известна функция корреляции, а следовательно, и корреляционная матрица помехи  $R_{gh}$ . Задача нахождения обратной матрицы  $Q_{gh}$  при большом числе элементов является довольно громоздкой. Поэтому для фактического вычисления коэффициентов  $k_g$  можно воспользоваться уравнениями

$$\sum_{g=1}^H R_{gh} k_g = m_h; \quad h=1, 2, \dots, H, \quad (31.22)$$

которые нетрудно получить из соотношений (31.21). Эти выражения совпадают с формулами (26.25) и (26.26), если в последних положить  $c=1$ . Таким образом, формулы (31.21) определяют оптимальный линейный фильтр, обнаруживающий последовательность известной формы на фоне случайной последовательности  $n_g$ , имеющей характер помехи. Оптимальный приемник обнаружения полностью известного сигнала на фоне *нормальных* помех состоит, как мы видим, из оптимального линейного фильтра, рассмотренного в первой части книги (§ 27), и решающей схемы, работающей по правилу (31.19). Этим самым мы установили связь между теорией оптимальных фильтров, изложенной в I части, и статистической теорией оптимальных приемников. В дальнейшем мы увидим, что эта связь не ограничивается данным случаем и имеет широкое значение.

В I части мы показали, что действие оптимального линейного фильтра для сигналов известной формы можно характеризовать отношением сигнал/помеха (по мощности) на выходе этого фильтра. Нетрудно видеть, что этот параметр, обозначенный ранее через  $\rho$ , согласно формулам (26.21), (26.22) и (26.23) равен

$$\rho = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\left(\sum_h k_h m_h\right)^2}{\sum_{g,h} k_g k_h R_{gh}} = \sum_g k_g m_g = \sum_{g,h} Q_{gh} m_g m_h = \mu, \quad (31.23)$$



и, в частности, для белого шума (некоррелированной помехи,  $R_{gh} = R_n(0) \delta_{gh}$ ) мы имеем

$$\mu = \frac{\sum_{h=1}^H m_h^2}{R_n(0)}, \quad R_n(0) = \overline{n_h^2}. \quad (31.24)$$

Формула (27.15) позволяет дать простое спектральное представление для параметра  $\mu$ , а именно

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega, \quad (31.25)$$

где  $S_n(\omega)$  есть спектральная интенсивность помех. Это выражение в случае белого шума принимает вид

$$\mu = \frac{E}{S_n}; \quad E = \Delta t \sum_{h=1}^H m_h^2, \quad (31.26)$$

где  $E$  есть полная энергия полезного сигнала, а  $S_n$  — спектральная интенсивность шума. Формулу (31.26) нетрудно получить из формулы (31.24), если воспользоваться соотношением

$$S_n = R_n(0) \Delta t, \quad (31.27)$$

вытекающим из общего выражения (27.02) для спектральной интенсивности, в котором нужно положить  $R_n(\tau) = 0$  при  $\tau \neq 0$ .

Полагая  $\Delta t \rightarrow 0$ , нетрудно в выписанных выше формулах перейти от последовательностей к непрерывным процессам. Мы не будем приводить здесь соответствующих выражений, поскольку они уже неоднократно нам встречались (см. § 16, 17, 26 и 27).

В теории линейных фильтров смысл параметра  $\mu$  оставался не вполне ясным. Очевидно, что качество обнаружения тем выше, чем больше  $\mu$ , однако только в статистической теории приема параметр  $\mu$  имеет четкий количественный смысл. В частности, параметр  $\mu$  можно связать с вероятностью правильного обнаружения.

Оптимальный приемник, осуществляющий обнаружение полностью известного сигнала, работает по правилу (31.19). Вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения определяются порогом  $\varphi_*$  и распределением плотности вероятности величины  $\varphi$ , которая, являясь линейной комбинацией нормальных случайных величин  $f_1, \dots, f_H$ , сама будет иметь нормальное распределение. Найдем параметры этого распределения.

Если мы принимаем одну помеху, то

$$\bar{\varphi} = \bar{v} = \sum_{g,h} Q_{gh} \bar{n}_g m_h = 0 \quad (31.28)$$

в силу формулы (31.01). Дисперсия случайной величины  $\varphi$  равна

$$\begin{aligned} \overline{\varphi^2} = \overline{v^2} &= \sum_{g,h} \sum_{i,l} Q_{gh} Q_{il} \overline{n_g n_l} m_h m_l = \sum_{g,h} \sum_{i,l} Q_{gh} Q_{il} R_{gi} m_h m_l = \\ &= \sum_{g,h} Q_{gh} m_g m_h = \mu. \end{aligned} \quad (31.29)$$

Если на входе мы имеем полезный сигнал и помеху, то

$$\bar{\varphi} = \sum_{g,h} Q_{gh} \bar{f}_g m_h = \sum_{g,h} Q_{gh} m_g m_h = \mu, \quad (31.30)$$

а дисперсия  $\varphi$  равна

$$\overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2} = \overline{v^2} = \mu. \quad (31.31)$$

Плотность вероятности величины  $\varphi$  при отсутствии полезного сигнала равна

$$p_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{\varphi^2}{2\mu}}, \quad (31.32)$$

а при его наличии

$$p_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\varphi-\mu)^2}{2\mu}}. \quad (31.33)$$

Вероятность ложной тревоги  $F$  равна вероятности превышения порога  $\varphi_*$  величиной  $\varphi$  при наличии одной помехи

$$F = \int_{\varphi_*}^{\infty} p_0(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{\varphi_*}{\sqrt{\mu}}. \quad (31.34)$$

На рис. 26 сплошной линией приведена зависимость нормированного порога  $z_*$  от вероятности ложной тревоги  $F$ . Вероятность правильного обнаружения  $D$  равна

$$D = \int_{\varphi_*}^{\infty} p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz; \quad y_* = z_* - \sqrt{\mu}. \quad (31.35)$$

Задавшись вероятностями  $F$  и  $D$ , можно найти необходимое отношение сигнал/помеха  $\mu$  по формуле

$$\mu = (z_* - y_*)^2 \quad \text{при } D \geq F, \quad (31.36)$$

где  $z_*$  и  $y_*$  определяются по формулам (31.34) и (31.35) соответственно. Исключая из (31.34) и (31.35) параметр  $z_*$ ,

получим функцию

$$D = D(F, \mu), \quad (31.37)$$

которую называют характеристикой оптимального приемника обнаружения (в данном случае — приемника простого обнаружения). Функция  $D(F, \mu)$  удовлетворяет следующим соотношениям

$$D(0, \mu) = 0; \quad D(1, \mu) = 1 \quad (31.38)$$

и

$$\left( \frac{\partial D}{\partial F} \right)_{\mu = \text{const}} = \Lambda_*. \quad (31.39)$$

Рис. 26. Зависимость порога от вероятности ложной тревоги:

сплошная кривая — для полностью известного сигнала, пунктирная кривая — для сигнала с неизвестной фазой.

Последнее соотношение выполняется для всех оптимальных приемников обнаружения и часто облегчает вычисление вероятности  $D$ . Соотношение (31.39) можно всего проще вывести, дифференцируя интегралы (31.34) и (31.35)

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_*} = -p_0(\varphi_*); \quad \frac{\partial D}{\partial \varphi_*} = -p_m(\varphi_*), \quad (31.40)$$

откуда

$$\left( \frac{\partial D}{\partial F} \right)_{\mu = \text{const}} = \frac{p_m(\varphi_*)}{p_0(\varphi_*)}. \quad (31.41)$$

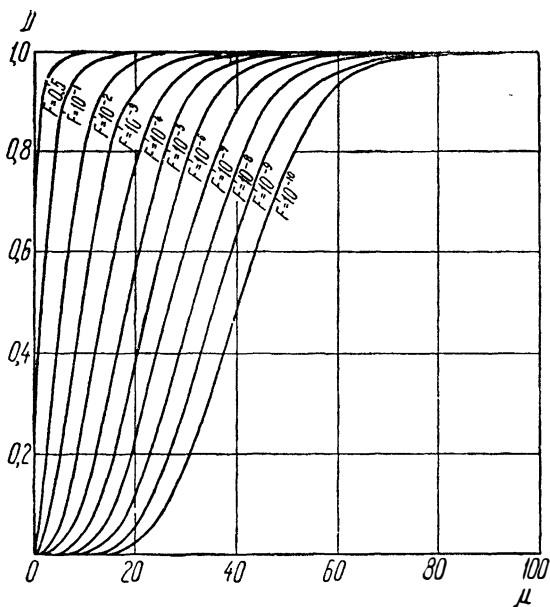


Рис. 27. Характеристики простого обнаружения.

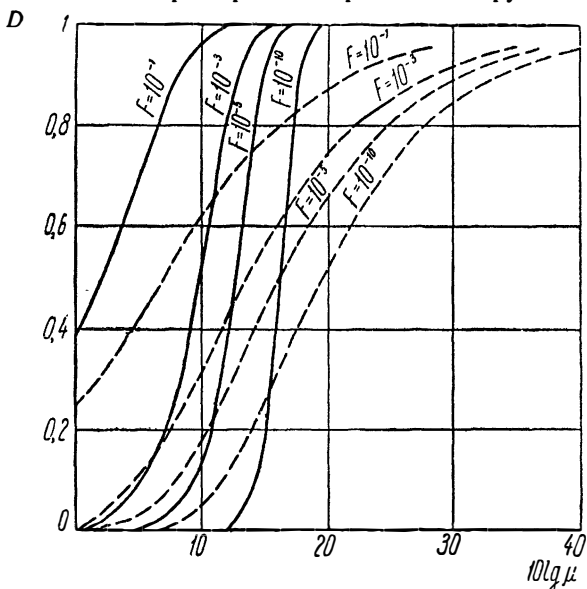


Рис. 28 Сравнение характеристик обнаружения полностью известного сигнала (сплошные кривые) и сигнала с неизвестной амплитудой (пунктир).

Учитывая, что коэффициент правдоподобия равен

$$\Lambda = \frac{P_m(\varphi)}{P_0(\varphi)} \quad (31.42)$$

мы и получаем соотношение (31.39). На рис. 27 приведена зависимость  $D$  от  $\mu$  при фиксированных значениях  $F$ , а на рис. 28 даны те же зависимости (сплошными линиями), но по оси абсцисс  $\mu$  отложено в децибелах.

Если величина  $\varphi$ , по которой мы принимаем решение (31.19) получена при помощи линейного, но не оптимального фильтра, то для достижения того же  $D$  при заданном  $F$  необходимо обеспечить бóльшие значения параметра  $\mu$ . В этом случае вероятность ложной тревоги может быть найдена по формуле

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\varphi_*}^{\infty} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{\varphi_*}{\sigma}, \quad (31.43)$$

где

$$\bar{v}^2 = \sigma^2 \quad (31.44)$$

есть дисперсия помехи на выходе данного линейного фильтра. Вероятность правильного обнаружения равна

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\varphi_*}^{\infty} e^{-\frac{(\varphi - \bar{\varphi})^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad y_* = z_* - \frac{\bar{\varphi}}{\sigma}, \quad (31.45)$$

где  $\bar{\varphi}$  есть среднее значение полезного сигнала на выходе, а

$$\sigma^2 = \overline{\varphi^2} - (\bar{\varphi})^2 = \bar{v}^2 \quad (31.46)$$

— его дисперсия.

### § 32. СЛОЖНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ АМПЛИТУДОЙ

В предыдущем параграфе было рассмотрено обнаружение сигнала, полностью известного. Обычно, однако, те или иные параметры сигнала неизвестны и оптимальный приемник приходится строить в соответствии с формулой (29.23), а окончательное решение принимать по правилу (30.12). В этом и последующих параграфах данной

главы мы рассмотрим наиболее элементарные случаи сложного обнаружения.

Пусть полезный сигнал известен с точностью до постоянного множителя  $G$ , который мы в дальнейшем будем называть амплитудой.

Запишем полезный сигнал в виде

$$m(t, G) = Gs(t), \quad (32.01)$$

где  $s(t)$  — известная функция времени. Рассмотрим, как и в случае простого обнаружения, дискретные выборки за время наблюдения. Обозначим  $h$ -ую выборку из полезного сигнала  $m(t, G)$  в момент  $t_h$  через

$$m_h = m(t_h) = Gs_h. \quad (32.02)$$

Коэффициент правдоподобия  $\Lambda(G)$  при нормальных помехах в силу формул (29.24) и (31.18) равен

$$\Lambda(G) = p_m(G) e^{\varphi(G) - \frac{1}{2} \mu(G)}, \quad (32.03)$$

где  $\varphi(G)$  и  $\mu(G)$  определяются выражениями (31.16) и (31.17), а  $p_m(G)$  есть плотность вероятности амплитуды  $G$ . Подставляя в эти выражения значения  $m_g$  по формуле (32.02), получим

$$\varphi(G) = G\varphi, \quad \mu(G) = G^2\mu, \quad (32.04)$$

где  $\varphi$  и  $\mu$  определяются формулами

$$\varphi = \varphi(1) = \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} f_g s_h, \quad \mu = \mu(1) = \sum_{g, h=1}^H Q_{gh} s_g s_h. \quad (32.05)$$

Усредненный коэффициент правдоподобия равен

$$\Lambda = \int \Lambda(G) dG = \int p_m(G) e^{G\varphi - \frac{1}{2} G^2\mu} dG. \quad (32.06)$$

Он и определит вид оптимального приемника. Поскольку в выражении (32.06) от принятого сигнала зависит только величина  $\varphi$ , причем  $\Lambda$  есть монотонно возрастающая функция  $\varphi$ , то решение о наличии или отсутствии полезного сигнала можно принимать по величине  $\varphi$ . Учитывая, что параметр  $G$  может принимать как положительные, так и

отрицательные значения, правило решения запишем в виде

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } |\varphi| \geq \varphi_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } |\varphi| < \varphi_*, \text{ то считаем } f = n. \end{array} \right\} \quad (32.07)$$

Найдем вероятность ложной тревоги  $F$  и вероятность правильного обнаружения  $D$  для случайной амплитуды, распределенной по нормальному закону\*, т. е. при

$$p_m(G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{G^2}{2}}, \quad (32.08)$$

где мы нормировали амплитуду  $G$  так, что

$$\bar{G} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{G^2} = 1. \quad (32.09)$$

Случайная величина  $\varphi$  при отсутствии полезного сигнала очевидно имеет распределение (31.32), а в присутствии полезного сигнала она также нормальна, причем при усреднении по помехе ( $G$  фиксировано) имеет моменты

$$\bar{\varphi} = G\mu, \quad \overline{(\varphi - G\mu)^2} = \mu, \quad (32.10)$$

и ее распределение определяется формулой

$$p_m(\varphi, G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\varphi - G\mu)^2}{2\mu}}. \quad (32.11)$$

Распределение  $\varphi$  при наличии полезного сигнала получается путем усреднения величины (32.11) по случайному параметру  $G$ , а именно

$$\begin{aligned} p_m(\varphi) &= \int p_m(G) p_m(\varphi, G) dG = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G^2}{2} - \frac{(\varphi - G\mu)^2}{2\mu}} dG = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu(1+\mu)}} e^{-\frac{\varphi^2}{2\mu(1+\mu)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu(1+\mu)}} e^{-\frac{\varphi^2}{2\mu(1+\mu)}}. \end{aligned} \quad (32.12)$$

\* Нормальный закон (32.08) сильно упрощает вычисление  $D$ , чем и оправдывается его применение в данном параграфе. В дальнейших параграфах мы будем считать, что случайная амплитуда  $G$  распределена по закону Релея (34.10) [см. впрочем формулу (49.10)].

Учитывая как положительные, так и отрицательные амплитуды полезного сигнала, выражение для полной вероятности правильного обнаружения можно записать так

$$D = 2 \int_{\varphi_*}^{\infty} p_m(\varphi) d\varphi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad y_* = \frac{\varphi_*}{\sqrt{\mu(1+\mu)}}, \quad (32.13)$$

а для вероятности ложной тревоги

$$F = 2 \int_{\varphi_*}^{\infty} p_0(\varphi) d\varphi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{\varphi_*}{\sqrt{\mu}}, \quad (32.14)$$

откуда при заданных  $F$  и  $D$  отношение сигнал/помеха  $\mu$  можно вычислить по формуле

$$\mu = \left( \frac{z_*}{y_*} \right)^2 - 1. \quad (32.15)$$

На рис. 28 пунктирными линиями приведены характеристики обнаружения для сигнала с неизвестной амплитудой, распределенной по нормальному закону. Сравнение кривых для полностью известного сигнала и сигнала с неизвестной амплитудой показывает, что достоверное обнаружение

$\left( D \geq \frac{1}{2} \right)$  достигается легче при известной амплитуде полезного сигнала, и наоборот недостоверное обнаружение  $\left( D \leq \frac{1}{2} \right)$  легче совершается при неизвестной амплитуде.

Этот результат совершенно понятен с физической точки зрения: при малых  $\mu$  благодаря своим флуктуациям амплитуда сигнала может стать в некоторых случаях большой, в силу чего произойдет правильное обнаружение — более успешное, чем при фиксированной амплитуде; при больших  $\mu$  благодаря флуктуации амплитуда сигнала может стать малой — и сигнал будет пропущен легче, чем при постоянной амплитуде. С аналогичными эффектами мы будем неоднократно встречаться в дальнейшем.

### § 33. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ФАЗОЙ

Рассмотрим обнаружение высокочастотного сигнала с неизвестной фазой  $\theta$ , считая амплитуду высокочастотного сигнала, как и все другие параметры, известной.



Запишем полезный сигнал в виде

$$m(t, \theta) = e(t) \cos [\omega_0 t - \psi(t) - \theta], \quad (33.01)$$

где  $e(t)$  — его огибающая,  $\omega_0$  — несущая частота,  $\psi(t)$  — дополнительная (медленно меняющаяся) фаза, обусловленная частотной или фазовой модуляцией. Выборки полезного сигнала будут равны

$$m_h(\theta) = e_h \cos (\omega_0 t_h - \psi_h - \theta), \quad (33.02)$$

и коэффициент правдоподобия  $\Lambda(\theta)$  можно записать в виде

$$\Lambda(\theta) = p_m(\theta) e^{\varphi(\theta) - \frac{1}{2} \mu(\theta)}, \quad (33.03)$$

где

$$\varphi(\theta) = \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} f_g m_h = \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} f_g e_h \cos (\omega_0 t_h - \psi_h - \theta), \quad (33.04)$$

$$\begin{aligned} \mu(\theta) = \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} m_g m_h = \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} e_g e_h \cos (\omega_0 t_g - \\ - \psi_g - \theta) \cos (\omega_0 t_h - \psi_h - \theta). \end{aligned} \quad (33.05)$$

Произведем некоторые преобразования. Величину  $\varphi$  представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \cos \theta \sum Q_{gh} f_g e_h \cos (\omega_0 t_h - \psi_h) + \\ &+ \sin \theta \sum Q_{gh} f_g e_h \sin (\omega_0 t_h - \psi_h) = \\ &= x \cos \theta + y \sin \theta = \mathcal{G} \cos (\Phi - \theta), \end{aligned} \quad (33.06)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} x &= \mathcal{G} \cos \Phi = \sum Q_{gh} f_g e_h \cos (\omega_0 t_h - \psi_h), \\ y &= \mathcal{G} \sin \Phi = \sum Q_{gh} f_g e_h \sin (\omega_0 t_h - \psi_h), \\ \mathcal{G} &= \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (33.07)$$

Величина  $\mu$  равна

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} \sum Q_{gh} e_g e_h \cos [\omega_0 (t_g - t_h) - (\psi_g - \psi_h)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum Q_{gh} e_g e_h \cos [\omega_0 (t_g + t_h) - (\psi_g + \psi_h) - 2\theta], \end{aligned} \quad (33.08)$$

причем второй суммой можно обычно пренебречь по сравнению с первой. Действительно, во второй сумме мы имеем быстро осциллирующие слагаемые, в значительной степени гасящие друг друга, в то время как в первой сумме, например, все члены с  $g=h$  положительны и при большом числе выборок дают результат, значительно превосходящий вторую сумму. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться выражением

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} e_g e_h \cos [\omega_0 (t_g - t_h) - (\psi_g - \psi_h)], \quad (33.09)$$

которое от неизвестной фазы  $\theta$  не зависит.

Найдем коэффициент правдоподобия  $\Lambda$ , считая, что неизвестная высокочастотная фаза  $\theta$  равномерно распределена по окружности

$$p_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{ при } 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (33.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int \Lambda(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\mathcal{G} \cos(\Phi - \theta) - \frac{1}{2} \mu} d\theta = \\ &= e^{-\frac{1}{2} \mu} I_0(\mathcal{G}), \end{aligned} \quad (33.11)$$

где  $I_0(\mathcal{G})$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, определяемая формулой

$$I_0(\mathcal{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\mathcal{G} \cos \chi} d\chi. \quad (33.12)$$

Функция  $I_0(\mathcal{G})$  является монотонно возрастающей функцией своего аргумента, поэтому решение удобно принимать по величине  $\mathcal{G}$ . Итак, оптимальное правило решения будет:

$$\left. \begin{aligned} \text{если } \mathcal{G} \geq \mathcal{G}_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } \mathcal{G} < \mathcal{G}_*, \text{ то считаем } f = n, \end{aligned} \right\} \quad (33.13)$$

где  $\mathcal{G}_*$  — порог решения.

Рассмотрим подробнее смысл величины  $\mathcal{G}$ . Формулы (33.07) показывают, что величина  $\mathcal{G}$  равна

$$\mathcal{G} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (33.14)$$

где  $x$  и  $y$  — величины, получающиеся на выходе двух квадратурных каналов; первый из этих каналов есть оптимальный линейный фильтр обнаружения полезного сигнала  $m(t, 0)$ , т. е. сигнала с фазой  $\theta=0$ , а второй — такой же фильтр для сигнала  $m\left(t, \frac{\pi}{2}\right)$  с фазой  $\theta=\frac{\pi}{2}$ .

Поэтому  $\mathcal{G}$  является огибающей на выходе оптимального линейного фильтра для полностью известного сигнала.

Как было показано в § 27, частотная характеристика фильтра, образующего величину (31.20), равна

$$K(\omega) = e^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (33.15)$$

где  $M(\omega)$  есть спектральная амплитуда сигнала  $m(t)$ . В данном случае частотные характеристики фильтров, образующих величины  $x$  и  $y$  в формулах (33.07), равны

$$\begin{aligned} K_x(\omega) &= e^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega, 0)}{S_n(\omega)}, \\ K_y(\omega) &= e^{-i\omega t_0} \frac{M^*\left(\omega, \frac{\pi}{2}\right)}{S_n(\omega)}, \end{aligned} \quad (33.16)$$

где  $M(\omega, \theta)$  есть спектральная амплитуда полезного сигнала (33.01), зависящего от неизвестной фазы  $\theta$ . В § 27 отмечалось, что при обнаружении полностью известного сигнала важна не вся функция на выходе фильтра (33.15), а лишь величина  $\varphi$  — ее значение в момент  $t_0$ . Подобно этому на выходе фильтров (33.16) получаются высокочастотные сигналы вида

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{G}(t) \cos[\omega_0 t - \Psi(t)], \\ y(t) &= \mathcal{G}(t) \sin[\omega_0 t - \Psi(t)], \end{aligned} \quad (33.17)$$

где  $\Psi(t)$  есть медленно меняющаяся фаза, а

$$\mathcal{G}(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (33.18)$$

— огибающая. При  $t=t_0$  мы получаем величины  $x$ ,  $y$  и  $\mathcal{G}$ , фигурирующие в формулах (33.07)

$$x = x(t_0), \quad y = y(t_0), \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(t_0). \quad (33.19)$$

Величину  $\mathcal{G}$  можно получить и с помощью одного высокочастотного фильтра, например фильтра с частотной характеристикой  $K_x(\omega)$  или  $K_y(\omega)$ , производя детектирование

одного из высокочастотных сигналов (33.17) на его выходе, что, как известно, равноценно вычислению  $\mathcal{G}(t)$  по формуле (33.18); затем необходимо взять  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t_0)$ . Таким образом, при неизвестной фазе полезного сигнала (33.01) оптимальный приемник обнаружения можно получить, соединив оптимальный линейный фильтр для выделения того же сигнала с любой фиксированной фазой и детектор; при этом существенно значение огибающей в определенный момент  $t_0$ .

Заметим, что вместо огибающей  $\mathcal{G}$  оптимальный приемник может образовывать любую монотонно возрастающую вместе с  $\mathcal{G}$  функцию, например  $\mathcal{G}^2$ , т. е. действовать как „линейный“ или же как квадратичный детектор. Здесь мы сталкиваемся с таким явлением: отношение сигнал/помеха на выходе линейного, квадратичного и других детекторов будут разные (см. § 18), но вероятности правильного обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги будут одинаковы вне зависимости от характеристики детектора и, следовательно, вне зависимости от последетекторного отношения сигнал/помеха, которое, в отличие от параметра  $\mu$ , никакого вероятностного смысла не имеет.

Вычислим вероятности ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$ . Они определяются порогом решения  $\mathcal{G}$  и распределениями величины  $\mathcal{G}$ . При отсутствии полезного сигнала величины  $x$  и  $y$  равны  $x_n$  и  $y_n$ , где

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} n_g e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h), \\ y_n &= \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} n_g e_h \sin(\omega_0 t_h - \psi_h), \end{aligned} \quad (33.20)$$

причем моменты нормальных случайных величин  $x_n$  и  $y_n$  равны

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &= \bar{y}_n = 0, \\ \overline{x_n y_n} &= \sum_{g,h} Q_{gh} e_g e_h \cos(\omega_0 t_g - \psi_g) \sin(\omega_0 t_h - \psi_h) = 0, \quad (33.21) \\ \overline{x_n^2} &= \overline{y_n^2} = \sum_{g,h} Q_{gh} e_g e_h \cos(\omega_0 t_g - \psi_g) \cos(\omega_0 t_h - \psi_h) = \mu. \end{aligned}$$

Как при переходе от формулы (33.08) к формуле (33.09), мы пренебрегаем здесь „осциллирующими“ суммами.

Найдем распределение величины

$$E_u = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \quad (33.22)$$

если  $x_n$  и  $y_n$  — нормальные величины с моментами

$$\overline{x_n} = \overline{y_n} = 0, \quad \overline{x_n y_n} = 0, \quad \overline{x_n^2} = \overline{y_n^2} = \sigma^2. \quad (33.23)$$

Такие величины будут образовываться на выходе квадратурных неоптимальных фильтров при отсутствии полезного сигнала; для оптимальных фильтров  $\sigma^2 = \mu$ , и мы возвращаемся к формулам (33.21).

В силу независимости нормальных случайных величин  $x_n$  и  $y_n$  их двумерная плотность вероятности равна

$$p(x_n, y_n) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_n^2 + y_n^2}{2\sigma^2}}, \quad (33.24)$$

т. е. равна произведению двух одномерных функций Гаусса. Переходя от декартовых координат  $x_n, y_n$  к полярным координатам  $E_n, \psi$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_n &= E_n \cos \psi, & y_n &= E_n \sin \psi, \\ dx_n dy_n &= E_n dE_n d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (33.25)$$

получим функцию распределения

$$p_0(E_n, \psi) = \frac{E_n}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{E_n^2}{2\sigma^2}}, \quad (33.26)$$

показывающую, что случайные величины  $E_n$  и  $\psi$  независимы. Распределение величины  $E_n$  определяется так называемым законом Релея

$$p_0(E_n) = \frac{E_n}{\sigma^2} e^{-\frac{E_n^2}{2\sigma^2}}. \quad (33.27)$$

Фаза  $\psi$  имеет равномерную плотность вероятности в интервале  $(0, 2\pi)$ . Учитывая выражение (33.27), найдем вероят-

ность ложной тревоги  $F$  как вероятность превышения величиной  $E_n$  порога решения  $\mathcal{G}_*$ .

$$F = \int_{\mathcal{G}_*}^{\infty} \frac{E_n}{\sigma^2} e^{-\frac{E_n^2}{2\sigma^2}} dE_n = \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{-\frac{z_*^2}{2}},$$

$$z_* = \frac{\mathcal{G}_*}{\sigma}. \quad (33.28)$$

Поэтому между нормированным порогом решения  $z_*$  и вероятностью  $F$  существует простая зависимость

$$z_* = \sqrt{-2 \ln F}. \quad (33.29)$$

Эта зависимость показана на рис. 26 пунктиром.

При наличии полезного сигнала величины  $x$  и  $y$  равны

$$x = x_m + x_n, \quad y = y_m + y_n, \quad (33.30)$$

где

$$x_m = \mu \cos \theta, \quad y_m = \mu \sin \theta. \quad (33.31)$$

В этом случае огибающая (33.14) распределена по так называемому закону Райса, который мы найдем при условии, что  $x_n$  и  $y_n$  по-прежнему нормальны и имеют моменты (33.23), а  $x_m$  и  $y_m$  равны

$$x_m = \bar{\varphi} \cos \theta, \quad y_m = \bar{\varphi} \sin \theta, \quad (33.32)$$

где при оптимальной линейной обработке по формуле (33.04) среднее значение  $\bar{\varphi} = \mu$ . Здесь приходится различать огибающую  $E_n$  и фазу  $\psi$ , относящиеся к помехе, и огибающую  $\mathcal{G}$  и фазу  $\chi = \Phi - \theta$ , относящиеся к суммарной величине сигнал+помеха. Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \sqrt{(x_m + x_n)^2 + (y_m + y_n)^2} = \\ &= \sqrt{(\bar{\varphi} \cos \theta + E_n \cos \psi)^2 + (\bar{\varphi} \sin \theta + E_n \sin \psi)^2}, \end{aligned} \quad (33.33)$$

или

$$\mathcal{G} = \sqrt{(\bar{\varphi})^2 + 2\bar{\varphi}E_n \cos \Psi + E_n^2}, \quad \Psi = \psi - \theta \quad (33.34)$$

и, следовательно, величина  $\mathcal{G}$  является функцией некоторой постоянной величины  $\bar{\varphi}$  и случайных величин  $E_n$  и  $\Psi$ .

Поэтому для нахождения функции распределения  $p_m(\mathcal{E})$  при наличии сигнала можно воспользоваться формулой

$$p_m(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{(\mathcal{E}, \mathcal{E}+d\mathcal{E})} E_n e^{-\frac{E_n^2}{2\sigma^2}} dE_n d\Psi, \quad (33.35)$$

где интегрирование производится в указанных пределах изменения величины (33.34). Перейдем от полярных координат  $E_n$  и  $\Psi$  к прямоугольным координатам

$$\xi = E_n \cos \Psi, \quad \eta = E_n \sin \Psi. \quad (33.36)$$

Тогда

$$p_m(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{(\mathcal{E}, \mathcal{E}+d\mathcal{E})} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2\sigma^2}} d\xi d\eta. \quad (33.37)$$

Затем перейдем к новым полярным координатам  $\mathcal{E}$  и  $\chi$  по формулам

$$\bar{\varphi} + \xi = \mathcal{E} \cos \chi, \quad \eta = \mathcal{E} \sin \chi. \quad (33.38)$$

В силу соотношения

$$E_n^2 = \xi^2 + \eta^2 = (\bar{\varphi})^2 - 2\bar{\varphi} \mathcal{E} \cos \chi + \mathcal{E}^2, \quad (33.39)$$

мы получаем

$$p_m(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E} d\mathcal{E}}{\sigma^2} e^{-\frac{(\bar{\varphi})^2 + \mathcal{E}^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{\bar{\varphi} \mathcal{E}}{\sigma^2} \cos \chi} d\chi \quad (33.40)$$

или окончательно

$$p_m(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{\sigma^2} e^{-\frac{(\bar{\varphi})^2 + \mathcal{E}^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\bar{\varphi} \mathcal{E}}{\sigma^2}\right). \quad (33.41)$$

Последнее выражение при отсутствии полезного сигнала ( $\bar{\varphi} = 0$ ) переходит в (33.27), а при наличии полезного сигнала, когда используется оптимальный линейный фильтр и  $\bar{\varphi} = \sigma^2 = \mu$ , упрощается следующим образом:

$$p_m(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{\mu} e^{-\frac{\mu^2 + \mathcal{E}^2}{2\mu}} I_0(\mathcal{E}). \quad (33.42)$$

Вероятность правильного обнаружения  $D$  в общем случае равна

$$D = \int_{\mathcal{E}_*}^{\infty} \frac{\mathcal{E}}{\sigma^2} e^{-\frac{(\bar{\varphi})^2 + \mathcal{E}^2}{2\sigma^2}} I_0(\mathcal{E}) d\mathcal{E}. \quad (33.43)$$

Переходя к безразмерным переменным

$$z = \frac{\mathcal{E}}{\sigma}, \quad \rho = \left(\frac{\bar{\varphi}}{\sigma}\right)^2 \quad (33.44)$$

и исходя из (33.41), получим \*

$$p_m(z) = z e^{-\frac{\rho+z^2}{2}} I_0(\sqrt{\rho}z), \quad (33.45)$$

причем имеет место тождество

$$\int_0^{\infty} p_m(z) dz = \int_0^{\infty} z e^{-\frac{\rho+z^2}{2}} I_0(\sqrt{\rho}z) dz = 1. \quad (33.46)$$

Вероятности  $F$  и  $D$  равны

$$\left. \begin{aligned} F &= e^{-\frac{z_*^2}{2}}, \quad z_* = \frac{\mathcal{E}_*}{\sigma}, \\ D &= \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{\rho+z^2}{2}} I_0(\sqrt{\rho}z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (33.47)$$

Для оптимального приемника, исходя из соотношений  $\sigma^2 = \rho = \mu$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} F &= e^{-\frac{z_*^2}{2}}, \quad z_* = \frac{\mathcal{E}_*}{\sqrt{\mu}}, \\ D &= \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{\mu+z^2}{2}} I_0(\sqrt{\mu}z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (33.48)$$

Таблицы интегралов (33.47) составлены С. А. Наволоцкой, однако этих таблиц недостаточно для расчета  $D$  при

\* При переходе от переменной  $\mathcal{E}$  к новой переменной  $z$  мы получаем новую функцию  $p_m(z)$ , связанную со старой функцией  $p_m(\mathcal{E})$  соотношением  $p_m(\mathcal{E})d\mathcal{E} = p_m(z)dz$ .



больших  $\rho$  или  $\mu$ . Этот недостаток восполняет асимптотическая формула

$$D = \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{\mu+z^2}{2}} I_0(\sqrt{\mu}z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad (33.49)$$

полученная В. И. Бунимовичем, в которой

$$y_* = z_* - \sqrt{\mu} - \eta \quad (33.50)$$

и

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} - \frac{z_* - \sqrt{\mu}}{(2\sqrt{\mu})^2} + \dots \quad (33.51)$$

Упрощенный вывод этой формулы дан в § 38. Заметим, что при  $\eta = 0$  она формально переходит в формулу (31.35) для простого обнаружения.

На рис. 29 графически представлены результаты расчетов  $D$  по таблицам (сплошные линии) и по формуле (33.49)

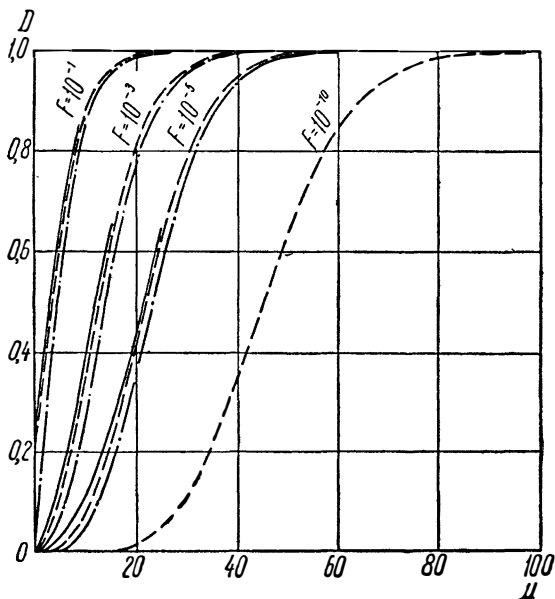


Рис. 29. Характеристики обнаружения сигнала с неизвестной фазой:

— по таблицам функции Райса; - - - - по формуле Бунимовича,  $\eta = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}$ ; - · - · - по той же формуле при  $\eta = 0$ .

с  $\eta = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}$  (пунктирные линии) и  $\eta = 0$  (штрихпунктирные линии). Мы видим, что применение первого члена асимптотического разложения (33.51) дает уже довольно точную аппроксимацию — более точную, чем при  $\eta = 0$ ; при  $\mu \rightarrow \infty$  обе приближенные формулы смыкаются с точной.

В § 18 мы показали, что после прохождения смеси помехи со слабым сигналом через детектор отношение сиг-

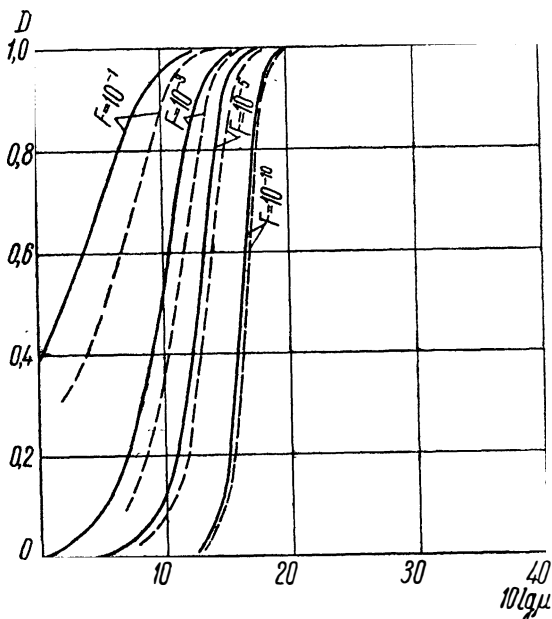


Рис. 30. Сравнение характеристик обнаружения полностью известного сигнала (сплошные кривые) и сигнала с неизвестной фазой (пунктир).

нал/помеха уменьшается, так что можно считать, что в результате детектирования, неизбежного при неизвестной фазе, должны уменьшаться возможности обнаружения сигнала. Это предположение подтверждается. На рис. 30 произведено сравнение простого обнаружения (сплошные линии) и обнаружения сигнала с неизвестной фазой (пунктирные линии). Рисунок показывает, что при заданных  $F$  и  $D$  для обнаружения сигнала с неизвестной фазой требуется несколько большее отношение сигнал/помеха. Однако в § 18 было так же показано, что при детектировании

смеси сигнала со слабой помехой отношение сигнал/помеха увеличивается. Это увеличение не связано с каким-то реальным выигрышем в обнаружении и лишь иллюстрирует слова Вудворда (см. § 28) о том, что отношение сигнал/шум имеет часто весьма косвенное отношение к фактической наблюдаемости полезных сигналов.

Однако в статистической теории приема естественно появился параметр  $\mu$ , который играет роль эффективного отношения сигнал/помеха и действительно характеризует вероятность обнаружения полезного сигнала на фоне нормальных помех. Он позволил, в частности, сравнить обнаружение полностью известного сигнала с сигналом, имеющим неизвестную амплитуду или фазу, и таким образом (благодаря своему единообразному определению во всех этих случаях) понять влияние неизвестных параметров на наблюдаемость сигнала.

#### § 34. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ФАЗОЙ И АМПЛИТУДОЙ

Во многих задачах неизвестными являются два параметра: высокочастотная фаза  $\theta$  и амплитуда (оглабающая) сигнала  $G$ . Например, радиолокационный сигнал, отраженный от цели, имеет неизвестную фазу и флюктуирует. Если время наблюдения мало по сравнению со временем флюктуации, то неизвестные параметры  $\theta$  и  $G$  можно считать постоянными.

Запишем полезный сигнал в виде

$$m(t, G, \theta) = Ge(t) \cos[\omega_0 t - \psi(t) - \theta], \quad (34.01)$$

тогда выборки полезного сигнала будут равны

$$m_h(G, \theta) = Ge_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \theta). \quad (34.02)$$

Коэффициент правдоподобия  $\Lambda(G, \theta)$  определится выражением

$$\Lambda(G, \theta) = p_m(G, \theta) e^{\varphi(G, \theta) - \frac{1}{2} \mu(G, \theta)}, \quad (34.03)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= G \sum Q_{gh} f_g e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \theta) = G \mathcal{G} \cos(\Phi - \theta), \\ \mathcal{G} \cos \Phi &= \sum Q_{gh} f_g e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h), \\ \mathcal{G} \sin \Phi &= \sum Q_{gh} f_g e_h \sin(\omega_0 t_h - \psi_h) \end{aligned} \right\} (34.04)$$

и

$$\mu(G, \theta) = \frac{G^2}{2} \sum Q_{gh} e_g e_h \cos[\omega_0(t_g - t_h) - (\psi_g - \psi_h)] = G^2 \mu, \quad (34.05)$$

где  $\mu$  определяется формулой (33.09).

Найдем коэффициент правдоподобия  $\Lambda(G)$ , считая, что фаза имеет равномерное распределение в пределах окружности

$$p_m(G, \theta) = p_m(G) \frac{1}{2\pi}. \quad (34.06)$$

Тогда

$$\Lambda(G) = \int_0^{2\pi} \Lambda(G, \theta) d\theta = p_m(G) e^{-\frac{G^2 \mu}{2}} I_0(G\mathcal{G}). \quad (34.07)$$

Коэффициент правдоподобия  $\Lambda$  равен

$$\Lambda = \int \Lambda(G) dG. \quad (34.08)$$

Формулы (34.07) и (34.08) показывают, что  $\Lambda$  есть монотонно возрастающая функция  $\mathcal{G}$ , поэтому решение о наличии или отсутствии полезного сигнала удобно принимать по величине  $\mathcal{G}$ . Таким образом, оптимальное правило решения будет такое же, как при неизвестной фазе и известной амплитуде:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \mathcal{G} \geq \mathcal{G}_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } \mathcal{G} < \mathcal{G}_*, \text{ то считаем } f = n, \end{array} \right\} \quad (34.09)$$

где  $\mathcal{G}_*$  — порог решения.

В дальнейшем нам понадобится величина  $\Lambda$  для случая, когда амплитуда распределена по закону Релея

$$p_m(G) = G e^{-\frac{G^2}{2}}, \quad (34.10)$$

где мы нормировали огибающую  $G \geq 0$  таким образом, что

$$\overline{G^2} = 2, \quad \overline{G} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (34.11)$$

Тогда

$$\Lambda = \int_0^{\infty} G e^{-\frac{(1+\mu)G^2}{2}} I_0(G\mathcal{G}) dG. \quad (34.12)$$

Вводя переменную

$$z = G\sqrt{1+\mu}, \quad (34.13)$$

преобразуем интеграл (34.12) к виду

$$\Lambda = \frac{1}{1+\mu} \int_0^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} I_0\left(\frac{\mathcal{E}z}{\sqrt{1+\mu}}\right) dz. \quad (34.14)$$

Умножив и разделив это выражение на  $e^{\frac{\mathcal{E}^2}{2(1+\mu)}}$ , получим

$$\Lambda = \frac{1}{1+\mu} e^{\frac{\mathcal{E}^2}{2(1+\mu)}} \int_0^{\infty} ze^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}^2}{1+\mu} + z^2\right)} I_0\left(\frac{\mathcal{E}z}{\sqrt{1+\mu}}\right) dz. \quad (34.15)$$

В последней формуле интеграл равен единице в силу тождества (33.46), и мы имеем:

$$\Lambda = \frac{1}{1+\mu} e^{\frac{\mathcal{E}^2}{2(1+\mu)}}. \quad (34.16)$$

Найдем  $F$  и  $D$ . При отсутствии полезного сигнала величина  $\mathcal{E}$  распределена по закону Релея, следовательно, вероятность ложной тревоги равна

$$F = e^{-\frac{z_*^2}{2}}, \quad z_* = \frac{\mathcal{E}_*}{\sqrt{\mu}}. \quad (34.17)$$

При наличии полезного сигнала и фиксированном  $G$  имеем:

$$\varphi = G\mu + \nu, \quad \bar{\varphi} = G\mu, \quad \bar{\nu}^2 = \mu, \quad (34.18)$$

и функция распределения величины  $\mathcal{E}$  при наличии сигнала с амплитудой  $G$  равна

$$p_m(\mathcal{E}, G) = \frac{\mathcal{E}}{\mu} e^{-\frac{G^2\mu^2 + \mathcal{E}^2}{2\mu}} I_0(G\mathcal{E}). \quad (34.19)$$

Вероятность правильного обнаружения при фиксированном  $G$  равна

$$D(G) = \int_{\mathcal{E}_*}^{\infty} p_m(\mathcal{E}, G) d\mathcal{E} = \int_{z_*}^{\infty} ze^{-\frac{G^2\mu + z^2}{2}} I_0(G\sqrt{\mu}z) dz. \quad (34.20)$$

Полная вероятность правильного обнаружения выразится следующим образом:

$$D = \int p_m(G) D(G) dG = \int_0^{\infty} G e^{-\frac{G^2}{2}} dG \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{G^2\mu+z^2}{2}} \times \\ \times I_0(G\sqrt{\mu}z) dz = \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int_0^{\infty} G e^{-\frac{(1+\mu)G^2}{2}} I_0(G\sqrt{\mu}z) dG. \quad (34.21)$$

Вычисляя внутренний интеграл так же, как при переходе от формулы (34.12) к формуле (34.16), мы получим

$$D = \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{1+\mu} e^{\frac{\mu z^2}{2(1+\mu)}} dz = \frac{1}{1+\mu} \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2(1+\mu)}} dz = \\ = e^{-\frac{z_*^2}{2(1+\mu)}} = e^{-\frac{y_*^2}{2}}, \quad (34.22)$$

где

$$y_* = \frac{z_*}{\sqrt{1+\mu}}. \quad (34.23)$$

При заданных  $F$  и  $D$  величина  $\mu$  может быть рассчитана по формуле

$$\mu = \left(\frac{z_*}{y_*}\right)^2 - 1 = \frac{\ln F}{\ln D} - 1. \quad (34.24)$$

Таким образом, в данном случае вероятности  $F$  и  $D$  связаны соотношением

$$D = F^{\frac{1}{1+\mu}}, \quad (34.25)$$

простота которого объясняется тем, что, в силу взятых выше законов распределения огибающей и фазы полезного сигнала, на выходе квадратурных фильтров мы получаем нормальные случайные величины. Действительно, формулы (34.04) мы можем переписать в виде (33.07), причем в отсутствие сигнала мы имеем  $x = x_n$  и  $y = y_n$ , где  $x_n$  и  $y_n$  определяются формулами (33.20) и имеют моменты (33.21). При наличии полезного сигнала имеем

$$x = x_m + x_n, \quad y = y_m + y_n, \quad (34.26)$$

где случайные величины  $x_m$  и  $y_m$  равны

$$x_m = G\mu \cos \theta, \quad y_m = G\mu \sin \theta. \quad (34.27)$$

В силу формул (34.06) и (34.10)  $x_m$  и  $y_m$  являются нормальными случайными величинами с моментами

$$\bar{x} = \bar{y}_m = 0, \quad \bar{x}^2 = \bar{y}_m^2 = \mu^2, \quad \overline{x_m y_m} = 0, \quad (34.28)$$

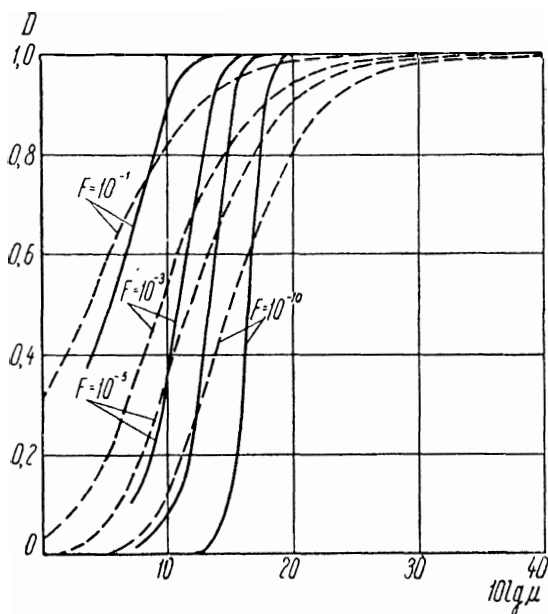


Рис. 31. Сравнение характеристик обнаружения сигнала с неизвестной фазой (сплошные кривые) и сигнала с неизвестными фазой и амплитудой (пунктир).

причем они не зависят от величин  $x_n$  и  $y_n$ . Поэтому суммарные величины (34.26) также нормальны и имеют моменты

$$\bar{x} = \bar{y} = 0, \quad \bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \mu^2 + \mu, \quad \overline{xy} = 0. \quad (34.29)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче появление сигнала не меняет закона распределения величины  $\xi$ , а лишь

заменяет параметр  $\mu$  в этом распределении на  $\mu(1 + \mu)$ . Поэтому из формулы (34.17)

$$F = e^{-\frac{\mathcal{E}_*^2}{2\mu}} \quad (34.30)$$

сразу вытекает формула (34.22)

$$D = e^{-\frac{\mathcal{E}_*^2}{2\mu(1+\mu)}}, \quad (34.31)$$

откуда и получаем соотношение (34.25). Формулу (34.31) нетрудно также получить из формул (31.41) и (34.16), что мы предоставляем сделать читателю; в порядке упражнения мы рекомендуем таким путем вычислить  $D$  и в других случаях, а также найти  $D$  и  $F$  при неоптимальной линейной обработке входных данных.

Отметим, что оптимальный приемник, обнаруживающий сигнал с неизвестной и известной амплитудой, должен производить над принятыми данными в обоих случаях одинаковые операции, однако вероятности правильного обнаружения будут сильно отличаться.

На рис. 31 пунктирными линиями показаны характеристики оптимального приемника обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и фазой, сплошными линиями — сигнала с неизвестной фазой и известной амплитудой. Мы видим опять (ср. конец § 33), что и при неизвестной фазе недостоверное обнаружение сигнала с неизвестной амплитудой происходит легче, а достоверное — труднее.

### § 35. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА (ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА) НА ФОНЕ ДРУГОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА (ПОМЕХИ) ПРИ ЗАДАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ОБОИХ ПРОЦЕССОВ

Задача об обнаружении случайного сигнала с заданной функцией корреляции на фоне случайных помех при переходе к выборкам сводится к задаче об обнаружении одной случайной последовательности на фоне другой случайной последовательности. Будем считать, что как полезный сигнал, так и помеха являются нормальными стационарными случайными процессами со средними значениями, равными нулю ( $\overline{m}_h = \overline{n}_h = 0$ ), и заданными корреляционными функциями  $R_{gh}^m = R_m(|g - h| \Delta t)$  для полезного сигнала и  $R_{gh}^n =$



$= R_n(|g - h| \Delta t)$  — для помехи. Тогда задача ставится следующим образом: на основании имеющейся последовательности  $f_1, \dots, f_H$  надо решить, является ли она смесью полезного сигнала и помехи ( $f_h = m_h + n_h$ ) или чистой помехой ( $f_h = n_h$ ).

По классификации § 28 это — сложное обнаружение полезного сигнала  $m$  с  $H$  неизвестными параметрами

$$m_1, \dots, m_H. \quad (35.01)$$

Коэффициент правдоподобия при фиксированных значениях  $m_1, \dots, m_H$  равен

$$\Lambda(m_1, \dots, m_H) = p_m(m_1, \dots, m_H) \frac{P_{m_1, \dots, m_H}(f)}{P_{0, \dots, 0}(f)}, \quad (35.02)$$

где  $p_m(m_1, \dots, m_H)$  есть плотность вероятности для величин (35.01). Чтобы найти коэффициент правдоподобия  $\Lambda$ , нужно проинтегрировать выражение (35.02) по неизвестным параметрам (35.01)

$$\Lambda = \underbrace{\int \dots \int}_H \Lambda(m_1, \dots, m_H) dm_1, \dots, dm_H. \quad (35.03)$$

Однако в данном случае можно найти  $\Lambda$  проще. Плотность вероятности величин  $f_1, \dots, f_H$  при условии, что входной сигнал сводится к одной помехе ( $f_h = n_h$ ) в силу формулы (31.11) равна

$$p_0(f) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}^n\|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh}^n f_g f_h \right\}, \quad (35.04)$$

где  $Q_{gh}^n$  — элементы матрицы, обратной корреляционной матрице  $\|R_{gh}^n\|$ , имеющей определитель  $\text{Det} \|R_{gh}^n\|$ .

Плотность вероятности величин  $f_1, \dots, f_H$  при условии, что входной сигнал состоит из полезного сигнала и помехи ( $f_h = m_h + n_h$ ), равна

$$p_m(f) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}^f\|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh}^f f_g f_h \right\}, \quad (35.05)$$

где  $R_{gh}^f$  есть корреляционная функция суммы  $f = m + n$ , а  $Q_{gh}^f$  — элементы матрицы, обратной  $\|R_{gh}^f\|$ . Если считать,

что полезный сигнал  $m$  и помеха  $n$  независимы ( $\overline{m_g n_h} = 0$ ),  
то

$$R_{gh}^f = R_{gh}^m + R_{gh}^n. \quad (35.06)$$

Коэффициент правдоподобия  $\Lambda$  для задачи об обнаружении равен

$$\Lambda = \frac{p_m(f)}{p_o(f)} = \sqrt{\frac{\text{Det} \| R_{gh}^n \|}{\text{Det} \| R_{gh}^f \|}} e^{\frac{S}{2}}, \quad (35.07)$$

где

$$S = \sum_{g,h=1}^H (Q_{gh}^n - Q_{gh}^f) f_g f_h = \sum_{g,h=1}^H K_{gh} f_g f_h \quad (35.08)$$

и

$$K_{gh} = Q_{gh}^n - Q_{gh}^f. \quad (35.09)$$

Решение можно принимать по величине  $S$  поскольку  $\Lambda$  есть монотонно возрастающая функция  $S$ . Формула (35.08) показывает, что оптимальный приемник обнаружения шумоподобного сигнала является нелинейным устройством, образующим квадратичную форму (35.08).

Оптимальное правило решения будет иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } S \geq S_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } S < S_*, \text{ то считаем } f = n, \end{array} \right\} \quad (35.10)$$

где  $S_*$  — порог решения.

Рассмотрим несколько частных случаев оптимального приемника.

1. Обнаружение некоррелированной последовательности на фоне другой некоррелированной последовательности. В этом случае элементы корреляционных матриц помехи и полезного сигнала удовлетворяют следующим соотношениям

$$R_{gh}^n = \overline{n^2} \delta_{gh}, \quad R_{gh}^m = \overline{m^2} \delta_{gh}, \quad (35.11)$$

где  $\delta_{gh}$  — символ Кронекера. Величина  $S$  равна

$$S = \frac{\overline{m^2}}{\overline{n^2}(\overline{m^2} + \overline{n^2})} \sum_{h=1}^H f_h^2. \quad (35.12)$$

В данном случае оптимальный приемник должен суммировать квадраты выборок входного сигнала. Пользуясь формулой (31.27), мы приходим к выражению

$$S = \frac{S_m}{S_n(S_m + S_n)} \Delta t \sum_{h=1}^H f_h^2. \quad (35.13)$$

2. Обнаружение коррелированной последовательности на фоне сильной некоррелированной последовательности. Корреляционные матрицы имеют следующий вид:

$$R_{gh}^n = \bar{n}^2 \delta_{gh}, \quad R_{gh}^f = \bar{n}^2 \delta_{gh} + R_{gh}^m = \bar{n}^2 \left( \delta_{gh} + \frac{R_{gh}^m}{\bar{n}^2} \right). \quad (35.14)$$

Считая  $\bar{n}^2 \gg \bar{m}^2$ , мы можем написать следующие приближенные выражения для элементов обратной матрицы

$$Q_{gh}^f = \frac{1}{\bar{n}^2} \left( \delta_{gh} - \frac{R_{gh}^m}{\bar{n}^2} \right), \quad (35.15)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{j=1}^H R_{gj}^f Q_{jh}^f = \delta_{gh} \quad (35.16)$$

с погрешностью порядка  $\left(\frac{\bar{m}^2}{\bar{n}^2}\right)^2$ . В этом приближении мы получаем выражение

$$S = \frac{1}{(\bar{n}^2)^2} \sum_{g,h=1}^H R_{gh}^m f_g f_h. \quad (35.17)$$

Если в нем положить  $R_{gh}^m = \bar{m}^2 \delta_{gh}$ , то получим формулу (35.12), в которой  $\bar{m}^2 + \bar{n}^2$  в знаменателе заменено на  $\bar{n}^2$ .

3. Обнаружение случайной последовательности на фоне сильно коррелированной (медленно меняющейся) последовательности. Корреляционные матрицы имеют вид

$$\overline{m_g m_h} = R_{gh}^m, \quad \overline{n_g n_h} = R_{gh}^n \approx R_n(0). \quad (35.18)$$

Тогда элементы обратной матрицы помехи  $Q_{gh}^n$  велики, и общую формулу (35.08) можно записать в виде

$$S = \sum_{g,h=1}^H Q_{gh}^n f_g f_h. \quad (35.19)$$

Зададим матрицу  $R_{gh}^n$  в виде

$$R_{gh}^n = R_n(0) r^{|g-h|} \quad (-1 < r < 1). \quad (35.20)$$

Элементы обратной матрицы будут равны

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}^n = Q_{HH}^n &= \frac{1}{R_n(0)} \cdot \frac{1}{1-r^2}, & Q_{gg}^n &= \frac{1}{R_n(0)} \cdot \frac{1+r^2}{1-r^2} \quad (1 < g < H), \\ Q_{g,g+1}^n = Q_{g+1,g}^n &= \frac{1}{R_n(0)} \cdot \frac{-r}{1-r^2} \quad (1 \leq g \leq H-1), \end{aligned} \right\} \quad (35.21)$$

остальные равны нулю.

Формулы (35.21) можно получить, вычисляя обратную матрицу по общему правилу [см. формулу (31.09)]. Всего легче они проверяются простой подстановкой в соотношения (31.08). Запишем элемент обратной матрицы (35.21) в общем виде

$$Q_{gh}^n = \frac{1}{R_n(0)(1-r^2)} \{ [1+r^2(1-\delta_{1h}-\delta_{Hh})] \delta_{gh} - r(\delta_{g,h-1} + \delta_{g,h+1}) \}. \quad (35.22)$$

При подстановке выражений (35.20) и (35.22) в формулу (31.08) имеем

$$\begin{aligned} \sum_j R_{gj}^n Q_{jh}^n &= \frac{1}{1-r^2} \sum_j r^{|g-j|} \{ [1+r^2(1-\delta_{1h}-\delta_{Hh})] \delta_{jh} - \\ &- r(\delta_{j,h-1} + \delta_{j,h+1}) \} = \frac{1}{1-r^2} \{ r^{|g-h|} [1+r^2(1-\delta_{1h}-\delta_{Hh})] - \\ &- r^{|g-h+1|+1} (1-\delta_{1h}) - r^{|g-h-1|+1} (1-\delta_{Hh}) \}, \end{aligned} \quad (35.23)$$

что при  $g > h$  и  $g < h$  дает нам

$$\sum_j R_{gj}^n Q_{jh}^n = 0, \quad (35.24)$$

а при  $g = h$

$$\sum_j R_{gj}^n Q_{jh}^n = \frac{1}{1-r^2} (1-r^2) = 1. \quad (35.25)$$

Заметим, что обратная матрица (35.21), как и прямая (35.20), является симметричной, но ее элементы зависят от

$g$  и  $h$ , а не от  $|g - h|$ , как элементы прямой матрицы. Впрочем, выражения

$$\left. \begin{aligned} Q_{gh}^n &= Q_n(|g - h| \Delta t), \\ Q(0) &= \frac{1}{R_n(0)} \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad Q_n(\Delta t) = -\frac{1}{R_n(0)} \frac{r}{1-r^2}, \\ Q_n(2\Delta t) &= Q_n(3\Delta t) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (35.26)$$

дают неправильный результат только при  $g = h = 1$  и  $g = h = H$ . Это значит, что зависимость элементов обратной матрицы  $Q_{gh}$  от индексов  $g$  и  $h$  в отдельности представляет собой „краевой эффект“, связанный с концами промежутка наблюдения.

Возвращаясь снова к формуле (35.19) и считая  $r \approx 1$ , получаем

$$S = \frac{1}{R_n(0)(1-r^2)} [(f_1 - f_2)^2 + (f_2 - f_3)^2 + \dots + (f_{H-1} - f_H)^2], \quad (35.27)$$

т. е. оптимальной обработкой является квадратичное накопление последовательных разностей.

Найдем вероятность ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$ . Будем считать, что не только число выборок  $H$  велико, но среди них велико и число статистически независимых выборок, поэтому естественно воспользоваться предельной теоремой теории вероятностей и считать, что величина (35.08) имеет нормальное распределение.

Среднее значение случайной величины  $S$  при отсутствии полезного сигнала равно

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{S} = \sum (Q_{gh}^n - Q_{gh}^f) \overline{n_g n_h} = \sum (Q_{gh}^n - Q_{gh}^f) R_{gh}^n = \\ &= H - \sum Q_{gh}^f R_{gh}^f + \sum Q_{gh}^f R_{gh}^m = \sum Q_{gh}^f R_{gh}^m. \end{aligned} \quad (35.28)$$

Среднее значение случайной величины  $S$  при наличии на входе полезного сигнала равно

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{S} = \sum (Q_{gh}^n - Q_{gh}^f) R_{gh}^f = \sum Q_{gh}^n R_{gh}^n + \sum Q_{gh}^n R_{gh}^m - \\ &- \sum Q_{gh}^f R_{gh}^f = \sum Q_{gh}^n R_{gh}^m. \end{aligned} \quad (35.29)$$

Если воспользоваться формулой (58.11)

$$\overline{n_g n_h n_k n_l} = R_{gh}^n R_{kl}^n + R_{gk}^n R_{hl}^n + R_{gl}^n R_{hk}^n. \quad (35.30)$$

то дисперсия величины  $S$  при отсутствии полезного сигнала получается равной

$$b_0 = \overline{S^2} - a_0^2 = \sum_{g,h} \sum_{k,l} (Q_{gh}^n - Q_{gh}^f)(Q_{kl}^n - Q_{kl}^f) \overline{n_g n_h n_k n_l} - \sum_{g,h} \sum_{k,l} Q_{gh}^n R_{gh}^m Q_{kl}^n R_{kl}^m = 2 \sum (Q_{gh}^n - Q_{gh}^f)(Q_{kl}^n - Q_{kl}^f) R_{gk}^n R_{hl}^n = 2 \sum Q_{gh}^f Q_{kl}^f R_{gk}^m R_{hl}^m, \quad (35.31)$$

а при наличии полезного сигнала

$$b_1 = \overline{S^2} - a_1^2 = 2 \sum (Q_{gh}^n - Q_{gh}^f)(Q_{kl}^n - Q_{kl}^f) R_{gk}^f R_{hl}^f = 2 \sum Q_{gh}^n Q_{kl}^n R_{gk}^m R_{hl}^m. \quad (35.32)$$

При отсутствии полезного сигнала функция распределения случайной величины  $S$  равна

$$p_0(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_0}} e^{-\frac{(S-a_0)^2}{2b_0}}, \quad (35.33)$$

а при наличии полезного сигнала

$$p_1(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{-\frac{(S-a_1)^2}{2b_1}}. \quad (35.34)$$

Вероятность ложной тревоги равна

$$F = \int_{S_*}^{\infty} p_0(S) dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{S_* - a_0}{\sqrt{b_0}}, \quad (35.35)$$

а вероятность правильного обнаружения

$$D = \int_{S_*}^{\infty} p_1(S) dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad y_* = \frac{S_* - a_1}{\sqrt{b_1}}. \quad (35.36)$$

При расчетах по формулам (35.35) и (35.36) нужно иметь в виду, что нормальные распределения (35.33) и (35.34) при данном числе выборок  $H$  (которое предполагается достаточно большим и содержащим достаточно большое число практически независимых случайных величин  $m_h$  и  $n_h$ ) хорошо аппроксимирует точные функции распре-

деления вблизи центров распределения ( $S \approx a_0$ ,  $S \approx a_1$ ), а при увеличении  $(S - a_0)^2$  и  $(S - a_1)^2$  точность этих формул снижается. Поэтому при вычислении как малых  $F$  и  $D$ , так и  $F$  и  $D$ , близких к единице, формулы (35.35) и (35.36), как правило, дают довольно грубые результаты. Более точные расчеты можно производить, по крайней мере для некоррелированных последовательностей, с помощью распределения  $\chi^2$  (ср. § 38 и 45).

При слабом сигнале (точнее, при условии  $b_1 \approx b_0$ ) вместо прямых расчетов по формулам (35.35) и (35.36) можно воспользоваться характеристиками простого обнаружения, если определить  $\mu$  — эффективное значение отношения сигнал/помеха данной задачи — по формуле (31.36), т. е.

$$\mu = (z_* - y_*)^2 = \frac{(a_1 - a_0)^2}{b_0}, \quad (35.37)$$

причем это соотношение годится лишь при малых  $\mu$ .

Рассмотренная выше задача об обнаружении случайного сигнала на фоне мешающего случайного процесса приводит к «квадратичному» оптимальному приемнику (35.08). Поэтому данную задачу нельзя было решить в теории оптимальных линейных фильтров, в противоположность задаче об обнаружении сигнала фиксированной формы, которую мы по существу решили в I части и лишь уточнили в предыдущих параграфах.

В приложении III читатель найдет разбор некоторых парадоксов, возникающих в связи с задачами, рассмотренными в этой главе.

## Г Л А В А VI

### ОБНАРУЖЕНИЕ ПАЧКИ СИГНАЛОВ

#### § 36. КОГЕРЕНТНАЯ И НЕКОГЕРЕНТНАЯ ПАЧКИ СИГНАЛОВ. О КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХАХ В РАДИОЛОКАЦИИ

В данной главе мы исследуем обнаружение пачки сигналов. Этот вопрос представляет особый интерес для радиолокации, где на вход приемника от каждого объекта поступает обычно пачка сигналов (например, импульсов), определение которой будет дано ниже. Если необходимо обнаружить пачку сигналов, то можно, конечно, построить оптимальное устройство обнаружения для отдельных сигналов и принимать решения по каждому сигналу. Но более естественным и эффективным будет приемник, реагирующий на появление всей пачки; таким приемникам и будет посвящена данная глава.

При работе радиолокатора происходит периодическое излучение сигналов (например, импульсов). Под когерентной последовательностью излучаемых («зондирующих») сигналов мы будем понимать последовательность сигналов вида

$$m_x(t, \theta) = e_x(t) \cos[\omega_0 t - \psi_x(t) - \theta], \quad x=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (36.01)$$

где  $\omega_0$  — несущая частота;  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  — огибающая и (медленно меняющаяся) фаза  $x$ -го излучаемого сигнала;  $\theta$  — высокочастотная фаза, одинаковая для всех сигналов.

Под некогерентной последовательностью излучаемых сигналов мы будем понимать последовательность вида

$$m_x(t, \theta_x) = e_x(t) \cos[\omega_0 t - \psi_x(t) - \theta_x], \quad x=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (36.02)$$

где величины  $\omega_0$ ,  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  имеют тот же смысл, что и для когерентной последовательности. а  $\theta_x$  — фаза  $x$ -го сиг-



нала, причем все  $\theta_x$  мы считаем неизвестными и независимыми случайными величинами.

В дальнейшем мы будем для простоты считать, что излучаются одинаковые, периодически повторяющиеся сигналы, т. е. будем полагать

$$e_x(t) = e [t - (x - 1)T], \quad \psi_x(t) = \psi [t - (x - 1)T], \quad (36.03)$$

где  $T$  — период повторения.

Заметим, что обычно под когерентной последовательностью сигналов понимают последовательность, которая наряду с условиями (36.01) и (36.03) удовлетворяет еще дополнительному условию

$$\omega_0 T = 2\pi N, \quad (36.04)$$

где  $N$  — целое число (обычно большое). Благодаря этому условию каждый излучаемый сигнал имеет одну и ту же начальную фазу. Можно также считать, что условие (36.04) не выполняется, но в формуле (36.01) вместо  $\omega_0 t$  стоит  $\omega_0 [t - (x - 1)T]$ , т. е. высокочастотная фаза подчинена условию типа (36.03).

Пачки сигналов на входе приемника образуются так. Пусть сначала отражающий объект неподвижен. Благодаря качанию луча передающей антенны на данный объект при каждом обзоре пространства попадает сравнительно небольшое число сигналов, причем число сигналов  $L$  зависит от диаграммы направленности передающей антенны (ширины луча) и скорости качания. Эти  $L$  сигналов отражаются от объекта и попадают на приемную антенну, в результате чего и получается пачка сигналов на входе приемника. Если отражающее тело движется, то при отражении сигнала производится его дополнительная модуляция, причем движение цели как единого целого производит смещение частоты вследствие эффекта Допплера (см. § 68).

При эффекте Допплера частота  $\omega$  преобразуется в частоту

$$\omega' = \omega - \zeta, \quad \zeta = \frac{2v_r}{c} \omega, \quad (36.05)$$

где  $v_r$  — радиальная компонента скорости отражающего тела\*,  $c$  — скорость света. Формула (36.05) применима для

---

\* Если приемная и передающая антенны разнесены, то под  $v_r$  нужно понимать компоненту скорости в направлении биссектрисы угла  $AOB$  (см. рис. 61 в § 70).

нерелятивистских скоростей, т. е. при малых отношениях  $\frac{v_r}{c}$ . Если зондирующий сигнал является достаточно узкополосным, то в выражении для  $\zeta$  можно заменить  $\omega$  на несущую частоту  $\omega_0$ . Тогда можно считать, что спектр сигнала при отражении не изменяет своей формы, а смещается как целое на величину  $\zeta$ , зависящую от скорости тела и несущей частоты\*.

Когерентную пачку сигналов можно при этом условии записать в виде

$$m_x(t, \theta) = e_x(t) \cos [(\omega_0 - \zeta) t - \psi_x(t) - \theta], \quad x = 1, \dots, L, \quad (36.06)$$

некогерентную — в виде

$$m_x(t, \theta_x) = e_x(t) \cos [\omega_0 t - \psi_x(t) - \theta_x], \quad x = 1, \dots, L, \quad (36.07)$$

где  $\zeta = \frac{2v_r}{c} \omega_0$  есть смещение несущей частоты отраженного сигнала,  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  — огибающая и фаза  $x$ -го отраженного сигнала, определяемые излученным сигналом, расстоянием до объекта и его отражающими свойствами. Заметим, что в формулах (36.06) и (36.07) функции  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  и постоянные  $\theta$  и  $\theta_x$  несколько отличаются от аналогичных величин в формулах (36.01) и (36.02) для излучаемых сигналов, однако для дальнейшего важны лишь формулы (36.06) и (36.07), в которых для данного объекта на данном расстоянии функции  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  можно считать известными.

Идеализируя свойства реальных антенн, мы предположим, что в пределах „главного луча“ антенны ее диаграмма направленности постоянна, а вне главного луча излучение и прием не производятся. Благодаря этому предположению из условий (36.03) для передаваемых сигналов вытекают аналогичные условия для функций  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  в формулах (36.06) и (36.07) для принимаемой пачки из  $L$  сигналов. Если этого предположения не делать, то анализ сильно усложняется.

Заметим, что на практике обычно говорят не о когерентной или некогерентной последовательности излучен-

---

\* В приложении IV выведены точные формулы и показано, что вследствие явления Допплера изменяется не только несущая частота, но также огибающая  $e_x(t)$  и дополнительная фаза  $\psi_x(t)$  каждого сигнала. В дальнейшем мы ограничимся случаями, когда изменением  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  можно пренебречь.

ных сигналов, а о когерентной или некогерентной технике приема. При когерентном приеме не обязательно требовать когерентности излучаемых высокочастотных сигналов [одинаковой фазы  $\theta$ , как в формуле (36.01)], достаточно, чтобы было известно изменение фазы от сигнала к сигналу. Тогда, учитывая это изменение при обработке принятых данных (ср. стр. 137), мы получаем практически те же результаты, как если бы излучалась последовательность (36.01), а прием производился по упрощенной схеме, без «подправления» фаз (теперь излишнего). Поэтому в дальнейшем мы будем употреблять термины «когерентный прием пачки сигналов» и «прием (или обнаружение) когерентной пачки» как равноценные.

Аналогичным образом мы будем говорить о приемнике, обнаруживающем некогерентную пачку сигналов (36.02), понимая под этим некогерентный приемник, не использующий фаз  $\theta_x$  зондирующих сигналов.

Кроме закономерных изменений  $m_x(t, \theta)$  и  $m_x(t, \theta_x)$  во времени, обусловленных движением цели как целого, огибающая и фаза отраженного сигнала испытывают случайные колебания во времени. Эти колебания или, как их еще называют, «мерцания цели», появляются за счет небольших изменений ориентации отражающего тела. В этой главе мы исследуем обнаружение пачек (36.06) и (36.07), отложив рассмотрение «мерцающей цели» до следующей главы.

Нас будет интересовать обнаружение пачки сигналов на фоне собственных шумов приемника и хаотических отражений. Под хаотическими отражениями мы понимаем помехи, получающиеся в результате отражения электромагнитных волн от капель дождя, тумана, растительности, местных предметов и т. п. Подробное исследование сигнала, отраженного от хаотически расположенных частиц, произведено в гл. XI, где показано, что в теории оптимальных приемников помеху, обусловленную хаотическими отражениями, можно рассматривать как стационарный случайный процесс нормального (гауссова) типа; нормальный характер помехи объясняется тем, что она является суперпозицией большого числа независимых или почти независимых слагаемых, происходящих от отдельных рассеивающих частиц (или групп, составленных из частиц).

В гл. XI найдена функция корреляции помехи, вызванной хаотическими отражениями. При этом учтен тот факт,

что все отражатели движутся хаотически внутри облака, вызывая в отраженном сигнале эффект Допплера.

Для когерентной пачки узкополосных сигналов со спектром, симметричным относительно несущей частоты, автокорреляционная функция хаотических отражений равна

$$R_n(\tau) = R_m(\tau) r(\tau). \quad (36.08)$$

Функция  $R_m(\tau)$  — это просто автокорреляционная функция периодической последовательности излучаемых сигналов. Она является периодической функцией  $\tau$  с периодом повторения  $T$

$$R_m(\tau) = R_m(\tau \pm kT), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (36.09)$$

а  $r(\tau)$  — медленно меняющаяся функция удовлетворяющая условию

$$r(0) = 1. \quad (36.10)$$

Смысл формулы (36.08) прост. Предположим, что все рассеиватели в облаке неподвижны, тогда в течение первого периода повторения вследствие хаотического расположения частиц обусловленная ими помеха  $n(t)$  будет являться (ср. § 12) наложением сигналов стандартной формы, появляющихся в случайные моменты времени и воспроизводящих излучаемые сигналы. Поэтому автокорреляционная функция помехи  $R_n(\tau)$  будет равна (с точностью до постоянного множителя, который мы опускаем) автокорреляционной функции  $R_m(\tau)$  периодического излучаемого сигнала  $m(t)$ , причем как  $R_n(\tau)$ , так и  $R_m(\tau)$  будут периодическими функциями  $\tau$  (с периодом  $T$ ).

На самом деле частицы в облаке движутся. Если считать, что облако в целом неподвижно и лишь частицы хаотически перемещаются, то через промежуток времени  $T$  расположение частиц будет несколько иным (случайно изменившимся), благодаря чему функция корреляции  $R_n(\tau)$  медленно уменьшается при  $|\tau| \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство как раз и учитывается множителем  $r(\tau)$ .

Если излучается последовательность когерентных прямоугольных импульсов продолжительностью  $T_0 \ll T$ , то функция (36.08) дает периодическую последовательность треугольных „корреляционных радиоимпульсов“ (ср. § 20). Функцию  $r(\tau)$  обычно можно считать постоянной на протяжении отрезков времени порядка  $T_0$ , так что  $r(\tau)$  является

как бы между периодным коэффициентом корреляции, характеризующим статистическую связь между значениями  $n(t)$  в моменты  $t, t \pm T, t \pm 2T, \dots$

При облучении облака рассеивающих частиц некогерентной пачкой одинаковых сигналов автокорреляционная функция хаотических отражений равна

$$\left. \begin{aligned} R_n(\tau) &= R_m(\tau) \quad \text{при } -T_0 < \tau < T_0, \\ R_n(\tau) &= 0 \quad \text{при других } \tau, \end{aligned} \right\} \quad (36.11)$$

как это показано в § 67. Такая же корреляционная функция получится, если помеха, обусловленная хаотическими отражениями когерентных сигналов, так быстро изменяется во времени, что значения  $r(T), r(2T)$  и т. д. можно считать равными нулю. Однако в этих двух случаях статистические закономерности совершенно различны. Действительно, при отражении некогерентных сигналов от медленно движущихся рассеивателей амплитуды помехи в различных периодах повторения сильно коррелированы, а сама помеха уже не является нормальной; при отражении же когерентных сигналов от быстро движущихся рассеивателей мы получаем нормальную «шумоподобную» помеху, значения которой в разные периоды повторения независимы.

В развитой далее теории обнаружения некогерентной пачки предполагается, что помеха нормальна и не имеет между периодной корреляции, тем самым общий случай хаотических отражений из рассмотрения исключается, а учитываются только собственные шума приемника и, кроме того, «шумоподобные» помехи от хаотических отражений.

Если помеха представляет собой сумму помехи  $n_1(t)$  от хаотических отражений и собственных шумов приемника  $n_2(t)$

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t), \quad (36.12)$$

то вследствие независимости случайных процессов мы имеем:

$$R_n(\tau) = R_{n_1}(\tau) + R_{n_2}(\tau), \quad (36.13)$$

причем  $R_{n_1}(\tau)$  можно по-прежнему писать в виде (36.08), а  $R_{n_2}(t)$  есть функция, быстро спадающая к нулю при увеличении  $\tau$ ; если даже причиной  $n_2(t)$  является «чистый» белый шум, то при прохождении через линейные цепи он приобретает некоторую корреляцию во времени, но во вся-

ком случае он не обладает корреляцией между периодами повторения. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} R_n(\tau) &= R_m(\tau) + R_{n_2}(\tau) \quad \text{при } |\tau| < \frac{T}{2}, \\ R_n(\tau) &= \hat{R}_m(\tau) r_1(\tau) \quad \text{при } |\tau| > \frac{T}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (36.14)$$

По аналогии с формулой (36.08) можно представить функцию  $R_n(\tau)$  следующим образом

$$R_n(\tau) = R_p(\tau) r(\tau), \quad (36.15)$$

где функция

$$R_p(\tau) = R_m(\tau) + R_{n_2}(\tau) \quad \text{при } |\tau| < \frac{T}{2} \quad (36.16)$$

периодически продолжается по закону

$$R_p(\tau) = R_p(\tau \pm kT), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (36.17)$$

а функция  $r(\tau)$  определяется так:

$$\left. \begin{aligned} r(\tau) &= 1 \quad \text{при } |\tau| < \frac{T}{2}, \\ r(\tau) &= \frac{r_1(\tau)}{1 + \frac{R_{n_2}(\tau)}{R_m(\tau)}} = \frac{R_m(\tau)r_1(\tau)}{R_m(\tau) + R_{n_2}(\tau)} \quad \text{при } |\tau| > \frac{T}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (36.18)$$

Из последней формулы видно, что „подмешивание“ шума к хаотическим отражениям формально сказывается в том, что увеличивается интенсивность помех  $R_p(0) = R_m(0) + R_{n_2}(0)$  и уменьшается междупериодная корреляция, поскольку вместо  $r_1(\tau)$  появляется  $r(\tau) < r_1(\tau)$ . Поэтому полученные ниже результаты по обнаружению пачки сигналов на фоне хаотических отражений имеют более общее значение и применимы при наличии шумов.

Заметим, что „чистый“ шум можно формально рассматривать как помеху от хаотических отражений, имеющую коэффициент корреляции  $r(\tau) = 0$  при  $|\tau| > \frac{T}{2}$ . Однако, сводя с помощью формулы (36.18) смешанную помеху к одним хаотическим отражениям, можно при  $R_m \sim R_{n_2}$  получить резуль-

таты правильные только качественно, так как функция  $r(\tau)$  не будет уже медленно меняющейся, в частности, для импульсных сигналов она может заметно измениться за время порядка  $T_0$ .

### § 37. ОБНАРУЖЕНИЕ НЕКОГЕРЕНТНОЙ ПАЧКИ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ НОРМАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Этот параграф посвящен оптимальному обнаружению некогерентной пачки сигналов\* на фоне нормальной помехи, коррелированной самое большее в пределах периода повторения, но не коррелированной от периода к периоду. Как было указано в предыдущем параграфе, при такой постановке задачи мы учитываем лишь собственные шумы приемника, поскольку хаотические отражения удовлетворяют этим условиям только в весьма частном случае.

Пусть за время наблюдения мы делаем  $NL$  выборок, где  $N$  — число выборок в одном периоде повторения (выборки одинаковым образом расположены в каждом периоде), а  $L$  — число периодов.

Будем обозначать выборки в одном периоде индексами  $g$  и  $h$

$$g, h = 1, \dots, N; \quad (37.01)$$

выборки из разных периодов — индексами  $x$  и  $\lambda$

$$x, \lambda = 1, \dots, L. \quad (37.02)$$

Обозначим через  $m_{gx}$ ,  $n_{gx}$  и  $f_{gx}$   $g$ -ю выборку полезного сигнала, помехи и принятого сигнала в  $x$ -м периоде повторения. При этом мы считаем, что  $\overline{n_{gx}} = 0$ . Функцию корреляции помехи, коррелированной только в пределах периода повторения и некоррелированной от периода к периоду, можно записать в виде

$$\overline{n_{gx} n_{h\lambda}} = R_{gh} \delta_{x\lambda}. \quad (37.03)$$

В данном случае полезный сигнал зависит от  $L$  параметров  $\theta_1, \dots, \theta_L$ , причем фазы  $\theta_x$  независимы и равномерно распределены по окружности

$$p_m(\theta_x) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta_x < 2\pi. \quad (37.04)$$

---

\* Заметим еще раз, что под обнаружением некогерентной пачки мы понимаем обнаружение при применении некогерентной техники приема (см. § 36).

Выборку полезного сигнала с индексом  $h$  из  $x$ -го периода, учитывая периодичность функций  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$ , можно записать в виде

$$m_{hx}(\theta_x) = e_h \cos [(\omega_0 - \zeta) t_{hx} - \psi_h - \theta_x]. \quad (37.05)$$

Моменты  $t_{hx}$ , в которые делаются выборки, равны

$$t_{hx} = t_h + (x - 1)T, \quad t_h = t_1 + (h - 1)\Delta t, \quad (37.06)$$

причем в случае прямоугольных импульсов (длительность  $T_0$ )  $e_h \neq 0$  только при условии

$$0 < h\Delta t < T_0, \quad T_0 \ll T. \quad (37.07)$$

Предположим далее, что

$$\zeta T_0 \ll 1, \quad \zeta T \gg 1, \quad (37.08)$$

т. е. мы пренебрегаем изменением фазы вследствие эффекта Доплера за длительность импульса, в то время как ее изменение за период повторения учитываем\*. Тогда некогерентную пачку одинаковых импульсов можно записать в виде

$$m_{hx}(\theta_x) = e_h \cos (\omega_0 t_h - \psi_h - \theta_x), \quad (37.09)$$

где

$$\theta_x = \theta_1 + (x - 1)\Delta\theta + \omega_0(x - 1)T, \quad \Delta\theta = \zeta T. \quad (37.10)$$

То же выражение можно написать и в случае сигналов другой формы, удовлетворяющих условиям (36.06), только вместо величины  $T_0$  в формуле (37.08) будет фигурировать время автокорреляции зондирующего сигнала.

Коэффициент правдоподобия  $\Lambda(\theta_1, \dots, \theta_L)$  вследствие независимости фаз отдельных сигналов  $\theta_x$  (или, что то же самое, фаз  $\theta_x$ ) согласно формуле (31.18) равен

$$\Lambda(\theta_1, \dots, \theta_L) = \frac{1}{(2\pi)^L} e^{\zeta(\theta_1, \dots, \theta_L) - \frac{1}{2} \mu(\theta_1, \dots, \theta_L)}, \quad (37.11)$$

\* Заметим, что при отражении импульса от протяженного тела он растягивается во времени. Растяжением импульса можно пренебречь, если размеры тела малы по сравнению с  $cT_0$ , где  $c$  — скорость света. Это условие мы будем предполагать выполненным. При рассмотрении пачки сигналов неявно предполагается также, что выполняется условие  $v_r L T \ll cT_0$ . Последнее условие по существу означает, что положение тела за время его наблюдения  $LT$  относительно радиолокатора заметно не меняется; это условие может выполняться одновременно с условиями (37.08), относящимися к эффекту Доплера.



где

$$\varphi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_L) = \sum_x \sum_{g, h} Q_{gh} f_{g_x} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \vartheta_x) \quad (37.12)$$

и

$$\mu(\vartheta_1, \dots, \vartheta_L) = \sum_x \sum_{g, h} Q_{gh} m_{g_x} m_{h_x}. \quad (37.13)$$

Величину (37.12) можно представить в виде

$$\varphi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_L) = \sum_x \varphi_x(\vartheta_x) = \sum_x \mathcal{E}_x \cos(\Phi_x - \vartheta_x), \quad (37.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x(\vartheta_x) &= \sum_{g, h} Q_{gh} f_{g_x} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \vartheta_x) = \mathcal{E}_x \cos(\Phi_x - \vartheta_x), \\ x_x &= \mathcal{E}_x \cos \Phi_x = \sum_{g, h} Q_{gh} f_{g_x} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h), \\ y_x &= \mathcal{E}_x \sin \Phi_x = \sum_{g, h} Q_{gh} f_{g_x} e_h \sin(\omega_0 t_h - \psi_h), \end{aligned} \right\} \quad (37.15)$$

причем величины  $\mathcal{E}_x$  и  $\Phi_x$  имеют смысл огибающих и фаз для величин  $\varphi_x(\vartheta_x)$ , получающихся в результате оптимальной обработки данных, принятых за  $x$ -й период повторения.

Величина

$$\mu_x = \sum_{g, h} Q_{gh} m_{g_x} m_{h_x}, \quad (37.16)$$

как мы видели в § 33, является отношением сигнал/помеха на выходе оптимального линейного устройства за один период повторения. Как было показано выше [см. формулу (33.09)],  $\mu_x$  практически не зависит от неизвестной фазы  $\vartheta_x$ , поэтому величина (37.13), равная

$$\mu = \sum_{x=1}^L \mu_x \quad (37.17)$$

и являющаяся эффективным отношением сигнал/помеха для некогерентной пачки из  $L$  сигналов, не зависит от фаз  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_L$ .

Для обнаружения некогерентной пачки существует коэффициент правдоподобия

$$\Lambda = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Lambda(\vartheta_1, \dots, \vartheta_L) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_L = e^{-\frac{1}{2} \mu} \prod_{x=1}^L I_0(\mathcal{E}_x) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \mu} \exp \left\{ \sum_{x=1}^L \ln I_0(\mathcal{E}_x) \right\}. \quad (37.18)$$

В данном случае удобно принимать решение по величине

$$S = \sum_{x=1}^L \ln I_0(\mathcal{E}_x), \quad (37.19)$$

а именно

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } S \geq S_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } S < S_*, \text{ то считаем } f = n, \end{array} \right\} \quad (37.20)$$

где  $S_*$  — порог решения.

Для сигналов сильных ( $\mathcal{E}_x \gg 1$ ) и слабых ( $\mathcal{E}_x \ll 1$ ) формула (37.19) упрощается. Применяя асимптотическую формулу

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \ln I_0(x) \approx x \quad (\text{при } x \gg 1) \quad (37.21)$$

для сильных сигналов, получаем

$$S = \sum_{x=1}^L \mathcal{E}_x. \quad (37.22)$$

Применяя приближенные формулы

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \dots \approx e^{\frac{x^2}{4}}, \quad \ln I_0(x) \approx \frac{x^2}{4} \quad (\text{при } x \ll 1) \quad (37.23)$$

для слабых сигналов, получаем

$$S = \frac{1}{4} \sum_{x=1}^L \mathcal{E}_x^2. \quad (37.24)$$

Итак, оптимальный приемник обнаружения некогерентной пачки сигналов состоит из линейного оптимального устройства (фильтра), обрабатывающего каждый период повторения, нелинейного элемента (детектора) с характеристикой  $\ln I_0(\mathcal{E})$ , суммирующего устройства (накопителя)

и решающей схемы. Как показывают формулы (37.22) и (37.24), для сильных сигналов нелинейный элемент сводится к «линейному» детектору, для слабых — к квадратичному детектору.

Сравнивая правило решения для пачки некогерентных сигналов с правилом решения для одного сигнала с неизвестной фазой, мы видим, что в первом случае детектор должен иметь характеристику  $\ln I_0$ , в то время как во втором случае его характеристика могла быть произвольной. Отметим, что превосходство линейного детектора для пачки сильных сигналов и квадратичного — для пачки слабых сигналов полностью согласуется с результатами, полученными в § 18 для одиночного сигнала.

### § 38. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКА, ОБНАРУЖИВАЮЩЕГО НЕКОГЕРЕНТНУЮ ПАЧКУ

Перейдем к вычислению вероятностей  $F$  и  $D$  для приемника, осуществляющего обнаружение некогерентной пачки. Поскольку в силу формулы (37.09) все сигналы пачки имеют одинаковую интенсивность, то выражение (37.17) принимает вид

$$\mu = L\rho, \text{ где } \rho = \mu_1 = \dots = \mu_L. \quad (38.01)$$

Введем величину  $\mathcal{E}$  по формуле

$$\mathcal{E}^2 = \sum_{x=1}^L \mathcal{E}_x^2 = \sum_{x=1}^L (x_x^2 + y_x^2). \quad (38.02)$$

и будем принимать решение по  $\mathcal{E}$ , что в силу соотношения (37.24) дает оптимальные результаты для слабых сигналов. При отсутствии сигнала плотность вероятности величины  $\mathcal{E}$  равна

$$p_{0L}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}^{2L-1} e^{-\frac{\mathcal{E}^2}{2\rho}}}{2^{L-1} \rho^L (L-1)!}. \quad (38.03)$$

При наличии пачки из  $L$  некогерентных сигналов плотность вероятности равна

$$p_{mL}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}^{2L-1} e^{-\frac{L\rho}{2} - \frac{\mathcal{E}^2}{2\rho}} I_{L-1}(\sqrt{L}\mathcal{E})}{\rho^L (\sqrt{L}\mathcal{E})^{L-1}} = \frac{\mathcal{E}^L e^{-\frac{L\rho^2 + \mathcal{E}^2}{2\rho}} I_{L-1}(\sqrt{L}\mathcal{E})}{\rho^L e^{\frac{L-1}{L^2}}}, \quad (38.04)$$

где  $I_{L-1}(x)$  есть модифицированная функция Бесселя с индексом  $L-1$ , при малых значениях своего аргумента  $x$  приближенно равная

$$I_{L-1}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{L-1}}{(L-1)!}. \quad (38.05)$$

Выведем формулу (38.04). Для этого прежде всего отметим, что при  $L=1$  формула (38.04) принимает вид

$$p_{m1}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{\rho} e^{-\frac{\rho^2 + \mathcal{E}^2}{2\rho}} I_0(\mathcal{E}), \quad (38.06)$$

т. е. совпадает с распределением Райса (33.41). Поэтому при  $L=1$  формула (38.04) справедлива. Будем теперь считать, что формула (38.04) доказана для некоторого  $L$  и докажем ее для  $L+1$ . Обозначив аргумент функции  $p_{m, L+1}$  временно через  $\tilde{\mathcal{E}}$ , будем иметь

$$\tilde{\mathcal{E}}^2 = \mathcal{E}^2 + \mathcal{E}_{L+1}^2, \quad (38.07)$$

Случайные величины  $\mathcal{E}^2$  [она определяется формулой (38.02)] и  $\mathcal{E}_{L+1}^2$ , очевидно, независимы, поэтому функция  $p_{m, L+1}(\tilde{\mathcal{E}})$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} p_{m, L+1}(\tilde{\mathcal{E}}) d\tilde{\mathcal{E}} &= \iint_{(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}} + d\tilde{\mathcal{E}})} p_{mL}(\mathcal{E}) p_{m1}(\mathcal{E}_{L+1}) d\mathcal{E} d\mathcal{E}_{L+1} = \\ &= \tilde{\mathcal{E}} d\tilde{\mathcal{E}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_{mL}(\tilde{\mathcal{E}} \cos \beta) p_{m1}(\tilde{\mathcal{E}} \sin \beta) d\beta, \end{aligned} \quad (38.08)$$

где введены полярные координаты по формулам

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}} \cos \beta, \quad \mathcal{E}_{L+1} = \tilde{\mathcal{E}} \sin \beta, \quad d\mathcal{E} d\mathcal{E}_{L+1} = \tilde{\mathcal{E}} d\tilde{\mathcal{E}} d\beta, \quad (38.09)$$

причем мы интегрируем по  $\beta$  в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  по той причине, что величины  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}_{L+1}$  в формулах (38.09) не при-

нимают отрицательных значений. В явном виде формула (38.08) такова:

$$p_{m, L+1}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}^{L+2}}{\rho^{L+1}} e^{-\frac{(L+1)\rho^2 + \mathcal{E}^2}{2\rho}} \frac{1}{L^{\frac{L-1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{L-1}(V\bar{L}\mathcal{E}\cos\beta) \times \\ \times I_0(\mathcal{E}\sin\beta) \cos^L\beta \sin\beta d\beta. \quad (38.10)$$

Согласно второму определенному интегралу Сонина (см. Ватсон, „Теория бесселевых функций“, стр. 410) мы имеем:

$$\frac{1}{L^{\frac{L-1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{L-1}(V\bar{L}\mathcal{E}\cos\beta) I_0(\mathcal{E}\sin\beta) \cos^L\beta \sin\beta d\beta = \\ = \frac{I_L(V\sqrt{L+1}\mathcal{E})}{(L+1)^{\frac{L}{2}} \mathcal{E}}, \quad (38.11)$$

поэтому формула (38.10) дает

$$p_{m, L+1}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}^{L+1}}{\rho^{L+1}} e^{-\frac{(L+1)\rho^2 + \mathcal{E}^2}{2\rho}} \frac{I_L(V\sqrt{L+1}\mathcal{E})}{(L+1)^{\frac{L}{2}}}, \quad (38.12)$$

что и требовалось доказать. Если ввести величину  $z = \frac{\mathcal{E}}{V\rho}$ , то распределение (38.04) можно также записать в виде (ср. сноску на стр. 206)

$$p_{mL}(z) = \frac{z^L}{L\rho^{\frac{L-1}{2}}} e^{-\frac{L\rho + z^2}{2}} I_{L-1}(\sqrt{L\rho}z). \quad (38.13)$$

Если линейная внутрипериодная обработка принятых данных не является оптимальной, то формула (38.13) остается справедливой, но  $z$  и  $\rho$  определяются формулами (33.44), где согласно формуле (33.23)  $\sigma^2$  есть интенсивность помех на выходе квадратурных фильтров, осуществляющих обработку за каждый период повторения, а  $\bar{\varphi} = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$  — полезный сигнал на выходе этих фильтров [см. формулы (33.32)]. Доказательство этого утверждения легко провести методом полной индукции, отправляясь от формул (33.41) или (33.45) и повторяя выкладки этого параграфа.

Таким образом, применение неоптимальных линейных фильтров в приемнике эквивалентно уменьшению параметра  $\rho$ —эффективного отношения сигнал/помеха за каждый период повторения, т. е. увеличению уровня помех. Этот параметр становится меньше своего оптимального значения, определяемого формулами (37.16) и (38.01), но закон распределения случайной величины  $z$  при этом не меняется.

Если в формуле (38.13) положить  $\rho=0$  и воспользоваться выражением (38.05), то мы получим плотность вероятности величины  $z$  при отсутствии полезного сигнала

$$p_{0L}(z) = \frac{z^{2L-1}}{2^{L-1}(L-1)!} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (38.14)$$

Это распределение соответствует распределению  $\chi^2$  (хи-квадрат). Вводя величину

$$Z = \frac{z^2}{2}, \quad (38.15)$$

получаем для нее плотность вероятности

$$p_{0L}(Z) = \frac{Z^{L-1}}{(L-1)!} e^{-Z}. \quad (38.16)$$

Для интегралов

$$\frac{1}{2^{L-1}(L-1)!} \int_{z_*}^{\infty} z^{2L-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{(L-1)!} \int_{z_*}^{\infty} Z^{L-1} e^{-Z} dZ \quad \left( z_* = \frac{z_*^2}{2} \right) \quad (38.17)$$

имеются подробные таблицы. Переходя от переменной  $z$  к величине  $\mathcal{G}$ , мы получаем формулу (38.03)

Вероятность ложной тревоги и правильного обнаружения можно вычислить по формулам

$$F = \int_{\mathcal{G}_*}^{\infty} p_{0L}(\mathcal{G}) d\mathcal{G} = \frac{1}{2^L(L-1)!} \int_{z_*}^{\infty} z^{2L-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{\mathcal{G}_*}{V\rho} \quad (38.18)$$

и

$$D = \int_{\mathcal{G}_*}^{\infty} p_{mL}(\mathcal{G}) d\mathcal{G} = \frac{e^{-\frac{L\rho}{2}}}{(L\rho)^{\frac{L-1}{2}}} \int_{z_*}^{\infty} z^L e^{-\frac{z^2}{2}} I_{L-1}(V\sqrt{L\rho}z) dz, \quad (38.19)$$

где  $\mathcal{G}_*$  есть пороговое значение величины  $\mathcal{G}$ . При неоптимальной внутрипериодной обработке нужно положить  $z_* = \frac{\mathcal{G}_*}{\sigma}$  в соответствии со сказанным выше.

Вычисление  $F$  при заданном  $z_*$  (или  $Z_*$ ) легко производить по таблицам распределения  $\chi^2$ , составленным Е. Е. Слуцким и — для весьма малых  $F$  — Пейчерсом (J. Pecheres). Однако вычисление вероятности правильного обнаружения по формуле (38.19) является весьма трудоемким, поскольку соответствующие интегралы при  $L > 1$  не табулированы. Поэтому вероятность правильного обнаружения приходится рассчитывать с помощью приближенных формул. Так, например, в интеграле (38.19) функцию  $I_{L-1}$  можно заменить степенным рядом, первый член которого приведен в формуле (38.05), и произвести почленное интегрирование; однако получаемое при этом выражение практически пригодно лишь для вычисления малых  $D$  (точнее, при  $D \sim F$ ). При больших  $D$  можно воспользоваться асимптотической формулой

$$I_{L-1}(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (38.20)$$

благодаря которой формула (38.04) принимает вид

$$p_{mL}(\mathcal{G}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\mu}}\right)^{L-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{\rho}} - \sqrt{\mu} \quad (38.21)$$

или

$$p_{mL}(\mathcal{G}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (38.22)$$

где

$$y = x - \eta, \quad \eta = \frac{L-\frac{1}{2}}{\sqrt{\mu}} + \dots, \quad (38.23)$$

причем для вычисления членов порядка  $\frac{1}{\mu}$ , обозначенных в формуле (38.23) многоточием, необходимо уточнить асимптотическую формулу (38.20). Окончательно мы получаем асимптотическое выражение для вероятности правильного обнаружения пачки сигналов

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad (38.24)$$

где

$$y_* = z_* - \sqrt{\mu} - \eta, \quad \eta = \frac{L-\frac{1}{2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (38.25)$$

При  $L=1$  это выражение переходит в формулу Бунимо-  
вича (см. конец § 33).

В дальнейшем мы сведем интеграл (38.19) к интегралу  
вида (38.24) иным путем, а именно считая величину  $\mathcal{E}^2$   
нормальной, что при  $L \rightarrow \infty$  во всяком случае справедливо  
в силу предельной теоремы теории вероятностей.

Найдем среднее значение и дисперсию величины (38.02).  
Для этого вычислим интеграл

$$\overline{\mathcal{E}^{2k}} = \int_0^{\infty} \mathcal{E}^{2k} p_{mL}(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{e^{-\frac{L\rho}{2}}}{L \frac{L-1}{2} \rho L^0} \int_0^{\infty} \mathcal{E}^{L+2k} e^{-\frac{\mathcal{E}^2}{2\rho}} I_{L-1}(\sqrt{L}\mathcal{E}) d\mathcal{E}. \quad (38.26)$$

Пользуясь первым экспоненциальным интегралом Вебера  
в обобщенной форме (см. Ватсон, стр. 430)

$$\int_0^{\infty} t^{\mu-1} e^{-\rho^2 t^2} J_{\nu}(at) dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \left(\frac{a}{2\rho}\right)^{\nu} e^{-\frac{a^2}{4\rho^2}} \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1; \nu+1; \frac{a^2}{4\rho^2}\right), \quad (38.27)$$

мы получаем выражение

$$\overline{\mathcal{E}^{2k}} = \frac{\Gamma(L+k)}{\Gamma(L)} (2\rho)^k {}_1F_1\left(-k; L; -\frac{L\rho}{2}\right), \quad (38.28)$$

где

$${}_1F_1(-k; L; x) = 1 + \frac{-k}{L} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{-k(-k+1)}{L(L+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \\ + \frac{-k(-k+1)(-k+2)}{L(L+1)(L+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (38.29)$$

есть вырожденный гипергеометрический ряд, в котором  
отличны от нуля только  $k+1$  первых членов. Отсюда на-  
ходим

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathcal{E}^2} &= 2L\rho \left(1 + \frac{\rho}{2}\right), \\ \overline{\mathcal{E}^4} &= 4L(L+1)\rho^2 \left[1 + \rho + \frac{L\rho^2}{4(L+1)}\right], \\ \overline{\mathcal{E}^4} - (\overline{\mathcal{E}^2})^2 &= 4L\rho^2(1+\rho), \end{aligned} \right\} \quad (38.30)$$



так что среднее значение и дисперсия случайной величины

$$Z = \frac{\mathcal{E}^2}{2\rho} = \frac{z^2}{2} \quad (38.31)$$

оказываются равными

$$\bar{Z} = L \left(1 + \frac{\rho}{2}\right), \quad \bar{Z}^2 - (\bar{Z})^2 = L(1 + \rho) \quad (38.32)$$

и при  $\rho = 0$  имеем

$$\bar{Z} = L, \quad \bar{Z}^2 - (\bar{Z})^2 = L, \quad (38.33)$$

так что среднее значение и дисперсия величины  $2Z$  соответствуют распределению  $\chi^2$ .

Считая случайную величину  $Z$  нормальной, можно написать следующее приближенное выражение для вероятности правильного обнаружения

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad b = \frac{Z_* - L \left(1 + \frac{\rho}{2}\right)}{\sqrt{L(1 + \rho)}}. \quad (38.34)$$

Вероятность ложной тревоги в зависимости от величины нормированного порога  $Z_* = \frac{\mathcal{E}^2}{2\rho}$  можно рассчитать с по-

мощью формулы (38.17) и таблиц распределения  $\chi^2$ . На рис. 32 показана зависимость нормированного порога  $Z_*$  от вероятности ложной тревоги  $F$  для различных  $L$ .

Вероятность правильного обнаружения можно рассчитать по приближенным формулам (38.24) и (38.34). При этом точность формулы (38.24) будет ухудшаться с ростом  $L$ , а точность формулы (38.34) — улучшаться. Это видно из того, что асимптотическое выражение (38.20), использованное при выводе формулы

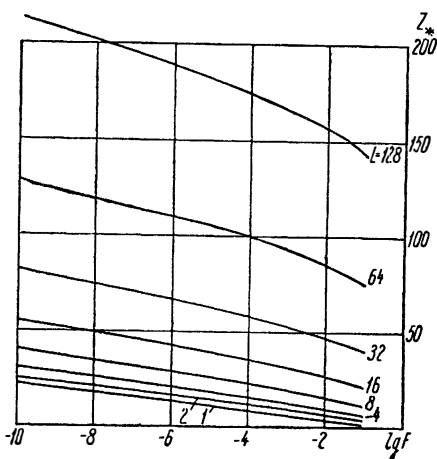


Рис. 32. Зависимость порога от вероятности ложной тревоги при различном числе сигналов в некогерентной пачке.

(38.24), имеет поправочные члены, возрастающие при увеличении  $L$ , а нормальное распределение должно при  $L \rightarrow \infty$  давать все большую точность в силу предельной теоремы теории вероятностей. На рис. 33—36 показаны характеристики обнаружения некогерентной пачки сигналов, построенные по обеим формулам. Ввиду появления дополнительного параметра  $L$  мы строим характеристики, откладывая по оси абсцисс  $L$ , а по оси ординат — отношение сигнал/помеха  $\rho$  за один период повторения (для нижних кривых) или отношение сигнал/помеха  $\mu = L\rho$  для всей пачки (верхние кривые). Вероятности  $F$  и  $D$  постоянны для каждой кривой, при  $L=1$  верхние и нижние кривые пересекаются, поскольку тогда  $\mu = \rho$ .

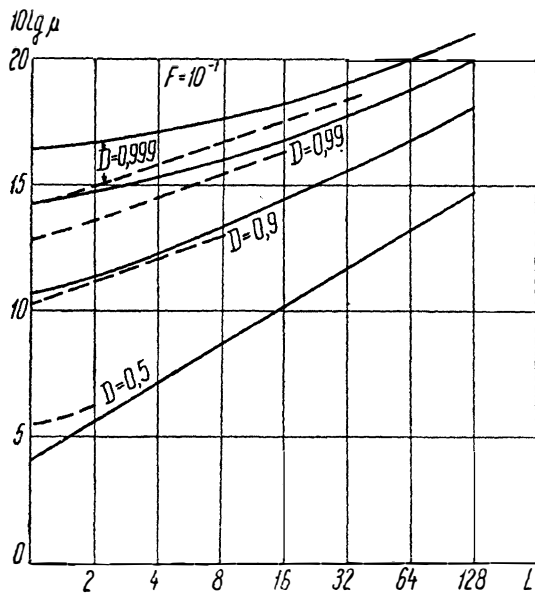
На рис. 33,а—36,а в увеличенном масштабе изображена зависимость  $\mu$  от  $L$  при фиксированных  $F$  и  $D$ . Сплошные кривые соответствуют формуле (38.34), пунктирные — формуле (38.24). Как правило, сплошные и пунктирные кривые либо очень близки на всем протяжении, либо сближаются в некотором интервале значений  $L$ . Кривые на рис. 33,б—36,б, которые мы считаем наиболее точными, получены интерполяцией пунктирных и сплошных кривых на рис. 33,а—36,а, причем при меньших значениях  $L$  предпочтение отдавалось пунктирным, а при больших значениях  $L$  — сплошным кривым. Примерная точность результирующих кривых (рис. 33,б—36,б) составляет 0,5 дб.

Верхние кривые на рис. 33,б—36,б позволяют оценить, насколько нужно увеличивать полную энергию пачки, чтобы добиться заданных вероятностей  $F$  и  $D$  при увеличении числа сигналов в пачке (уровень помех предполагается постоянным). Соответствующее приращение полной энергии можно назвать потерями на некогерентность при «дроблении» сигнала. Если пачка когерентна, то такие потери отсутствуют, и характеристики обнаружения пачки однозначно определяются ее полной энергией\*.

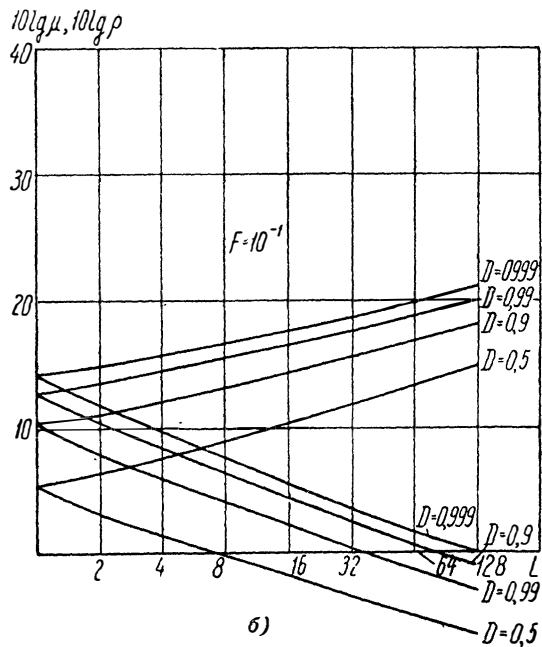
Если для грубой ориентировки положить, что величина  $\mathcal{G}^2$  при наличии одного шума также подчиняется нормальному закону, то вероятность ложной тревоги может быть вычислена по формуле

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad a = \frac{Z_* - L}{\sqrt{L}}. \quad (38.35)$$

\* Как уже отмечалось, когерентность или некогерентность пачки означает, в сущности, когерентность или некогерентность ее обработки (см. стр. 225 и сноску на стр. 229).

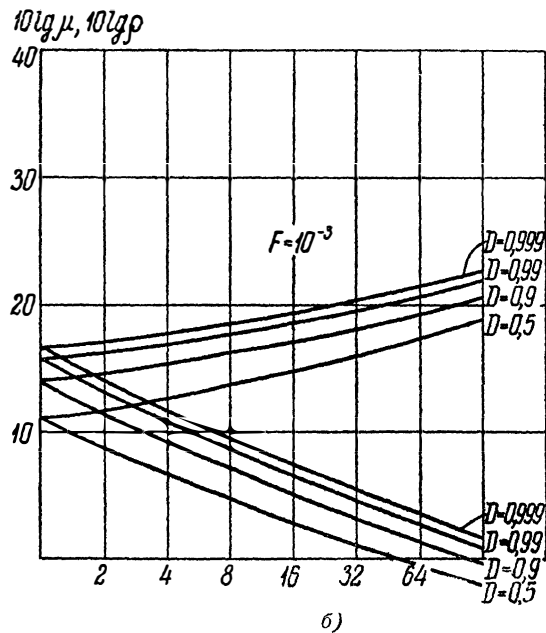
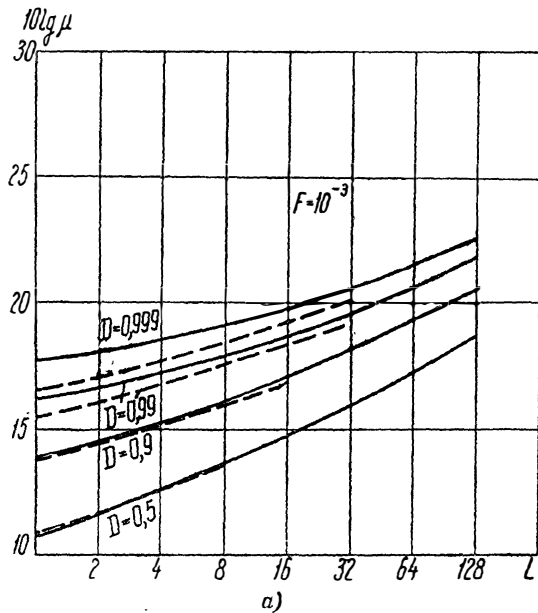


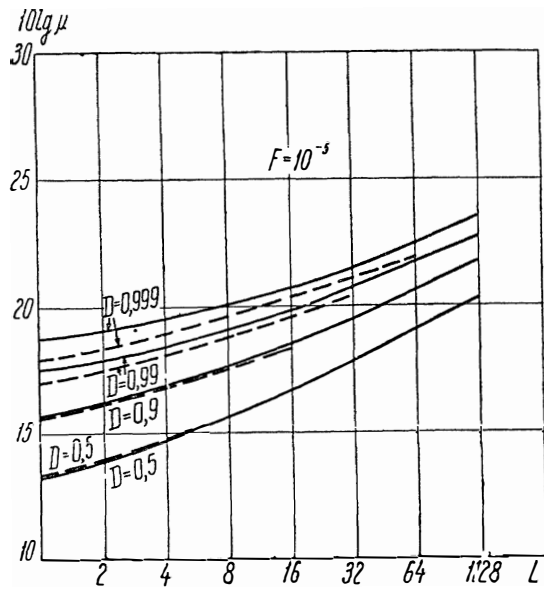
а)



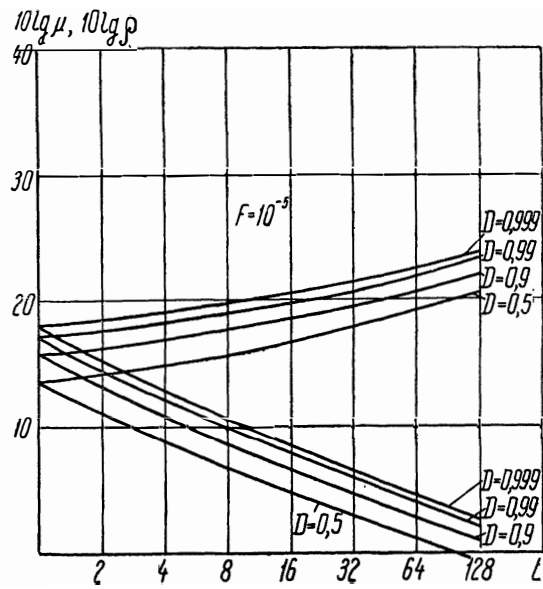
б)

Рис. 33. Характеристики обнаружения некогерентной пачки при  $F = 10^{-1}$ .

Рис. 34. То же при  $F = 10^{-3}$ .

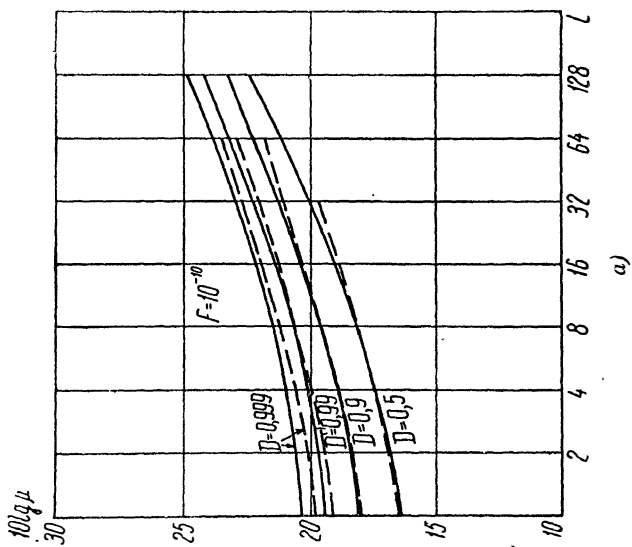


a)

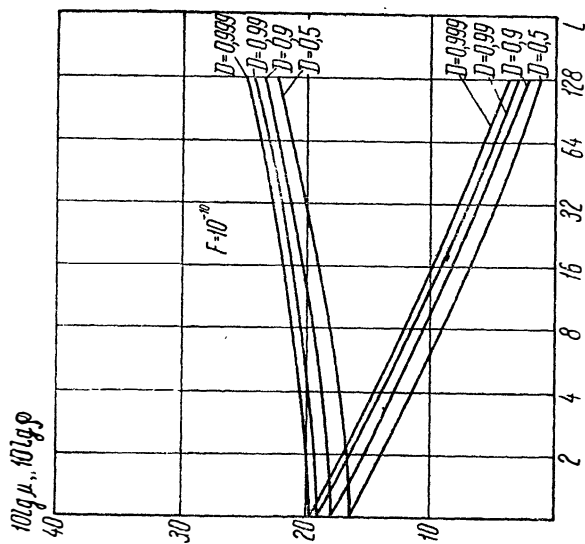


б)

Рис. 35. То же при  $F = 10^{-5}$ .



а)



б)

Рис. 36. То же при  $F = 10^{-10}$ .

Мы видим, что при условии  $\rho \ll 1$ , когда  $\sqrt{L(1+\rho)} \approx \sqrt{L}$ , можно воспользоваться характеристиками простого обнаружения, считая эффективное отношение сигнал/помеха равным

$$\mu_{\text{эф}} = (b - a)^2 = \frac{L\rho^2}{4} = \frac{\mu^2}{4L} \quad (38.36)$$

[ср. формулу (31.36) и конец § 35]. Формула (38.36) показывает, что накопление после квадратичного детектора при малых отношениях сигнал/помеха на входе детектора дает отношение сигнал/помеха на выходе, пропорциональное числу периодов повторения полезного сигнала и *квадрату* отношения сигнал/помеха на входе детектора. В этом проявляется уже известное нам (ср. § 18 и 33) подавление слабого сигнала сильной помехой при детектировании (или эквивалентной ему обработке), необходимым для сигнала с неизвестной начальной фазой.

Из формулы (38.36) следуют приближенные соотношения

$$\mu = 2\sqrt{L\mu_{\text{эф}}}, \quad \rho = 2\sqrt{\frac{\mu_{\text{эф}}}{L}}, \quad (38.37)$$

определяющие наклон кривых на рис. 33—36 при больших  $L$  и малых  $\rho$ . Наоборот, при больших  $\rho$  параметр  $\mu$  (при фиксированных  $F$  и  $D$ ) слабо зависит от  $L$ , и потери на некогерентное дробление сигнала малы. По мере увеличения  $L$  эти потери растут, причем формулы (38.37) соответствуют наиболее быстрому росту потерь.

Необходимо иметь в виду, что замена законов распределения (38.03) и (38.04) нормальными законами дает (при данном достаточно большом значении  $L$ ) удовлетворительные результаты лишь для «центральной» части кривой распределения, но не для ее «крыльев». Поскольку вычисление малых  $F$  и  $D$  (а также  $F$  и  $D$ , близких к единице) связано с использованием именно «крыльев» кривой распределения, это вычисление необходимо производить, используя точные функции (38.03) и (38.04), а, например, приближенное соотношение (38.36) справедливо лишь для не очень малых  $F$  и  $D$ .

В заключение отметим, что, хотя оптимальным детектором для сильных сигналов является линейный детектор, а для слабых—квадратичный, характеристика детектора на самом деле существенного значения не имеет. В статье Ю. В. Поляка и В. С. Кельзона показано, что линейный

детектор приводит к характеристикам обнаружения, отличающимся от характеристик квадратичного детектора — при заданных  $L$ ,  $F$  и  $D$  — менее чем на 1 дБ (по отношению сигнал/помеха).

### § 39. ОБНАРУЖЕНИЕ КОГЕРЕНТНОЙ ПАЧКИ НА ФОНЕ НОРМАЛЬНЫХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ

Рассмотрим оптимальный приемник, осуществляющий простое и сложное обнаружение когерентной пачки сигналов на фоне хаотических отражений и собственных шумов приемника. Смещение частоты сигнала, отраженного от цели, будем считать известным, а начальную фазу несущей в случае простого обнаружения — известной, а в случае сложного обнаружения — неизвестной.

При когерентной пачке зондирующих сигналов помеха, состоящая из хаотических отражений и собственных шумов приемника, коррелирована как в пределах одного периода повторения, так и от периода к периоду [см. формулы (36.08) и (36.15)]. Имея в виду формулу (36.08) и замечания в конце § 36, можно написать

$$\overline{n_{g\alpha} n_{h\lambda}} = R_{gh} r_{\alpha\lambda}. \quad (39.01)$$

Матрица, обратная матрице  $R_{gh} r_{\alpha\lambda}$ , имеет элементы  $Q_{gh} q_{\alpha\lambda}$ , где  $Q_{gh}$  и  $q_{\alpha\lambda}$  суть элементы матриц, обратных матрицам  $\|R_{gh}\|$  и  $\|r_{\alpha\lambda}\|$  соответственно. Действительно, из соотношений

$$\sum_j R_{gj} Q_{jh} = \delta_{gh}, \quad (39.02)$$

$$\sum_{\sigma} r_{\alpha\sigma} q_{\sigma\lambda} = \delta_{\alpha\lambda} \quad (39.03)$$

мы получаем

$$\sum_j \sum_{\sigma} R_{gj} r_{\alpha\sigma} Q_{jh} q_{\sigma\lambda} = \sum_j R_{gj} Q_{jh} \sum_{\sigma} r_{\alpha\sigma} q_{\sigma\lambda} = \delta_{gh} \delta_{\alpha\lambda}. \quad (39.04)$$

Выборку полезного сигнала в момент  $t_{h\lambda}$  из  $\lambda$ -го периода можно представить в виде

$$m_{h\lambda} = e_h \cos [(\omega_0 - \zeta) t_{h\lambda} - \psi_h - \theta]. \quad (39.05)$$

В силу формул (36.07), (37.07) и (37.08) можно написать

$$m_{h\lambda} = e_h \cos (\omega_0 t_h - \psi_h - \theta_{\lambda}), \quad (39.06)$$



где

$$\vartheta_\lambda = \theta + (\lambda - 1) \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \zeta T. \quad (39.07)$$

В случае простого обнаружения коэффициент правдоподобия  $\Lambda$  определяется выражением (31.18), где теперь величина  $\varphi$  равна

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{x,\lambda} \sum_{g,h} Q_{gh} q_{x\lambda} f_{gx} m_{h\lambda} &= \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} \sum_{g,h} Q_{gh} f_{gx} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \\ &- \vartheta_\lambda) = \sum_x a_x \sum_g A_g f_{gx} + \sum_x b_x \sum_g B_g f_{gx}. \end{aligned} \quad (39.08)$$

В последней формуле мы ввели следующие обозначения: коэффициенты  $A_g$  и  $B_g$  равны

$$A_g = \sum_h Q_{gh} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h), \quad B_g = \sum_h Q_{gh} e_h \sin(\omega_0 t_h - \psi_h), \quad (39.09)$$

а коэффициенты  $a_x$  и  $b_x$  определяются по формулам

$$a_x = \sum_\lambda q_{x\lambda} \cos \vartheta_\lambda, \quad b_x = \sum_\lambda q_{x\lambda} \sin \vartheta_\lambda. \quad (39.10)$$

Величину  $\varphi$  можно представить так:

$$\varphi = \sum_x (a_x x_x + b_x y_x), \quad (39.11)$$

где величины

$$\left. \begin{aligned} x_x &= \sum_g A_g f_{gx} = \sum_{g,h} Q_{gh} f_{gx} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h), \\ y_x &= \sum_g B_g f_{gx} = \sum_{g,h} Q_{gh} f_{gx} e_h \sin(\omega_0 t_h - \psi_h) \end{aligned} \right\} \quad (39.12)$$

можно интерпретировать как сигналы на выходе двух линейных фильтров, оптимальным образом обрабатывающих данные, принятые за  $x$ -й период повторения. Эти фильтры были рассмотрены ранее в первой части книги (ср. также § 33).

Обработка за все  $L$  периодов повторения производится по формуле (39.11), где коэффициенты  $a_x$  и  $b_x$  определяются по формулам (39.10).

Величина  $\mu$  в выражении для коэффициента правдоподобия может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} \sum_{g,h} Q_{gh} e_g e_h \cos \omega_0 (t_g - \psi_g - \vartheta_x) \cos (\omega_0 t_h - \psi_h - \vartheta_\lambda) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} \sum_{g,h} Q_{gh} e_g e_h \cos [\omega_0 (t_g - t_h) - (\psi_g - \psi_h) - (\vartheta_x - \vartheta_\lambda)], \end{aligned} \quad (39.13)$$

где мы пренебрегли суммой, содержащей  $\cos [\omega_0 (t_g + t_h) - (\psi_g + \psi_h) - (\vartheta_x + \vartheta_\lambda)]$ , что обычно вполне допустимо из-за ее малой величины (малость обусловлена тем, что слагаемые в этой сумме быстро осциллируют). Иначе можно написать

$$\mu = \rho \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} \cos (\vartheta_x - \vartheta_\lambda), \quad (39.14)$$

где величина

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{g,h} Q_{gh} e_g e_h \cos [\omega_0 (t_g - t_h) - (\psi_g - \psi_h)] \quad (39.15)$$

в случае одного периода повторения ( $L=1$ ) равна  $\mu$ . Согласно § 33,  $\rho$  есть отношение сигнал/помеха за каждый период повторения при оптимальной обработке информации за этот период.

Оптимальный приемник простого обнаружения когерентной пачки работает по правилу, аналогичному (31.19). Нетрудно видеть, что характеристики обнаружения  $L$  когерентных сигналов в этом случае совпадают с характеристиками простого обнаружения одного сигнала с параметром  $\mu$ , определяемым формулой (39.14).

При неизвестной начальной фазе пачки  $\theta$  для нахождения оптимального способа обработки необходимо рассматривать коэффициент правдоподобия

$$\Lambda = \int_0^{2\pi} \Lambda(\theta) d\theta = e^{-\frac{1}{2}\mu} I_0(\xi), \quad (39.16)$$

поскольку величину  $\varphi$  можно представить так

$$\varphi = \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} x_x \cos \vartheta_\lambda + \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} y_x \sin \vartheta_\lambda =$$

$$= \cos \theta \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} [x_x \cos (\lambda-1) \Delta \vartheta + y_x \sin (\lambda-1) \Delta \vartheta] + \\ + \sin \theta \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} [-x_x \sin (\lambda-1) \Delta \vartheta + y_x \cos (\lambda-1) \Delta \vartheta] \quad (39.17)$$

или

$$\varphi = \mathcal{G} \cos (\Phi - \theta), \quad (39.18)$$

где величины  $\mathcal{G}$  и  $\Phi$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G} \cos \Phi &= \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} [x_x \cos (\lambda-1) \Delta \vartheta + y_x \sin (\lambda-1) \Delta \vartheta], \\ \mathcal{G} \sin \Phi &= \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} [-x_x \sin (\lambda-1) \Delta \vartheta + y_x \cos (\lambda-1) \Delta \vartheta]. \end{aligned} \right\} (39.19)$$

Оптимальное решение, очевидно, в этом случае можно принимать по правилу (33.13). Характеристики обнаружения те же, что и для одного сигнала с неизвестной фазой, если параметр  $\mu$  определить формулой (39.14).

Для дальнейшего важна величина  $\mathcal{G}$ , входящая в формулу (39.16). Ее квадрат может быть представлен в виде

$$\mathcal{G}^2 = \sum_{x,\lambda} [\alpha_x \alpha_\lambda \cos (x-\lambda) \Delta \vartheta + \beta_x \beta_\lambda \cos (x-\lambda) \Delta \vartheta - \\ - 2\alpha_x \beta_\lambda \sin (x-\lambda) \Delta \vartheta] = \left| \sum_x (\alpha_x + i\beta_x) e^{-ix\Delta\vartheta} \right|^2, \quad (39.20)$$

где

$$\alpha_x = \sum_\lambda q_{x\lambda} x_\lambda, \quad \beta_x = \sum_\lambda q_{x\lambda} y_\lambda. \quad (39.21)$$

Анализ этих соотношений мы произведем в следующем параграфе.

#### § 40. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ КОГЕРЕНТНОЙ ПАЧКИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СКОРОСТЯХ ЦЕЛИ

Полученный выше коэффициент правдоподобия  $\Lambda$  зависит от приращения фазы  $\Delta \vartheta = \zeta T$ , обусловленного движением цели, т. е. от произведения смещения частоты на период повторения. В зависимости от значения этой фазы

мы получаем различные способы обработки принятого сигнала. Если приращение фазы равно

$$\Delta\vartheta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \quad (40.01)$$

то скорость цели часто называют „слепой“. Для такой скорости

$$\beta^2 = \left(\sum_x \alpha_x\right)^2 + \left(\sum_x \beta_x\right)^2 = \left(\sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} x_\lambda\right)^2 + \left(\sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} y_\lambda\right)^2. \quad (40.02)$$

Если приращение фазы равно

$$\Delta\vartheta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots \quad (40.03)$$

то

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \left[\sum_x (-1)^{x+1} \alpha_x\right]^2 + \left[\sum_x (-1)^{x+1} \beta_x\right]^2 = \\ &= \left[\sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} (-1)^{x+1} x_\lambda\right]^2 + \left[\sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} (-1)^{x+1} y_\lambda\right]^2. \end{aligned} \quad (40.04)$$

Рассмотрим подробнее формулы (40.02) и (40.04) для случая, когда междупериодный коэффициент корреляции равен  $r(\tau) = e^{-u|\tau|}$ , так что элементы матрицы  $\|r_{x\lambda}\|$  имеют вид

$$r_{x\lambda} = e^{-u|x-\lambda|T} = r^{|x-\lambda|} \quad (r = e^{-uT}). \quad (40.05)$$

Обратная матрица  $\|q_{x\lambda}\|$  будет равна [ср. формулу (35.20) и следующие за нею]

$$\|q_{x\lambda}\| = \frac{1}{1-r^2} \begin{vmatrix} 1 & -r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 1+r^2 & -r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1+r^2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+r^2 & -r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \end{vmatrix}. \quad (40.06)$$

Согласно выражениям (39.21) имеем

$$\alpha_1 = \frac{x_1 - rx_2}{1-r^2}, \quad \alpha_2 = \frac{-rx_1 + (1+r^2)x_2 - rx_3}{1-r^2}, \dots \quad (40.07)$$

и аналогично для величин  $\beta_x$ .

Исследуем также величину  $\mu$ , являющуюся отношением сигнал/помеха на выходе оптимального приемника при известных параметрах сигнала. Действительно, результирующий сигнал на выходе оптимального приемника может быть представлен в виде (ср. § 31)

$$\varphi = \mu + \nu, \quad \bar{\varphi} = \mu, \quad \bar{\nu}^2 = \mu, \quad \frac{(\bar{\varphi})^2}{\bar{\nu}^2} = \mu. \quad (40.08)$$

Согласно формуле (39.14) величина  $\mu$  зависит от  $\Delta\theta$  (но не от  $\theta$ ). Если коэффициент корреляции определяется формулой (40.05), то по формуле (39.14) получаем

$$\mu = \rho \frac{L(1 - 2r \cos \Delta\theta + r^2) - 2r(r - \cos \Delta\theta)}{1 - r^2}. \quad (40.09)$$

Для слепых скоростей [см. формулу (40.01)] величина (40.02) равна

$$\mathcal{G}^2 = \left[ \frac{x_1 + (1-r) \sum_{x=2}^{L-1} x_x + x_L}{1+r} \right]^2 + \left[ \frac{y_1 + (1-r) \sum_{x=2}^{L-1} y_x + y_L}{1+r} \right]^2, \quad (40.10)$$

причем

$$\mu = \rho \frac{L(1-r) + 2r}{1+r}. \quad (40.11)$$

Рассмотрим два предельных случая:

а) Если хаотические отражения отсутствуют и сигнал выделяется только на фоне «белых» шумов, то  $r=0$  и

$$\mathcal{G}^2 = \left( \sum_x x_x \right)^2 + \left( \sum_x y_x \right)^2, \quad (40.12)$$

т. е. оптимальный приемник должен производить когерентное накопление по двум квадратурным каналам и образовывать огибающую  $\mathcal{G}$  соответствующих сумм. Оптимальный приемник также может быть получен соединением согласованного фильтра и детектора огибающей (ср. § 20 и 33). Отношение сигнал/помеха  $\mu$  на выходе будет равно

$$\mu = L\rho, \quad (40.13)$$

т. е. прямо пропорционально числу сигналов в пачке.

б) Если помеха в основном определяется хаотическими отражениями и за время наблюдения ее можно считать постоянной, то  $r \approx 1$  и

$$\mathcal{G}^2 = \left( \frac{x_1 + x_L}{2} \right)^2 + \left( \frac{y_1 + y_L}{2} \right)^2. \quad (40.14)$$

В данном случае оптимальный приемник должен суммировать лишь результаты оптимальной обработки входного сигнала за первый и последний периоды повторения по каждому квадратурному каналу. При этом отношение сигнал/помеха будет равно

$$\mu = \rho, \quad (40.15)$$

т. е. для сильно коррелированных помех и слепых скоростей когерентное сложение не приводит к улучшению наблюдаемости сигнала. Это объясняется тем, что помеха увеличивается в такой же степени, как и сигнал.

Для фаз, определяемых формулой (40.03), коэффициент правдоподобия  $\Lambda$  является функцией величины

$$\mathcal{G}^2 = \left[ \frac{x_1 + (1+r) \sum_{x=2}^{L-1} (-1)^{x+1} x_x + (-1)^{L+1} x_L}{1-r} \right]^2 + \left[ \frac{y_1 + (1+r) \sum_{x=2}^{L-1} (-1)^{x+1} y_x + (-1)^{L+1} y_L}{1-r} \right]^2, \quad (40.16)$$

причем

$$\mu = \rho \frac{L(1+r) - 2r}{1-r}. \quad (40.17)$$

Рассмотрим опять два предельных случая.

а) Для помехи типа белого шума ( $r=0$ ) имеем

$$\mathcal{G}^2 = \left[ \sum_x (-1)^{x+1} x_x \right]^2 + \left[ \sum_x (-1)^{x+1} y_x \right]^2; \quad (40.18)$$

т. е. получаем когерентное накопление с учетом чередования фаз полезного сигнала. При этом эффективное отношение сигнал/помеха для пачки равно

$$\mu = L\rho. \quad (40.19)$$

б) Для хаотических отражений, у которых  $r \approx 1$ , получаем

$$\mathcal{G}^2 = \left[ \frac{x_1 + 2 \sum_{x=2}^{L-1} (-1)^{x+1} x_x + (-1)^{L+1} x_L}{1-r} \right]^2 + \left[ \frac{y_1 + 2 \sum_{x=2}^{L-1} (-1)^{x+1} y_x + (-1)^{L+1} y_L}{1-r} \right]^2. \quad (40.20)$$

В частности, при  $L=2$

$$\mathcal{G}^2 = \left( \frac{x_1 - x_2}{1-r} \right)^2 + \left( \frac{y_1 - y_2}{1-r} \right)^2, \quad (40.21)$$

а при  $L=3$

$$\mathcal{G}^2 = \left( \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{1-r} \right)^2 + \left( \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{1-r} \right)^2. \quad (40.22)$$

Таким образом, оптимальный приемник должен образовывать разности: первую разность при  $L=2$ , вторую при  $L=3$ , более сложную комбинацию разностей при больших значениях  $L$ . Мы пришли, следовательно, к известному способу подавления помех от хаотических отражений — череспериодному вычитанию. Отношение сигнал/помеха  $\mu$  в этом предельном случае равно

$$\mu = \rho \frac{2(L-1)}{1-r}, \quad (40.23)$$

так что  $\mu \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 1$ , т. е. вычитания освобождают приемник от хаотических отражений тем лучше, чем ближе к единице междупериодный коэффициент корреляции  $r$ . Наблюдаемость сигнала резко возрастает при  $r \rightarrow 1$ .

Промежуточные значения  $\Delta\Phi$  при большом числе периодов повторения исследовать довольно трудно. Для двух периодов это можно сделать сравнительно просто. Следующий параграф мы и посвятим этому вопросу.

#### § 41. ОБНАРУЖЕНИЕ КОГЕРЕНТНОЙ ПАЧКИ СИГНАЛОВ ЗА ДВА ПЕРИОДА ПОВТОРЕНИЯ ПРИ ИЗВЕСТНОМ И НЕИЗВЕСТНОМ СМЕЩЕНИИ ЧАСТОТЫ

Прямая и обратные корреляционные матрицы  $\|r_{x\lambda}\|$  и  $\|q_{x\lambda}\|$  для двух периодов повторения ( $L=2$ ), очевидно, равны

$$\|r_{x\lambda}\| = \begin{vmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{vmatrix}, \quad \|q_{x\lambda}\| = \frac{1}{1-r^2} \begin{vmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{vmatrix}. \quad (41.01)$$

Из формулы (39.16) мы при  $L=2$  получаем следующую общую формулу для коэффициента правдоподобия за два периода повторения

$$\Lambda = e^{-\rho} \frac{1-r \cos \Delta\vartheta}{1-r^2} I_0(\mathcal{G}), \quad (41.02)$$

где величина  $\mathcal{G}$  равна

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^2 &= \frac{1}{(1-r^2)^2} [(1-2r \cos \Delta\vartheta + r^2)(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) + \\ &\quad + 2(\cos \Delta\vartheta - 2r + r^2 \cos \Delta\vartheta)(x_1 x_2 + y_1 y_2) - \\ &\quad - 2 \sin \Delta\vartheta (1-r^2)(x_2 y_1 - x_1 y_2)] = \\ &= \frac{1}{(1-r^2)^2} \{ [x_1 - r(x_1 \cos \Delta\vartheta + y_1 \sin \Delta\vartheta) - r x_2 + x_2 \cos \Delta\vartheta + \\ &\quad + y_2 \sin \Delta\vartheta]^2 + [y_1 - r(y_1 \cos \Delta\vartheta - x_1 \sin \Delta\vartheta) - r y_2 + y_2 \cos \Delta\vartheta - \\ &\quad - x_2 \sin \Delta\vartheta]^2 \}. \end{aligned} \quad (41.03)$$

Как уже было показано выше, при  $\Delta\vartheta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  мы получаем формулу

$$\mathcal{G}^2 = \frac{1}{(1+r)^2} [(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2], \quad (41.04)$$

соответствующую череспериодному сложению и дающую для пачки отношение сигнал/помеха, равное

$$\mu = \frac{2\rho}{1+r}. \quad (41.05)$$

При  $\Delta\vartheta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$  мы получаем выражение

$$\mathcal{G}^2 = \frac{1}{(1-r)^2} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2], \quad (41.06)$$

соответствующее череспериодному вычитанию, причем

$$\mu = \frac{2\rho}{1-r}. \quad (41.07)$$

При некоррелированной помехе ( $r \approx 0$ ) и произвольной разности фаз  $\Delta\vartheta$  формула (41.03) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2 \cos \Delta\vartheta (x_1 x_2 + y_1 y_2) - \\ &\quad - 2 \sin \Delta\vartheta (x_2 y_1 - x_1 y_2) = |x_1 + i y_1 + (x_2 + i y_2) e^{-i\Delta\vartheta}|^2, \end{aligned} \quad (41.08)$$



так что оптимальный приемник должен производить когерентное накопление сигналов с учетом разности фаз  $\Delta\theta$ , причем отношение сигнал/помеха для пачки равно

$$\mu = 2\rho. \quad (41.09)$$

Если, наоборот, помеха является сильно коррелированной ( $r \approx 1$ ), а приращение фазы  $\Delta\theta$  произвольно (но не равно 0,  $\pm 2\pi, \dots$ ; т. е. скорость не является „слепой“), то общая формула (41.03) принимает вид

$$\mathcal{G}^2 = \frac{2(1 - \cos \Delta\theta)}{(1 - r^2)^2} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]. \quad (41.10)$$

Мы опять пришли к вычитанию, причем отношение сигнал/помеха  $\mu$  равно

$$\mu = \rho \frac{1 - \cos \Delta\theta}{1 - r}. \quad (41.11)$$

На рис. 37 показан вид оптимального приемника, обнаружения на фоне сильно коррелированной помехи. Приемник должен производить следующие операции: оптималь-

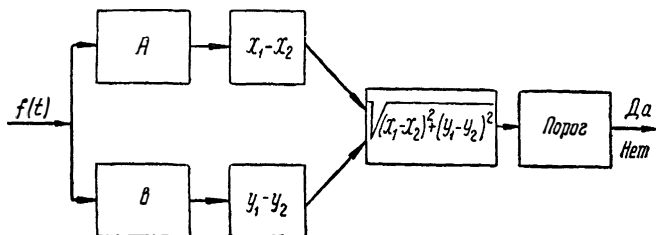


Рис. 37. Схема оптимального приемника при сильно коррелированных помехах.

ную обработку принятой функции  $f(t)$  за каждый период повторения по формулам (39.12) с помощью квадратурных фильтров  $A$  и  $B$ ; оптимальную междупериодную обработку — вычитание в обоих квадратурных каналах и образование огибающей  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ , ее квадрата или любой другой монотонно возрастающей функции этой величины; принятие решения.

При  $L=3, 4 \dots$  оптимальные приемники становятся более сложными: математические операции, которые в этом случае необходимо производить над входным сигналом,

зависят (даже при  $r_{\lambda\lambda} \rightarrow 1$ ) от  $\Delta\vartheta$ , от степени близости различных коэффициентов  $r_{\lambda\lambda}$  к единице и т. д. Осуществление такого приемника связано не только с усложнением схемы, но и с необходимостью иметь более полную информацию о сигнале и помехе в каждом конкретном случае.

Весьма часто смещение частоты отраженного полезного сигнала неизвестно. В этом случае для нахождения оптимального приемника обнаружения нужно дополнительно усреднить (проинтегрировать) коэффициент правдоподобия по неизвестному смещению частоты (или фазы) полезного сигнала, вызванному эффектом Допплера.

Для пачки, состоящей из двух когерентных сигналов, это усреднение удобнее произвести в несколько ином порядке, а именно по фазе каждого сигнала. Запишем выборки полезного сигнала в виде

$$m_{h\lambda} = e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \vartheta_\lambda) \quad (41.12)$$

где фазы

$$\vartheta_1 = \theta \text{ и } \vartheta_2 = \theta + \zeta T = \theta + \Delta\vartheta. \quad (41.13)$$

мы считаем равномерно распределенными в пределах окружности. Коэффициент правдоподобия

$$\Lambda(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2) - \frac{1}{2}\mu(\vartheta_1, \vartheta_2)} \quad (41.14)$$

определяется величинами  $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2)$  и  $\mu(\vartheta_1, \vartheta_2)$ , которые согласно формулам (39.14) и (39.11) выразятся через  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\mu(\vartheta_1, \vartheta_2) = -\frac{\rho}{1-r} + \frac{\rho r (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2)}{1-r^2}, \quad (41.15)$$

$$\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2) =$$

$$= \frac{(x_1 - rx_2) \cos \vartheta_1 - (y_1 - ry_2) \sin \vartheta_1 + (x_2 - rx_1) \cos \vartheta_2 - (y_2 - ry_1) \sin \vartheta_2}{1-r^2}. \quad (41.16)$$

Очевидно, что после интегрирования по  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  коэффициент правдоподобия (при  $r \approx 1$ ) будет зависеть только от величины

$$\mathcal{E} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (41.17)$$

характеризующей принятый сигнал. Действительно, интегрируя выражение (41.14) по  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , получаем

$$\Lambda = e^{-\frac{\rho}{1-r^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik(\Phi_2 - \Phi_1)} I_k\left(\frac{\rho r}{1-r^2}\right) I_k\left(\frac{\mathcal{E}_1}{1-r^2}\right) I_k\left(\frac{\mathcal{E}_2}{1-r^2}\right), \quad (41.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1 \cos \Phi_1 &= x_1 - r x_2, & \mathcal{E}_2 \cos \Phi_2 &= x_2 - r x_1, \\ \mathcal{E}_1 \sin \Phi_1 &= y_1 - r y_2, & \mathcal{E}_2 \sin \Phi_2 &= y_2 - r y_1. \end{aligned} \right\} (41.19)$$

Формула (41.18) выводится следующим образом: интегрирование по  $\vartheta_2$  дает

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\vartheta_1, \vartheta_2) d\vartheta_2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\rho}{1-r^2} + (x_1 - r x_2) \cos \vartheta_1 + (y_1 - r y_2) \sin \vartheta_1} I_0(Z), \quad (41.20)$$

где

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{1-r^2} \sqrt{(\rho r \cos \vartheta_1 + x_2 - r x_1)^2 + (\rho r \sin \vartheta_1 - y_2 + r y_1)^2} = \\ &= \frac{1}{1-r^2} \sqrt{\rho^2 r^2 + 2\rho r \mathcal{E}_2 \cos(\vartheta_1 + \Phi_2) + \mathcal{E}_2^2}. \end{aligned} \quad (41.21)$$

Применяя теорему сложения для бесселевых функций (ср. Ватсон, стр. 392)

$$I_0(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\vartheta_1 + \Phi_2)} I_k\left(\frac{\rho r}{1-r^2}\right) I_k\left(\frac{\mathcal{E}_2}{1-r^2}\right) \quad (41.22)$$

и используя соотношение

$$I_k\left(\frac{\mathcal{E}_1}{1-r^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik(\vartheta_1 + \Phi_1) + \mathcal{E}_1 \cos(\vartheta_1 + \Phi_1)} d\vartheta_1, \quad (41.23)$$

мы и получаем ряд (41.18) после интегрирования по  $\vartheta_1$ .

Для сильно коррелированной помехи ( $r \approx 1$ ) имеем:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}, \quad \Phi_2 - \Phi_1 = \pi, \quad e^{-ik(\Phi_2 - \Phi_1)} = (-1)^k, \quad (41.24)$$

так что интересующий нас коэффициент правдоподобия равен

$$\Lambda = e^{-\mu_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k I_k(\mu_0) I_k^2\left(\frac{\mathcal{E}}{1-r^2}\right), \quad (41.25)$$

где

$$\mu_0 = \frac{\rho}{1-r^2} \approx \frac{\rho r}{1-r^2}, \quad (41.26)$$

а  $\mathcal{E}$  определяется формулой (41.17).

Таким образом, при  $r \approx 1$  оптимальный приемник обнаружения сигналов с неизвестной доплеровской частотой должен иметь такой же вид (см. рис. 37), как и при известной, но произвольной разности фаз  $\Delta\theta$ , отличной от значений (40.01). Этот результат физически почти очевиден, поскольку «слепые» скорости, для которых такая схема не применима, имеют малый статистический вес и при усреднении по  $\Delta\theta$  выпадают.

#### § 42. ВЕРОЯТНОСТИ $F$ И $D$ ПРИ ЧЕРЕСПЕРИОДНОМ ВЫЧИТАНИИ

Найдем вероятности ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$  для приемника, образующего величину

$$\mathcal{E} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (42.01)$$

и принимающего решения по правилу ( $\mathcal{E}_*$  — некоторый порог)

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \mathcal{E} \geq \mathcal{E}_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } \mathcal{E} < \mathcal{E}_*, \text{ то считаем } f = n. \end{array} \right\} \quad (42.02)$$

Выше мы показали, что такой приемник является оптимальным для сильно коррелированных помех ( $r \approx 1$ ) и любых смещений частот, а при  $\Delta\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  — для произвольной корреляции помех.

Если в формуле (39.12) разложить  $f_{g^*}$  на сумму  $m_{g^*} + n_{g^*}$ , то величины  $x_x$  и  $y_x$  представляются так:

$$x_x = x_{m_x} + x_{n_x}, \quad y_x = y_{m_x} + y_{n_x}, \quad (42.03)$$

где

$$x_{m_x} = \sum_g A_g m_{g^*}, \quad y_{m_x} = \sum_g B_g m_{g^*} \quad (42.04)$$

и

$$x_{n_x} = \sum_g A_g n_{g^*}, \quad y_{n_x} = \sum_g B_g n_{g^*}. \quad (42.05)$$

Из формул (39.06), (39.09) и (39.12) следует, что

$$x_{m_x} = \rho \cos \theta_x, \quad y_{m_x} = -\rho \sin \theta_x. \quad (42.06)$$

Случайные величины  $x_{n\lambda}$  и  $y_{n\lambda}$  являются нормальными, причем

$$\left. \begin{aligned} \overline{x_{n\lambda}} = \overline{y_{n\lambda}} = 0, \quad \overline{x_{n\lambda} y_{n\lambda}} = 0, \\ \overline{x_{n\lambda} x_{n\lambda}} = \overline{y_{n\lambda} y_{n\lambda}} = \rho q_{\lambda\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (42.07)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda$  принимают значения 1 и 2.

При отсутствии полезного сигнала величина  $\mathcal{E}$  равна

$$\mathcal{E} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \xi = x_{n1} - x_{n2}, \quad \eta = y_{n1} - y_{n2}. \quad (42.08)$$

В силу формул (42.07) случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют следующие моменты:

$$\overline{\xi} = \overline{\eta} = 0, \quad \overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = 2\rho(1-r) \quad (42.09)$$

и являются нормальными. Поэтому для огибающей  $\mathcal{E}$  получается распределение Релея

$$p_0(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{2\rho(1-r)} e^{-\frac{\mathcal{E}^2}{4\rho(1-r)}} \quad (42.10)$$

[ср. формулу (33.27)] и вероятность ложной тревоги равна

$$F = \int_{\mathcal{E}_*}^{\infty} p_0(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = e^{-\frac{z_*^2}{2}}, \quad z_* = \frac{\mathcal{E}_*}{\sqrt{2\rho(1-r)}}. \quad (42.11)$$

При наличии полезного сигнала будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \xi &= \rho(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) + x_{n1} - x_{n2} = \rho' \sin \vartheta + x_{n1} - x_{n2}, \\ \eta &= \rho(\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2) + y_{n1} - y_{n2} = \rho' \cos \vartheta + y_{n1} - y_{n2}, \end{aligned} \right\} \quad (42.12)$$

где мы ввели обозначения

$$\rho' = 2\rho \sin \frac{\Delta\vartheta}{2} \quad (42.13)$$

и

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad \Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1. \quad (42.14)$$

Из соотношений (42.12) видно, что при наличии полезного сигнала с фиксированным сдвигом фаз  $\Delta\vartheta$  величина  $\mathcal{E}$  имеет распределение Райса (33.41), в котором надо считать

$$\bar{\varphi} = \rho' \quad \text{и} \quad \sigma^2 = 2\rho(1-r).$$

Поэтому

$$p_m(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{2\rho(1-r)} e^{-\frac{(\rho')^2 + \mathcal{E}^2}{4\rho(1-r)}} I_0\left(\frac{\rho'\mathcal{E}}{2\rho(1-r)}\right). \quad (42.15)$$

Обозначая

$$\mu = \rho \frac{1 - \cos \Delta\vartheta}{1 - r} = 2\mu_0(1 - \cos \Delta\vartheta), \quad (42.16)$$

где

$$\mu_0 = \frac{\rho}{2(1-r)}, \quad (42.17)$$

можно написать распределение для огибающей  $\mathcal{E}$  при наличии на входе сигнала и помехи в виде

$$p_m(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{2\rho(1-r)} e^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{\mathcal{E}^2}{4\rho(1-r)}} I_0\left(\frac{\sqrt{\mu}\mathcal{E}}{\sqrt{2\rho(1-r)}}\right). \quad (42.18)$$

Тогда вероятность правильного обнаружения при фиксированном сдвиге фаз  $\Delta\vartheta$  будет равна

$$D(\Delta\vartheta) = \int_{\mathcal{E}_*}^{\infty} p_m(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \int_{z_*}^{\infty} z e^{-\frac{\mu+z^2}{2}} I_0(\sqrt{\mu}z) dz, \quad (42.19)$$

$$z_* = \frac{\mathcal{E}_*}{\sqrt{2\rho(1-r)}}.$$

Величина  $\mu$ , определяемая формулой (42.16), есть отношение сигнал/помеха на выходе вычитающего устройства при фиксированном  $\Delta\vartheta$ . Действительно, формулы (42.08) и (42.12) дают

$$\xi = \xi_m + \xi_n, \quad \eta = \eta_m + \eta_n, \quad (42.20)$$

$$\xi_n = x_{n1} - x_{n2}, \quad \eta_n = y_{n1} - y_{n2}, \quad \bar{\xi}_n^2 = \bar{\eta}_n^2 = 2\rho(1-r),$$

$$\xi_m = \rho' \sin \vartheta, \quad \eta_m = \rho' \cos \vartheta,$$

$$\bar{\xi}_m^2 = \bar{\eta}_m^2 = \frac{1}{2}(\rho')^2 = \rho^2(1 - \cos \Delta\vartheta),$$

где усреднение  $\overline{\xi_m^2} = \overline{\eta_m^2}$  производится по фазе  $\vartheta$ . Поэтому отношение сигнал/помеха (по мощности) действительно равно

$$\mu = \frac{\overline{\xi_m^2}}{\overline{\xi_n^2}} \frac{\rho(1 - \cos \Delta\vartheta)}{1 - r}. \quad (42.21)$$

Полная вероятность правильного обнаружения (при любых доплеровских сдвигах фазы) получается, если усреднить функцию  $D(\Delta\vartheta)$  по  $\Delta\vartheta$ . Считая для простоты все значения  $\Delta\vartheta$  равновероятными, получим

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\Delta\vartheta) d\Delta\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D(\Delta\vartheta) d\Delta\vartheta. \quad (42.22)$$

Величина  $D$  зависит (кроме порога  $\mathcal{G}_0$ , связанного с вероятностью ложной тревоги  $F$ ) от параметра  $\mu_0$ , определяемого формулой (42.17), который является отношением сигнал/помеха на выходе вычитающего устройства при произвольном  $\Delta\vartheta$ . Действительно, при произвольном  $\Delta\vartheta$  фазы  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  статистически независимы; так что, пользуясь обозначениями формулы (42.20), мы получим

$$\begin{aligned} \overline{\xi_m^2} &= \rho^2 \overline{(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)^2} = \rho^2, \\ \overline{\eta_m^2} &= \rho^2 \overline{(\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2)^2} = \rho^2, \end{aligned} \quad (42.23)$$

и отношение сигнал/помеха в данном случае равно

$$\mu_0 = \frac{\overline{\xi_m^2}}{\overline{\xi_n^2}} = \frac{\rho}{2(1-r)}. \quad (42.24)$$

На рис. 38 сплошные кривые дают зависимость  $D(\Delta\vartheta)$  от  $\mu$ , где  $\mu$  определяется формулой (42.16). Эти кривые не отличаются от кривых оптимального обнаружения оди ночного сигнала с неизвестной высокочастотной фазой на фоне нормальных помех, только по оси абсцисс теперь откладывается эффективное отношение сигнал/помеха на выходе вычитающего устройства. Заметим, что при заданных  $\Delta\vartheta$  и  $r$  нетрудно вычислить по формуле

$$\rho = \mu \frac{1-r}{1 - \cos \Delta\vartheta} \quad (42.25)$$

соответствующее отношение сигнал/помеха за один период повторения (но после оптимальной внутрипериодной обработки).

На рис. 39 изображена зависимость полной вероятности  $D$  (при произвольном  $\Delta\theta$ ) от  $\mu_0$ ; мы видим, что при увеличении  $\mu_0$  вероятность правильного обнаружения стремится к единице весьма медленно (гораздо медленнее, чем, например, на рис. 38). Это объясняется тем, что даже при весьма больших  $\mu_0$  (скажем, при  $\mu_0 = 20$  дб) обнаружение целей со скоростями, близкими к слепым скоростям, не

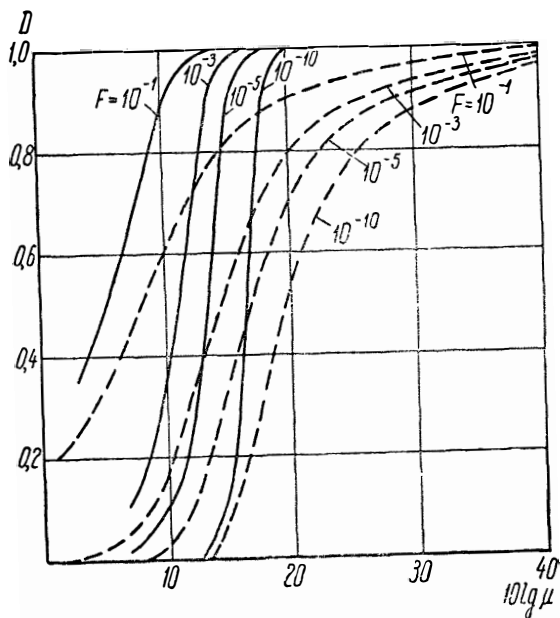


Рис. 38. Сравнение двухканальной (сплошные кривые) и одноканальной (пунктир) схем черес-периодного вычитания при известном  $\Delta\theta$ .

достоверно. Интересно, что при  $\cos \Delta\theta = \frac{1}{2}$ , т. е.

$\Delta\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $\pm 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$  и т. д., имеем:

$$\mu = \frac{p}{2(1-r)} = \mu_0, \quad (42.26)$$

и масштабы на рис. 38 и 39 совпадают.



Мы рассмотрели выше оптимальный радиолокационный приемник при наличии хаотических отражений и собственных шумов. Полезно сравнить полученные нами теоретические результаты с более простыми схемами, в частности с одноканальной когерентной компенсацией хаотических отражений. Рассмотрим прежде всего обработку принятого сигнала за один период.

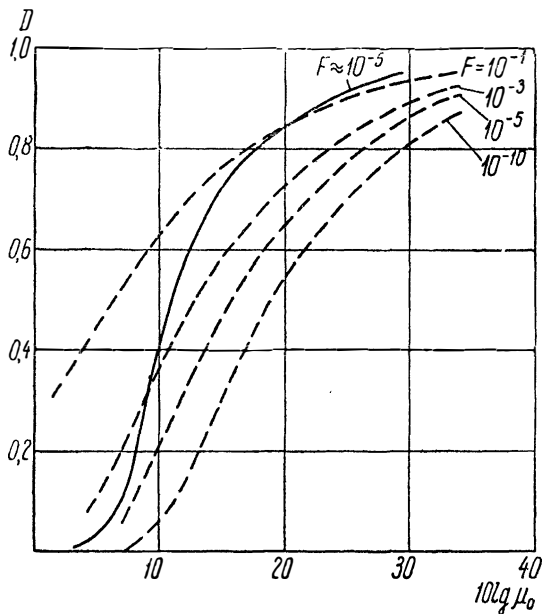


Рис. 39. Сравнение двухканальной (сплошная кривая) и одноканальной (пунктир) схем черес-периодного вычитания при неизвестном  $\Delta\varphi$ .

В оптимальной системе по сравнению с когерентной частотная характеристика определяется формулой (33.15), а частотная характеристика когерентного приемника обычно имеет форму, близкую к прямоугольной. Выигрыш в отношении сигнал/помеха в оптимальной системе по сравнению с прямоугольной был рассмотрен в § 21. Этот выигрыш можно получить неопределенно большим, применяя фильтр Урковица с достаточно широкой полосой частот, однако при этом большую роль начинают играть собственные шумы приемника. Соотношение между мощностью собственных шумов приемника и мощностью хаотических отражений

тических отражений определяют целесообразную ширину полосы фильтра Урковица. Необходимо также напомнить, что если произведение ширины полосы пропускания на длительность импульса  $T_0$  удовлетворяет условию  $\Delta\omega T_0 \leq 4$ , то фильтр Урковица и прямоугольный фильтр дают на выходе примерно одинаковые отношения сигнал/помеха (см. рис. 25).

Если обработка принятых данных в каждом периоде повторения производится неоптимальным образом, то это приводит к уменьшенному значению  $\rho$ , но не препятствует использованию теории оптимального приемника в отношении междупериодной обработки сигналов. Если когерентный метод компенсации хаотических отражений применяется в упрощенном, «одноканальном» варианте, т. е. использует только величину

$$\xi = x_1 - x_2, \quad (42.27)$$

по которой и выносится решение о наличии или отсутствии цели, то в этом случае используется не вся возможная информация. Так, например, при  $\Delta\vartheta = \pi$  и начальной фазе  $\theta = \frac{\pi}{2}$  полезный сигнал не наблюдается, поскольку он должен был появиться в отсутствующем канале  $\eta = y_1 - y_2$ .

Найдем вероятность ложной тревоги  $F_1$  и правильного обнаружения  $D_1$  в одноканальном когерентном приемнике, работающем по правилу

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } |\xi| \geq \xi_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } |\xi| < \xi_*, \text{ то считаем } f = n, \end{array} \right\} \quad (42.28)$$

где  $\xi_*$  — порог решения.

При отсутствии полезного сигнала распределение величины  $\xi$  определяется формулой

$$p_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho(1-r)}} e^{-\frac{\xi^2}{4\rho(1-r)}}, \quad (42.29)$$

и вероятность ложной тревоги  $F_1$  равна

$$F_1 = 2 \int_{\xi_*}^{\infty} p_0(\xi) d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{\xi_*}{\sqrt{2\rho(1-r)}}. \quad (42.30)$$

При наличии сигнала с неизвестным фазовым сдвигом  $\Delta\vartheta$  распределение  $\xi$  определяется формулой

$$\left. \begin{aligned} p_m(z, \Delta\vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_m(z, \Delta\vartheta, \vartheta) d\vartheta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(z - \sqrt{\mu} \cos \vartheta)^2}{2}} d\vartheta, \\ z &= \frac{\xi}{\sqrt{2\rho(1-r)}}, \end{aligned} \right\} (42.31)$$

так что вероятность правильного обнаружения  $D_1(\Delta\vartheta)$  при известном  $\Delta\vartheta$  равна

$$\begin{aligned} D_1(\Delta\vartheta) &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{(z - \sqrt{\mu} \cos \vartheta)^2}{2}} dz = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_* - \sqrt{\mu} \cos \vartheta}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned} \quad (42.32)$$

а полная вероятность правильного обнаружения

$$D_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_1(\Delta\vartheta) d\Delta\vartheta. \quad (42.33)$$

На рис. 38 пунктирными линиями изображена зависимость  $D_1(\Delta\vartheta)$  от параметра  $\mu$ , который по-прежнему определяется формулой (42.16). Мы видим, что при „одноканальной“ компенсации вероятность  $D_1(\Delta\vartheta)$  значительно меньше вероятности, соответствующей компенсации в двух квадратурных каналах. В частности, при  $\mu \sim 15$  дб мы имеем  $D(\Delta\vartheta) \sim 2D_1(\Delta\vartheta)$ , а при больших  $\mu$  функция  $D_1(\Delta\vartheta)$  чрезвычайно медленно стремится к единице. Это объясняется тем, что имеются полезные сигналы со „слепыми“ фазами ( $\vartheta = 0, \pm 2\pi, \dots$ ), которые при одноканальной обработке полностью пропадают. Полезные сигналы, для которых  $\vartheta$  близко к этим значениям, наблюдаются с трудом и обуславливают медленность стремления  $D_1(\Delta\vartheta)$  к единице при  $\mu \rightarrow \infty$ . То же самое мы видим и на рис. 39, где сопо-

ставляются характеристики двухканального (оптимального) и одноканального обнаружения при неизвестном сдвиге частоты. Заметим, что ввиду трудностей вычисления по формулам (42.32) и (42.33) характеристики одноканального приемника, изображенные на рис. 38 и 39, рассчитаны довольно грубо и поэтому не претендуют на большую точность.

В заключение отметим, что одноканальные когерентные радиолокационные приемники, осуществляющие компенсацию хаотических отражений, обычно содержат дополнительные нелинейные элементы, ввиду чего полученные выше теоретические результаты следует применять к ним с некоторой осторожностью.

Г Л А В А VII

**РАДИОЛОКАЦИОННОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ  
«МЕРЦАЮЩЕЙ ЦЕЛИ»**

**§ 43. ФЛЮКТУАЦИИ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА**

Один из интересных вопросов статистической теории приема — это вопрос о радиолокационном обнаружении «мерцающей цели», т. е. об обнаружении полезного сигнала со случайной амплитудой и фазой или пачки таких сигналов. Этот вопрос возникает в связи с тем, что объекты, отражающие радиолокационные сигналы, имеют обычно сложную форму, и при небольших изменениях их ориентации полезный сигнал на входе приемника флюктуирует. Сигнал, отраженный от сложного объекта, формируется в результате наложения полей от многих «светящихся точек», более или менее случайно расположенных по отношению к радиолокатору\*, поэтому флюктуации сигнала происходят по нормальному закону, параметры которого определяются отражающим объектом, характером его движения и зондирующим сигналом.

Предположение о нормальных флюктуациях полезного сигнала является вполне естественным и обычно принимается при расчетах, хотя в ряде случаев оно справедливо лишь качественно. Сочетание теоретических результатов, относящихся к сигналам с фиксированной амплитудой и фазой и к нормально флюктуирующим сигналам, дает достаточно полное теоретическое представление о проблеме радиолокационного обнаружения в целом.

Согласно классификации гл. V, обнаружение флюктуирующих сигналов является сложным обнаружением, поскольку имеются неизвестные случайные параметры — амплитуда и фаза каждого сигнала пачки. Ниже мы рас-

---

\* Понятие «светящейся точки» разъяснено в приложении V.

Смотрим оптимальный приемник, обнаруживающий мерцающую цель по когерентной или некогерентной пачке при наличии коррелированных помех.

Представим процесс на входе приемного устройства в виде

$$f(t) = m(t) + n(t), \quad (43.01)$$

где полезный сигнал  $m(t)$  является пачкой  $L$  сигналов

$$m_x(t) = G_x e_x(t) \cos[\omega_0 t - \psi_x(t) - \vartheta_x], \quad x = 1, \dots, L, \quad (43.02)$$

а  $n(t)$  — помеха, являющаяся нормальным (гауссовым) случайным процессом. Как и в гл. VI, заданные функции  $e_x(t)$  и  $\psi_x(t)$  суть огибающая и дополнительная фаза, определяемые  $x$ -м излучаемым сигналом и расстоянием до цели,  $\omega_0$  — несущая частота,  $G_x$  и  $\vartheta_x$  — случайная амплитуда (огибающая) и фаза  $x$ -го сигнала принимаемой пачки. Мы считаем, что для каждого сигнала  $G_x$  и  $\vartheta_x$  постоянны, но при переходе к следующему сигналу пачки они, вообще говоря, меняются из-за движения цели. Предполагая опять, что радиолокатор излучает последовательность одинаковых сигналов, повторяющихся через промежуток времени  $T$  (период повторения), и идеализируя свойства антенн (ср. стр. 224), мы можем написать

$$e_x(t) = e(t - (x-1)T), \quad \psi_x(t) = \psi(t - (x-1)T), \quad (43.03)$$

и поэтому, переходя от непрерывного времени  $t$  к дискретным значениям функций в моменты

$$\left. \begin{aligned} t_{gx} &= t_1 + (g-1)\Delta t + (x-1)T = t_g + (x-1)T, \\ t_g &= t_1 + (g-1)\Delta t, \\ g &= 1, \dots, H, \quad x = 1, \dots, L, \end{aligned} \right\} \quad (43.04)$$

мы будем иметь

$$e_x(t_{gx}) = e(t_g) = e_g, \quad \psi_x(t_{gx}) = \psi(t_g) = \psi_g, \quad (43.05)$$

так что значения полезного сигнала в момент  $t_{gx}$  будут равны

$$m_{gx} = G_x e_g \cos(\omega_0 t_g - \psi_g - \vartheta_x) \quad (43.06)$$

[ср. формулу (37.09)]. Не ограничивая общности, можно считать

$$\overline{G_x^2} = 2. \quad (43.07)$$

Случайную фазу  $\kappa$ -го сигнала в когерентной пачке можно представить в виде

$$\vartheta_{\kappa} = (\kappa - 1) \Delta\vartheta + \gamma_{\kappa}, \quad \kappa = 1, \dots, L, \quad (43.08)$$

где первое слагаемое обусловлено равномерным движением цели в пространстве, а второе — ее мерцанием.

Рассмотрим статистические свойства мерцаний, т. е. случайных величин  $G_{\kappa}$  и  $\vartheta_{\kappa}$  или величин

$$u_{\kappa} = G_{\kappa} \cos \gamma_{\kappa}, \quad v_{\kappa} = G_{\kappa} \sin \gamma_{\kappa}, \quad (43.09)$$

связанных с ними. Предполагая, что мерцание цели представляет собой стационарный случайный процесс, мы можем ввести коэффициенты корреляции (ср. § 60)

$$\left. \begin{aligned} r_{\kappa\lambda}^{(1)} &= r_{\lambda\kappa}^{(1)} = \overline{u_{\kappa} u_{\lambda}} = \overline{v_{\kappa} v_{\lambda}}, \\ r_{\kappa\lambda}^{(2)} &= -r_{\lambda\kappa}^{(2)} = \overline{u_{\kappa} v_{\lambda}} = -\overline{u_{\lambda} v_{\kappa}}, \end{aligned} \right\} \quad (43.10)$$

зависящие только от разности  $\kappa - \lambda$  и удовлетворяющие соотношениям

$$r_{\kappa\kappa}^{(1)} = 1, \quad r_{\kappa\kappa}^{(2)} = 0. \quad (43.11)$$

Первое из этих соотношений вытекает из формулы (43.07), а второе — непосредственно очевидно. Вводя комплексные случайные величины

$$\omega_{\kappa} = u_{\kappa} - i v_{\kappa} = G_{\kappa} e^{-i\gamma_{\kappa}}, \quad \omega_{\kappa}^* = u_{\kappa} + i v_{\kappa} = G_{\kappa} e^{i\gamma_{\kappa}}, \quad (43.12)$$

будем иметь

$$\overline{\omega_{\kappa}^* \omega_{\lambda}} = 2r_{\kappa\lambda}^m, \quad \text{где } r_{\kappa\lambda}^m = r_{\kappa\lambda}^{(1)} - i r_{\kappa\lambda}^{(2)} = (r_{\lambda\kappa}^m)^*, \quad (43.13)$$

причем комплексные числа  $r_{\kappa\lambda}^m$  образуют эрмитову матрицу. Обозначая через  $q_{\kappa\lambda}^m$  элементы обратной матрицы, можно записать распределение вероятностей величин  $\omega_{\kappa}$  и  $\omega_{\kappa}^*$  в виде (ср. § 59)

$$\begin{aligned} p(\omega_1, \omega_1^*, \dots, \omega_L, \omega_L^*) &= \\ &= \frac{1}{(4\pi)^L \text{Det} \| r_{\kappa\lambda}^m \|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\kappa, \lambda=1}^L q_{\kappa\lambda}^m \omega_{\kappa} \omega_{\lambda}^* \right\}. \end{aligned} \quad (43.14)$$

Помеху  $n(t)$  мы считали в предыдущей главе стационарным случайным процессом, имеющим моменты

$$\overline{n_{g_x}} = 0, \quad \overline{n_{g_x} n_{h_\lambda}} = R_{gh} r_{x\lambda}; \quad g, h = 1, \dots, H; \quad x, \lambda = 1, \dots, L, \quad (43.15)$$

где  $R_{gh} = R_p(|g - h| \Delta t)$  есть внутривнутрипериодная функция корреляции, а  $r_{x\lambda} = r(|x - \lambda| T)$  — междупериодный коэффициент корреляции.

При исследовании обнаружения „мерцающей цели“ по когерентной пачке сигналов формулу (43.15) нельзя считать достаточно общей. Действительно, согласно формулам (43.10) и (43.13) мерцание цели характеризуется двумя коэффициентами корреляции  $r_{x\lambda}^{(1)}$  и  $r_{x\lambda}^{(2)}$  или одним комплексным коэффициентом  $r_{x\lambda}^m$ , а в формуле (43.15) статистические свойства помехи характеризуются только одним вещественным коэффициентом  $r_{x\lambda}$ . Между тем с физической точки зрения очевидно, что помеха, обусловленная хаотическими отражениями от многих рассеивающих центров, должна испытывать междупериодные флюктуации такого же характера, как и сигнал, отраженный от мерцающей цели.

Поэтому для когерентной пачки мы будем в данной главе использовать более общее выражение

$$\overline{n_{g_x} n_{h_\lambda}} = \operatorname{Re} \{ R_{gh} r_{x\lambda} e^{i(x-\lambda) \Delta \psi} \}, \quad (43.16)$$

выведенное в конце § 69. Здесь  $\|R_{gh}\|$  и  $\|r_{x\lambda}\|$  — комплексные (эрмитовы) матрицы, соответствующие внутривнутрипериодной и междупериодной корреляциям, а  $\Delta \psi$  — приращение фазы, соответствующее движению рассеивающих центров „в целом“.

Для некогерентной пачки, как легко видеть, формулы (43.15) и (43.16) становятся эквивалентными, поскольку для нее можно положить

$$r_{x\lambda} = 0 \text{ при } x \neq \lambda, \quad r_{xx} = 1, \quad (43.17)$$

т. е. считать, что помеха междупериодной корреляцией не обладает. При этом  $R_{gh}$  в формуле (43.15) означает то же, что  $\operatorname{Re} R_{gh}$  в формуле (43.16).

Для собственных шумов приемника междупериодная корреляция всегда отсутствует, а для помехи, образован-



ной хаотическими отражениями, корреляция исчезает вследствие независимости фаз передаваемых сигналов (ср. гл. VI). Однако помеха, обусловленная хаотическими отражениями, при некогерентных сигналах теряет свой нормальный характер; исключение составляет «быстро меняющаяся» помеха (см. конец § 67). Поэтому при исследовании обнаружения некогерентной пачки мы имеем в виду, главным образом, помехи типа собственных шумов приемника.

Как мы увидим ниже, оптимальная междупериодная обработка для некогерентной пачки становится более однообразной и менее эффективной, чем в случае когерентной пачки сигналов.

#### § 44. КОЭФФИЦИЕНТ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ НЕКОГЕРЕНТНОЙ ПАЧКИ

Пачку из  $L$  некогерентных сигналов, приходящих в приемник от „мерцающей цели“, можно представить в виде (43.02), однако в отличие от когерентной пачки, для которой справедлива формула (43.08), фазы  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_L$  независимы, поскольку излучаемые сигналы имеют случайные фазы, которые при приеме не используются, т. е. считаются неизвестными. Что же касается амплитуд  $G_x$ , то они в общем случае статистически связаны друг с другом. Если их нормировать по формуле (43.07), то одномерная функция распределения равна

$$p(G_x) = G_x e^{-\frac{G_x^2}{2}}, \quad (44.01)$$

а двумерная функция распределения определяется формулой (60.19).

Коэффициент правдоподобия, определяющий функционирование оптимального приемника обнаружения, получается в результате интегрирования функции

$$\Lambda(G_1, \dots, G_L; \vartheta_1, \dots, \vartheta_L) = p_m(G_1, \dots, G_L; \vartheta_1, \dots, \vartheta_L) e^{\varphi - \frac{1}{2}\mu} \quad (44.02)$$

по всем возможным значениям  $G_x$  и  $\vartheta_x$ . Здесь

$$p_m(G_1, \dots, G_L; \vartheta_1, \dots, \vartheta_L) = \frac{1}{(2\pi)^L} p_m(G_1, \dots, G_L) \quad (44.03)$$

есть плотность вероятности случайных величин  $G_x$  и  $\vartheta_x$ , а в силу формулы (43.17) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_x G_x \sum_{g, h} Q_{gh} f_{g_x} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h - \vartheta_x), \\ \mu &= \sum_x G_x^2 \sum_{g, h} Q_{gh} e_g e_h \cos[\omega_0(t_g - t_h) - (\psi_g - \psi_h)] = \\ &= \rho \sum_x G_x^2, \end{aligned} \right\} \quad (44.04)$$

где  $Q_{gh}$  — элементы матрицы, обратной  $\|R_{gh}\|$ , а

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{g, h} Q_{gh} e_g e_h \cos[\omega_0(t_g - t_h) - (\psi_g - \psi_h)] \quad (44.05)$$

есть эффективное отношение сигнал/помеха за один период повторения (при  $G_x = 1$ ), введенное в § 38.

Интегрирование функции (44.02) по всем фазам  $\vartheta_x$ , являющимся независимыми случайными величинами, приводит к коэффициенту правдоподобия

$$\Lambda(G_1, \dots, G_L) = p_m(G_1, \dots, G_L) e^{-\frac{1}{2} \mu} \prod_{x=1}^L I_0(G_x \mathcal{E}_x), \quad (44.06)$$

где величины

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \sqrt{x_x^2 + y_x^2}, \\ x_x &= \sum_{g, h} Q_{gh} f_{g_x} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h), \\ y_x &= \sum_{g, h} Q_{gh} f_{g_x} e_h \sin(\omega_0 t_h - \psi_h) \end{aligned} \right\} \quad (44.07)$$

были введены выше в формулах (37.15).

Дальнейшее усреднение по  $G_x$  при  $L = 1$  дает

$$\Lambda = \int_0^{\infty} G_1 \exp\left\{-\frac{(1+\rho)G_1^2}{2}\right\} I_0(G_1 \mathcal{E}_1) dG_1 = \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{\frac{\mathcal{E}_1^2}{2(1+\rho)}\right\}. \quad (44.08)$$

Этот результат мы уже имели в § 34 [см. формулу (34.16)]. При  $L=2$  в силу формулы (60.19) мы получаем интеграл

$$\Lambda = \frac{1}{1-p^2} \int_0^\infty G_1 G_2 \exp\left\{-\frac{1}{2} \times \right. \\ \left. \times \left(\rho + \frac{1}{1-p^2}\right) (G_1^2 + G_2^2)\right\} I_0(G_1 \mathcal{E}_1) I_0(G_2 \mathcal{E}_2) I_0\left(\frac{\rho G_1 G_2}{1+p^2}\right) dG_1 dG_2, \quad (44.09)$$

где

$$p = |r_{12}^m|. \quad (44.10)$$

Дважды применив формулу для второго экспоненциального интеграла Вебера (см. Ватсон, стр. 433), мы получим из формулы (44.09) выражение

$$\Lambda = Q \exp\left\{\frac{Q}{2} [1 + \rho(1-p^2)] (\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2)\right\} I_0(\rho Q \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2), \quad (44.11)$$

где

$$Q = \frac{\Pi^{\frac{1}{2}}}{1 + 2\rho + \rho^2(1-p^2)}. \quad (44.12)$$

Рассмотрение пачки из трех и более сигналов при произвольном законе мерцания наталкивается на серьезные трудности. Поэтому при  $L \geq 3$  мы ограничимся исследованием предельных случаев, соответствующих независимым (или быстрым) и полностью коррелированным (медленным или одинаковым) мерцаниям. Для независимых мерцаний все  $G_x$  являются независимыми случайными величинами, и формулы (44.06) и (44.08) дают

$$\Lambda = \frac{1}{(1+\rho)^L} \exp\left\{\frac{1}{2(1+\rho)} \sum_x \mathcal{E}_x^2\right\}. \quad (44.13)$$

Наоборот, для полностью коррелированных мерцаний все  $G_x$  равны, и

$$\Lambda = \int_0^\infty G \exp\left\{-\frac{(1+L\rho)G^2}{2}\right\} \Pi_x I_0(G \mathcal{E}_x) dG. \quad (44.14)$$

Если воспользоваться приближенным выражением

$$I_0(x) = e^{\frac{x^2}{4}}, \quad (44.15)$$

пригодным при малых значениях аргумента  $x$ , то интеграл (44.14) вычисляется, и

$$\Lambda = \frac{1}{1 + L\rho - \frac{1}{2} \sum_x \mathcal{E}_x^2}. \quad (44.16)$$

Формула (44.13) показывает, что оптимальный приемник, обнаруживающий быстро мерцающую цель, должен образовывать величину  $\mathcal{E}$  по формуле

$$\mathcal{E}^2 = \sum_{x=1}^L \mathcal{E}_x^2 = \sum_x (x_x^2 + y_x^2), \quad (44.17)$$

т. е. производить оптимальную внутрипериодную обработку входного сигнала (ср. § 33 и 38) и затем — накопление после квадратичного детектора. Если мерцания происходят более медленно, то коэффициент правдоподобия, как видно из формул (44.11) и (44.16), выражается через величину (44.17) при малых  $\mathcal{E}_x$ , т. е. при малых значениях параметра (44.05). Тот же результат получается при отсутствии мерцаний, когда сигналы в пачке имеют фиксированную амплитуду (ср. § 37). При малых  $\rho$  потребность в оптимальной обработке многих периодов повторения наиболее велика, поскольку тогда по данным одного периода к достоверным решениям прийти нельзя: по этой причине мы будем исследовать приемник, образующий величину (44.17).

Из формул (44.11) и (44.14) следует, что при интенсивных и сильно коррелированных сигналах оптимальное накопление должно производиться после линейного детектора. Действительно, при  $\rho \approx 1$  и  $Q\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \gg 1$  формула (44.13) принимает вид

$$\Lambda = \sqrt{\frac{Q}{2\pi\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}} \exp\left\{\frac{Q}{2}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2\right\}, \quad (44.18)$$

причем предэкспоненциальный множитель на значение  $\Lambda$  влияет слабо. Заменяя в интеграле (44.14) функции  $I_0(G\mathcal{E}_x)$  асимптотическим выражением (37.21), подобным же образом приходим к заключению, что коэффициент  $\Lambda$  в основном определяется величиной

$$S = \sum_{x=1}^L \mathcal{E}_x, \quad (44.19)$$

получаемой в результате накопления после линейного детектора или, иначе говоря, линейного суммирования.

В следующем параграфе мы вычислим вероятности  $F$  и  $D$  для приемника, образующего величину (44.17), т. е. производящего квадратичное суммирование и принимающего решение по схеме

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \mathcal{E} \geq \mathcal{E}_*, \text{ то считаем } f = m + n, \\ \text{если } \mathcal{E} < \mathcal{E}_*, \text{ то считаем } f = n, \end{array} \right\} \quad (44.20)$$

где  $\mathcal{E}_*$  — порог.

#### § 45. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКА, ПРОИЗВОДЯЩЕГО КВАДРАТИЧНОЕ СУММИРОВАНИЕ

Если полезный сигнал отсутствует, то нормальные случайные величины  $x_x$  и  $y_x$  сводятся к величинам  $x_{nx}$  и  $y_{nx}$ , определяемым формулами (42.05). Поскольку помеха не обладает междупериодной корреляцией, все  $2L$  нормальных величин  $x_{nx}$  и  $y_{nx}$  независимы, причем их моменты равны

$$\overline{x_{nx}} = \overline{y_{nx}} = 0, \quad \overline{x_{nx}^2} = \overline{y_{nx}^2} = \rho, \quad x = 1, \dots, L. \quad (45.01)$$

Величина  $z = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\rho}}$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $2L$  степенями свободы (ср. § 38), а именно

$$p_{0L}(z) = \frac{z^{2L-1}}{2^{L-1}(L-1)!} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (45.02)$$

и вероятность ложной тревоги равна

$$F = \int_{z_*}^{\infty} p_{0L}(z) dz = \frac{1}{2^{L-1}(L-1)!} \int_{z_*}^{\infty} z^{2L-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{\mathcal{E}_*}{\sqrt{\rho}}. \quad (45.03)$$

При наличии полезного сигнала следует в формуле (45.01) заменить  $\rho$  на  $\rho(1 + \rho)$ , как это видно из выражений (34.28) и (34.29). Для некоррелированных (быстрых) мерцаний, когда все  $G_x$  независимы, формула (45.02) также

применима, если заменить  $z = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\rho}}$  на  $z = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\rho(1+\rho)}}$ , и вероятность правильного обнаружения равна

$$D = \frac{1}{2^{L-1}(L-1)!} \int_{\frac{z_*}{\sqrt{1+\rho}}}^{\infty} z^{2L-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (45.04)$$

Для полностью коррелированных (медленных) мерцаний все  $G_x$  в пачке равны, так что мы имеем пачку сигналов с одинаковой амплитудой  $G$ . При фиксированном  $G$  величина  $z = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\rho}}$  имеет функцию распределения

$$p_L(G, z) = \frac{z^L}{(L\rho G^2)^{\frac{L-1}{2}}} e^{-\frac{L\rho G^2 + z^2}{2}} I_{L-1}(\sqrt{L\rho} Gz), \quad (45.05)$$

получаемую из формулы (38.13) заменой  $\rho$  на  $\rho G^2$  [ср. формулы (32.03) и (44.04)]. Искомая функция распределения величины  $z$  равна (см. Ватсон, стр. 431),

$$\left. \begin{aligned} p_{mL}(z) &= \int_0^{\infty} G e^{-\frac{G^2}{2}} p_L(G, z) dG = \\ &= \frac{z^{2L-1}}{2^{L-1}(L-1)!} \cdot \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1+L\rho} {}_1F_1\left(1; L; \frac{qz^2}{2}\right); \quad q = \frac{L\rho}{1+L\rho}, \\ {}_1F_1(1; L; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L-1)!}{(L-1+n)!} x^n = \left( e^x - \sum_{n=0}^{L-2} \frac{x^n}{n!} \right). \end{aligned} \right\} \quad (45.06)$$

Эту функцию можно представить так:

$$p_{mL}(z) = \frac{ze^{-\frac{z^2}{2(1+L\rho)}}}{(1+L\rho)q^{L-1}} \cdot \frac{1}{2^{L-2}(L-2)!} \int_0^{\sqrt{q}z} t^{2L-3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (45.07)$$

и вычислять с помощью таблиц распределения  $\chi^2$ . Эквивалентность формул (45.06) и (45.07) нетрудно доказать повторным интегрированием по частям.

Вероятность правильного обнаружения получается путем интегрирования по частям в виде

$$D = \int_{z_*}^{\infty} p_{mL}(z) dz = \frac{1}{2^{L-2} 2(L-2)!} \int_{z_*}^{\infty} z^{2L-3} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \\ + \frac{e^{-\frac{z_*^2}{2(1-L\rho)}}}{q^{L-1}} \cdot \frac{1}{2^{L-2} (L-2)!} \int_0^{\sqrt{q} z_*} z^{2L-3} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (45.08)$$

При  $L=1$  формулы (45.03) и (45.04) приводят к выражениям

$$F = e^{-\frac{z_*^2}{2}}, \quad D = e^{-\frac{z_*^2}{2(1+\rho)}} = F^{\frac{1}{1+\rho}}, \quad (45.09)$$

выведенным нами уже в § 34. При  $L \geq 2$  квадратичное накопление сигналов от быстрой и медленно мерцающей цели приводит к различным вероятностям правильного обнаружения.

Для пачки из двух сигналов ( $L=2$ ) можно вычислить  $D$  при любом значении коэффициента (44.10), т. е. при любой корреляции мерцаний. Действительно, функция распределения величин  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  согласно формуле (60.22) равна

$$p(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{\rho^2 (1+\rho)^2 (1-r^2)} \exp \left\{ -\frac{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2}{2\rho (1+\rho) (1-r^2)} \right\} \times \\ \times I_0 \left( \frac{r \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{\rho (1+\rho) (1-r^2)} \right), \quad (45.10)$$

где

$$r = \frac{\rho \rho}{1+\rho} \quad (45.11)$$

есть коэффициент корреляции смеси сигнала и помехи.

Формула (45.10) обосновывается следующим образом. Для пачки из двух когерентных сигналов имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \sqrt{x_x^2 + y_x^2}, \quad \overline{x_x} = \overline{y_x} = 0, \quad \overline{x_x^2} = \overline{y_x^2} = \rho(1+\rho), \\ \overline{x_1 x_2} = \overline{y_1 y_2} &= \rho^2 \rho \cos \delta, \quad \overline{x_1 y_2} = -\overline{x_2 y_1} = \rho^2 \rho \sin \delta, \end{aligned} \right\} (45.12)$$

вытекающие из комплексных формул (47.17), выведенных ниже, причем

$$r_{12}^m = p e^{i\delta}, \quad \delta = \varepsilon + \Delta\theta \quad (45.13)$$

и  $\Delta\theta$  есть приращение фазы, обусловленное движением цели. Очевидно, что для когерентной пачки  $x_1, x_2, y_1$  и  $y_2$  являются нормальными случайными величинами, поэтому обозначая

$$x_x = \mathcal{G}_x \cos \Phi_x, \quad y_x = \mathcal{G}_x \sin \Phi_x, \quad (45.14)$$

можно воспользоваться формулой (60.16), которая в данном случае принимает вид

$$p(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^2 (1-r^2)} \exp \left\{ -\frac{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 - 2r\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1 + \varepsilon + \Delta\theta)}{2(1-r^2)} \right\}. \quad (45.15)$$

Если теперь считать все возможные значения  $\Delta\theta$  равновероятными и проинтегрировать по  $\Delta\theta$ , а затем по любой из фаз  $\Phi_x$ , то мы и приходим к формуле (45.10). С другой стороны, пачка из двух когерентных сигналов при произвольном значении  $\Delta\theta$  в формуле (43.08) является по существу некогерентной пачкой, откуда и вытекает применимость формулы (45.10) в данном случае.

Функция распределения величины  $\mathcal{G}$  для двух сигналов равна

$$p(\mathcal{G}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\mathcal{G} \cos \beta, \mathcal{G} \sin \beta) d\beta \quad (45.16)$$

[ср. формулу (38.08)]. Подставляя в эту формулу выражение (45.10) для функции  $p(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = p(\mathcal{G} \cos \beta, \mathcal{G} \sin \beta)$ , получим для величины  $z = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{\rho}}$  плотность вероятности

$$p(z) = \frac{z^2 \exp \left\{ -\frac{z^2}{2(1+\rho)(1-r^2)} \right\}}{\rho(1+\rho)^2(1-r^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0 \left( \frac{rz^2 \cos \beta \sin \beta}{(1+\rho)(1-r^2)} \right) \cos \beta \sin \beta d\beta, \quad (45.17)$$



которая с помощью первого определенного интеграла Сонина (Ватсон, стр. 406) приводится к виду

$$p(z) = \frac{z}{r(1+\rho)} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2(1+\rho)} \right\} \operatorname{sh} \frac{rz^2}{2(1+\rho)(1-r^2)}. \quad (45.18)$$

Вероятность правильного обнаружения равна

$$D = \int_{z_*}^{\infty} p(z) dz = \exp \left\{ -\frac{z_*^2}{2(1+\rho)(1-r^2)} \right\} \left[ \operatorname{ch} \frac{rz_*^2}{2(1+\rho)(1-r^2)} + \frac{1}{r} \operatorname{sh} \frac{rz_*^2}{2(1+\rho)(1-r^2)} \right]. \quad (45.19)$$

При  $r = \rho = 0$  эта формула дает выражение

$$D = \exp \left\{ -\frac{z_*^2}{2(1+\rho)} \right\} \left[ 1 + \frac{z_*^2}{2(1+\rho)} \right], \quad (45.20)$$

согласующееся с формулой (45.04) при  $L=2$ . Полагая  $\rho=1$ , получим

$$D = \frac{1}{2\rho} \left[ (1+2\rho) \exp \left\{ -\frac{z_*^2}{2(1+\rho)} \right\} - \exp \left\{ -\frac{z_*^2}{2} \right\} \right], \quad (45.21)$$

что совпадает с формулой (45.08) при  $L=2$ .

Заметим, что аналогичные формулы получаются, если накопление импульсов производить после квадратичного детектора при произвольной линейной обработке входного сигнала, в то время как выше мы предполагали линейную обработку оптимальной. Неоптимальность линейной обработки лишь уменьшает параметр  $\rho$  — отношение сигнал/помеха за период повторения, но не препятствует рассмотрению дальнейших преобразований смеси сигнала и помехи, которые происходят так же, как и после оптимальной линейной обработки, но с другим (уменьшенным) значением  $\rho$  (ср. § 38 и 42).

На рис. 40 дана зависимость  $L$  — числа сигналов в пачке — от параметра  $\rho$  при заданной вероятности ложной тревоги  $F=10^{-10}$  и вероятностях правильного обнаружения  $D=0,5$  и  $D=0,9$ . Сплошные линии на рис. 40,а соответствуют быстрым (независимым) мерцаниям цели, на рис. 40,б — медленным (одинаковым) мерцаниям. Пунктиром на рис. 40,а и 40,б нанесены кривые для цели, дающей пачку сигналов с постоянной (нефлюктуирующей)

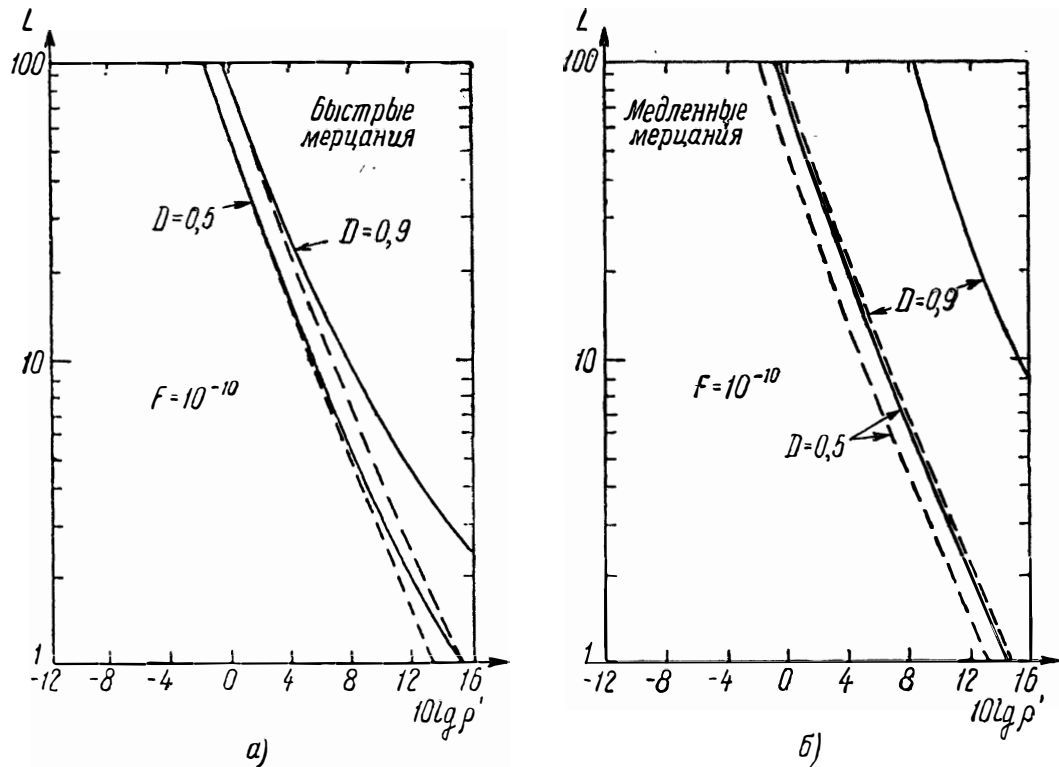


рис. 40. Характеристики приемника, обнаруживающего мерцающую цель по некогерентной пачке сигналов: а) быстрые (некоррелированные) мерцания; б) медленные (жестко коррелированные) мерцания. Пунктиром изображены характеристики обнаружения постоянной цели (одинаковые на обоих чертежах).

амплитудой; эти кривые одинаковы для обоих рисунков — они позволяют судить, насколько приходится увеличивать энергию каждого сигнала, чтобы обеспечить обнаружение мерцающей цели при тех же  $L$ ,  $F$  и  $D$ .

Мы видим, что для быстрых флуктуаций необходимое приращение невелико, причем при росте  $L$  и уменьшении  $D$  это приращение падает. Действительно, при больших  $L$  появление серии сигналов с малой энергией мало вероятно и согласно закону больших чисел энергия пачки будет испытывать тем меньшие случайные колебания около средней величины, чем больше  $L$ . Если же  $L$  невелико (скажем,  $L < 5$ ), то вступает в силу обстоятельство, уже отмеченное ранее (см. § 32 и 34), в силу которого уверенное обнаружение ( $D \geq 0,5$ ) флуктуирующего полезного сигнала требует тем большего приращения  $\rho$ , чем ближе требуемая вероятность  $D$  к единице.

При сравнении пачки постоянных сигналов с пачкой флуктуирующих сигналов нужно иметь в виду, что для одного флуктуирующего сигнала согласно формулам (44.04) и (43.07) мы имеем:

$$\mu = \rho G_1^2, \quad \bar{\mu} = 2\rho, \quad (45.22)$$

в то время как для постоянного сигнала  $\mu = \rho$ . Поэтому, чтобы достичь сближения кривых при  $L \rightarrow \infty$ , по оси абсцисс на рис. 40,а откладывается параметр

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \rho \text{ для флуктуирующих сигналов,} \\ \rho' &= \frac{1}{2} \rho \text{ для постоянных сигналов,} \end{aligned} \right\} \quad (45.23)$$

причем для единообразия то же сделано и на рис. 40,б, 41,а и 41,б.

Рис. 40,б показывает, что обнаружение медленно мерцающей цели по пачке из  $L$  сигналов с вероятностью  $D \geq 0,5$  требует, как и обнаружение одиночного флуктуирующего сигнала, определенного увеличения  $\rho'$  по сравнению с постоянной целью (§ 34). Требуемое приращение  $\rho'$  в децибелах почти не зависит от  $L$  и резко возрастает при стремлении  $D$  к единице.

На рис. 41 дана зависимость вероятности правильного обнаружения  $D$  от  $\rho'$  для пачки из двух сигналов с различными коэффициентами корреляции  $\rho$  при  $F = 10^{-10}$  и  $F = 10^{-5}$ . Мы видим, что при больших  $\rho'$  вероятность правильного обнаружения зависит от коэффициента корреляции

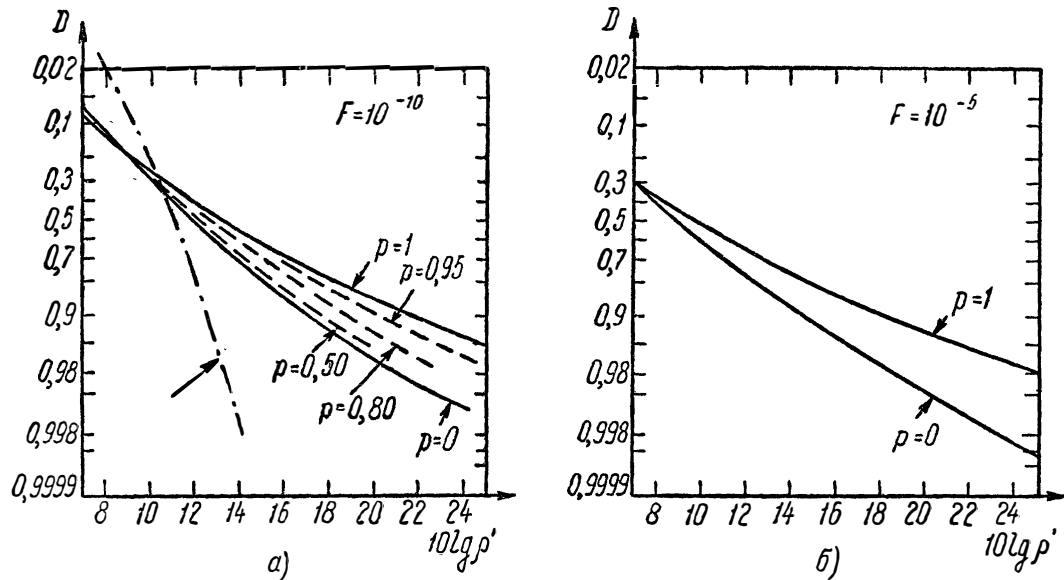


Рис. 41. Характеристики обнаружения двух некогерентных сигналов при различных значениях коэффициента корреляции мерцаний  $\rho$ : а) при  $F = 10^{-10}$ ; (штрих-пунктир — постоянная цель); б) при  $F = 10^{-5}$ .

ляции  $p$ , в то время как при  $\rho' < 10$  дБ эта зависимость практически отсутствует. Заметим также, что предположения о некоррелированных ( $\rho = 0$ ) и полностью коррелированных ( $\rho = 1$ ) мерцаниях позволяют установить границы, в которых заключены интересующие нас характеристики приемника при промежуточных значениях  $p$ .

Рис. 40 и 41 заимствованы нами из статьи М. Шварца, чем и объясняется их „нестандартная“ форма. Следует отметить, что в литературе под отношением сигнал/помеха часто понимают параметр  $\rho'$ , определяемый формулами (45.23).

#### § 46. РАЗЛИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОБ ОБНАРУЖЕНИИ НЕКОГЕРЕНТНОЙ ПАЧКИ

На основании формул, полученных в предыдущих параграфах, можно произвести ряд расчетов, относящихся к некогерентным радиолокаторам. Наиболее простые результаты при этом получаются, если рассматривать обнаружение быстро мерцающей цели по величине

$$Z = \frac{z^2}{2} = \frac{\mathcal{E}^2}{2\rho} = \frac{1}{2\rho} \sum_x \mathcal{E}_x^2 = \frac{1}{2\rho} \sum_x (x_x^2 + y_x^2); \quad (46.01)$$

величина  $2Z$  как при наличии, так и при отсутствии сигнала имеет распределение  $\chi^2$  с  $2L$  степенями свободы.

Напомним, что  $L$  есть число периодов повторения — число импульсов или других сигналов, по которым мы должны обнаружить цель. Ясно, что при увеличении  $L$  распределение величины  $Z$  должно стремиться к нормальному в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей. Если воспользоваться нормальным распределением при конечных значениях  $L$  как некоторой аппроксимацией, допустимость которой затем проверяется более точным вычислением, то получаются, как правило, весьма простые соотношения, позволяющие легко разобраться в существе дела.

В качестве примера мы рассмотрим следующий вопрос: какое число  $L$  зондирующих сигналов является оптимальным для обнаружения быстро мерцающей цели, при фиксированной суммарной (полной) энергии всех сигналов? Иначе говоря, на какое число периодов повторения  $L$  наиболее выгодно распределить заданную энергию, чтобы наилучшим образом обнаружить цель?

Поскольку параметр  $\rho$  пропорционален энергии полезного сигнала за один период повторения, полная энергия пачки пропорциональна величине

$$\mu = L\rho, \quad (46.02)$$

которая по условию задачи фиксирована, так как уровень помех постоянен. Задана также вероятность ложной тревоги  $F$ , и надо найти значение  $L$ , при котором вероятность правильного обнаружения  $D$  максимальна.

Поскольку  $D$  есть, очевидно, монотонно возрастающая функция  $\mu$ , можно поставить задачу несколько иначе: задать  $F$  и  $D$  и искать  $L$ , при котором необходимое значение  $\mu$  минимально.

Нормальная аппроксимация распределения (45.02) определяется первым и вторым моментами случайной величины  $Z$ . При отсутствии сигнала имеем:

$$\bar{Z} = L, \quad \overline{Z^2} - (\bar{Z})^2 = L, \quad (46.03)$$

причем первое соотношение вытекает из формул (45.01), а второе — из тождеств

$$\left. \begin{aligned} \overline{x_x^2 x_\lambda^2} = \overline{y_x^2 y_\lambda^2} = \rho^2 \quad (\text{при } x \neq \lambda), \\ \overline{x_x^2 y_\lambda^2} = \rho^2, \quad \overline{x_x^4} = \overline{y_x^4} = 3\rho^2, \end{aligned} \right\} \quad (46.04)$$

являющихся, в сущности, частными случаями формулы (35.30). Они дают

$$\overline{Z^2} = L(L + 1), \quad (46.05)$$

откуда и получается вторая формула (46.03). Поэтому в отсутствие полезных сигналов распределение  $Z$  равно

$$p_0(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \exp \left\{ -\frac{(Z-L)^2}{2L} \right\}, \quad (46.06)$$

так что вероятность ложной тревоги равна

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad a = \frac{Z_* - L}{\sqrt{L}}. \quad (46.07)$$

При наличии полезного сигнала в формулах (46.04) нужно заменить  $\rho$  на  $\rho(1 + \rho)$ , так что формулы (46.03) принимают вид

$$\bar{Z} = L(1 + \rho), \quad \overline{Z^2} - (\bar{Z})^2 = L(1 + \rho)^2 \quad (46.08)$$

и вместо функции распределения (46.06) мы получаем

$$p_m(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L(1+\rho)}} \exp \left\{ -\frac{[Z - L(1+\rho)]^2}{2L(1+\rho)^2} \right\}. \quad (46.09)$$

Вероятность правильного обнаружения будет равна

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad b = \frac{Z_* - L}{\sqrt{L}}. \quad (46.10)$$

При заданных  $F$  и  $D$  пределы  $a$  и  $b$  также заданы, однако в силу формулы (46.02) между ними существует следующая связь

$$b = \frac{a - \rho\sqrt{L}}{1 + \rho} = \frac{a - \frac{\mu}{\sqrt{L}}}{1 + \frac{\mu}{L}}, \quad (46.11)$$

откуда

$$\mu = \frac{a - b}{\frac{b}{L} + \frac{1}{\sqrt{L}}}, \quad (46.12)$$

что и дает нам зависимость  $\mu$  от  $F, D$  и  $L$ . Минимум  $\mu$  достигается при

$$-\frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{b}{L} + \frac{1}{\sqrt{L}} \right) = \frac{b}{L^2} + \frac{1}{2L^{3/2}} = 0, \quad (46.13)$$

т. е. при

$$\sqrt{L} = -2b. \quad (46.14)$$

Мы видим, что экстремум достигается лишь при  $b < 0$ , т. е. при  $D > \frac{1}{2}$ , что мы и будем предполагать в дальнейшем. Соответствующее значение  $L$ , равное

$$L = 4b^2, \quad (46.15)$$

как легко проверить, действительно соответствует минимальному значению величины (46.12), равному

$$\mu_{\min} = -4b(a - b), \quad (46.16)$$

так что если, например, взять

$$D = 1 - F, \quad a = -b, \quad (46.17)$$

то

$$\mu_{\min} = 8a^2 = 2L. \quad (46.18)$$

В предыдущих рассуждениях мы считали  $L$  непрерывным параметром; фактически, разумеется, в формулах (46.14) и (46.15) нужно брать ближайшее целое значение.

Наличие минимума у функции  $\mu = \mu(L)$  легко понять. Действительно, достоверное обнаружение мерцающей цели по одному сигналу требует больших  $\mu$ , поскольку всегда есть опасность получить малую амплитуду полезного сигнала (ср. § 32). Увеличение  $\mu$  при уменьшении  $L$  передает и формула (46.12), хотя при малых  $L$  она неприменима. Вероятность появления малых амплитуд во всей пачке из  $L$  независимо флюктуирующих сигналов тем меньше, чем больше  $L$ , поэтому при увеличении  $L$  величина  $\mu$  сигнала уменьшается. Однако при слишком сильном „раздроблении“ энергии параметр  $\mu$  опять начинает расти, так что согласно формуле (46.12)

$$\mu \approx (a - b) \sqrt{L} \text{ при } L \rightarrow \infty. \quad (46.19)$$

Это объясняется тем, что при достаточно больших  $L$  величина  $\rho = \frac{\mu}{L}$  для каждого сигнала в пачке становится ма-

лой и наступает явление подавления слабого сигнала сильным шумом (ср. § 18, 33 и 38). Это подавление характерно для *некогерентного* радиолокатора, в котором сигналы со случайными фазами детектируются и лишь затем суммируются.

Если  $b \rightarrow 0$  (и, следовательно,  $D \rightarrow \frac{1}{2}$ ), то по формуле (46.15) оптимальное значение  $L$  стремится к нулю и само наше рассмотрение (правильное лишь при больших  $L$ ) становится сомнительным. При  $b > 0$ , когда  $D < \frac{1}{2}$ , урав-

нение (46.14) вообще не имеет корней, так что, по крайней мере при больших  $L$ , величина  $\mu$  есть монотонно возрастающая функция  $L$ . В этом случае оптимальным является значение  $L = 1$ , поскольку недостоверное обнаружение мерцающей цели (с вероятностью  $D < \frac{1}{2}$ ) по одному сигналу

требует согласно § 34 сравнительно малых значений  $\mu$ .

Если  $L$  достаточно велико (скажем,  $L > 50$ ), то точность распределения (46.06) является неравномерной: при увеличении  $|Z - L|$  формула (46.06) по отношению к точной формуле (45.02) дает все большую погрешность. Это



видно хотя бы из того, что по точной формуле должно быть

$$\rho_0(Z) = 0 \text{ при } Z < 0, \quad (46.20)$$

в то время как нормальная аппроксимация (46.05) приводит для отрицательных  $Z$  к малым, но конечным значениям  $\rho_0(Z)$ . Поэтому вычисление весьма малых  $F$  и весьма близких к единице  $D$  по формулам (46.07) и (46.10) приводит к весьма грубым результатам. Подобное обстоятельство было уже отмечено в § 35.

На рис. 42—45 изображена зависимость  $\mu$  и  $\rho$  от  $L$  при фиксированных значениях  $F$  и  $D$ , вычисленная по формулам (45.03) и (45.04) и таблицам распределения  $\chi^2$ . Мы видим, что зависимость  $\mu$  от  $L$  качественно согласовывается с тем, что мы получили из нормального распределения, однако количественное соответствие имеет место не всегда.

Для пачки сигналов с постоянной (нефлюктуирующей) амплитудой согласно формулам (38.30) и (38.32) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z} &= L \left( 1 + \frac{1}{2} \rho \right), \\ \bar{Z}^2 &= L \left[ L + 1 + (L + 1) \rho + \frac{1}{4} L \rho^2 \right], \\ \bar{Z}^2 - (\bar{Z})^2 &= L(1 + \rho) \approx L \left( 1 + \frac{1}{2} \rho \right)^2 \text{ при } \rho \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (46.21)$$

Сравнивая выражения (46.08) и (46.21), мы видим, что при  $\rho \rightarrow 0$  они совпадают, если их выразить через параметр  $\rho'$ , определенный формулой (45.23). Это совпадение объясняет сближение сплошных и пунктирных кривых на рис. 40, а при  $L \rightarrow \infty$  и  $\rho' \rightarrow 0$ , о чем мы уже говорили в предыдущем параграфе.

Пределы  $a$  и  $b$  в формулах (46.07) и (46.10) для пачки сигналов с постоянной амплитудой равны

$$a = \frac{Z_* - L}{\sqrt{L}}, \quad b = \frac{Z_* - L \left( 1 + \frac{1}{2} \rho \right)}{\sqrt{L(1 + \rho)}}. \quad (46.22)$$

Исключая отсюда величину  $\mu = L\rho$ , получаем выражение

$$\mu = 2 \left( b^2 + a \sqrt{L} - b \sqrt{b^2 + 2a \sqrt{L} + L} \right), \quad (46.23)$$

которое в отличие от выражения (46.12) является монотонно возрастающей функцией  $L$ . Таким образом, при по-

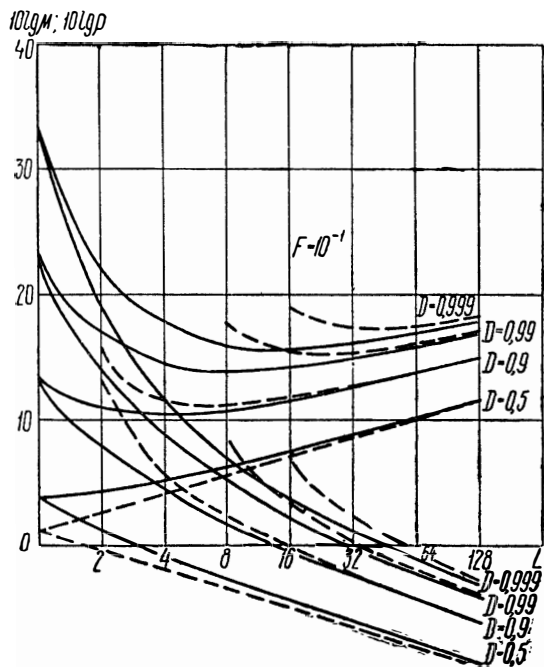


Рис. 42. Характеристики обнаружения быстро мерцающей цели по некогерентной пачке при  $F=10^{-1}$ : сплошные кривые—точные, пунктир—по нормальному распределению.

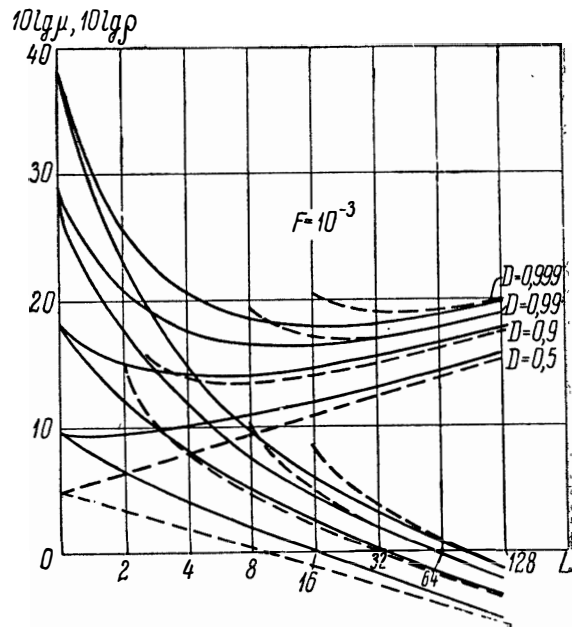


Рис. 43. То же при  $F=10^{-3}$ .

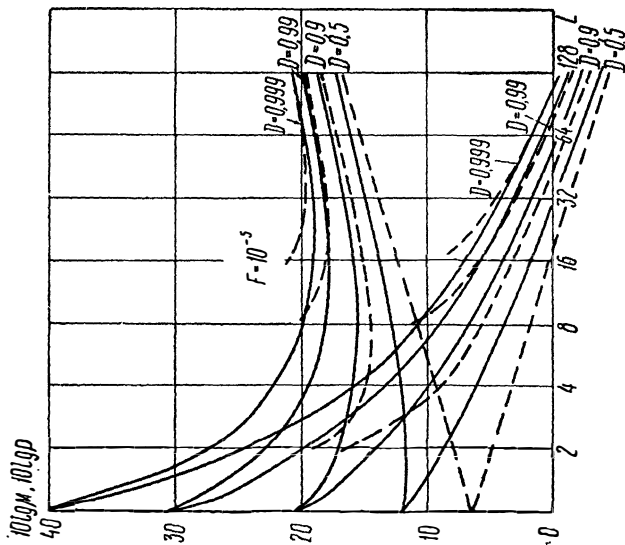


Рис. 44. То же при  $F = 10^{-5}$ .

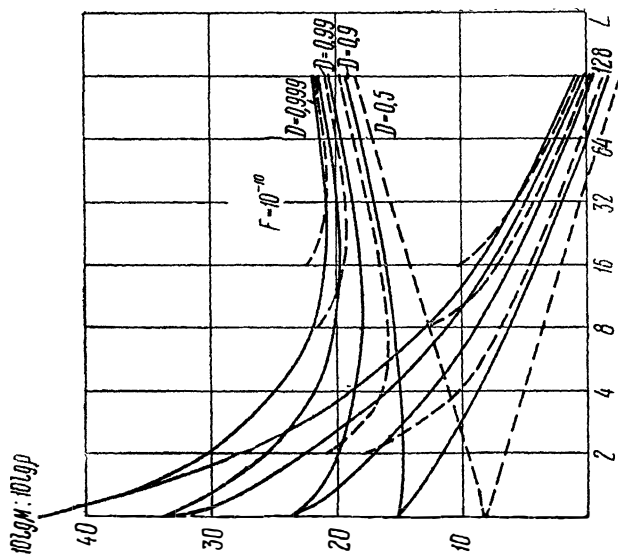


Рис. 45. То же при  $F = 10^{-10}$ .

стоянстве амплитуды наиболее выгодно концентрировать всю энергию в одном сигнале, некогерентное «дробление» энергии всегда приводит к потерям (ср. § 38 и рис. 33—36). Заметим, что наиболее точные результаты формула (46.23) дает, если не считать величину  $a$  постоянной, а вычислять ее по первой формуле (46.22). Таким путем и были рассчитаны сплошные кривые на рис. 33—36.

Рассмотрим в заключение некогерентную пачку сигналов от медленно мерцающей цели, т. е. сигналы, имеющие одинаковую, но случайную амплитуду  $G$ , распределенную по закону Релея (44.01). При фиксированном значении  $G$  выражения (46.21) изменяются следующим образом:

$$\bar{Z} = L \left( 1 + \frac{1}{2} \rho G^2 \right), \quad \bar{Z}^2 = L \left[ L + 1 + (L + 1) \rho G^2 + \frac{1}{4} L \rho^2 G^4 \right]. \quad (46.24)$$

Производя дополнительное усреднение по  $G$  и пользуясь соотношениями

$$\bar{G}^2 = 2, \quad \bar{G}^4 = 8, \quad (46.25)$$

мы получаем выражения

$$\bar{Z} = L(1 + \rho), \quad \bar{Z}^2 - (\bar{Z})^2 = L(1 + 2\rho + L\rho^2), \quad (46.26)$$

отличающиеся от соответствующих выражений (46.08) и (46.27) тем, что дисперсия величины  $Z$  теперь содержит член, пропорциональный  $L^2$ . Формулы (46.26) можно также вывести, исходя из функции распределения (45.07). Они показывают, что функция распределения  $p_m(Z)$  является при больших  $L$  сравнительно «тупой», и поэтому даже приближенно вероятность  $D$  с помощью нормального распределения рассчитывать нельзя.

Для расчета вероятности правильного обнаружения  $D$  можно, однако, воспользоваться аппроксимацией, непосредственно подсказываемой рис. 40,б: при изменении  $\rho$  в определенной пропорции (на 1 дб при  $D=0,5$  и на 9 дб при  $D=0,9$ ) соответствующие сплошные и пунктирные кривые практически совпадают. Благодаря этому обстоятельству из рис. 33—36 нетрудно получить характеристики обнаружения медленно мерцающей цели. Необходимые сдвиги по оси ординат, т. е. неизвестные изменения  $\rho$  и  $\mu$ , легко найти, определяя сдвиг начальной точки ( $L=1$ ) по рис. 31, относящемуся к одиночному сигналу с неизвестной амплитудой и фазой.

Данный рецепт приближенного построения характеристик обнаружения медленно мерцающей цели основан, в сущности, на том, что потери на некогерентное «дробление» энергии для постоянной и медленно мерцающей целей практически совпадают. Для проверки этого рецепта можно воспользоваться приближенной формулой

$$D = \frac{e^{-\frac{z_*^2}{2(1+L\rho)}}}{q^{L-1}} = \left(\frac{1+\mu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{z_*}{1+\mu}}, \quad (46.27)$$

вытекающей из точного выражения (45.08) при условии, что параметр  $q = \frac{\mu}{1+\mu}$  близок к единице; тогда первое слагаемое в правой части формулы (45.08) можно заменить нулем, а во втором взять интеграл в пределах  $0 < z < \infty$ , и мы получим формулу (46.27), абсолютная погрешность которой по порядку величины равна  $F$  — вероятности ложной тревоги. Логарифмируя формулу (46.27) и пользуясь приближенным выражением

$$\ln \frac{\mu}{1+\mu} = \ln \left(1 - \frac{1}{1+\mu}\right) = -\frac{1}{1+\mu}, \quad (46.28)$$

мы получаем простую формулу

$$\mu = \frac{z_* - L + 1}{\ln \frac{1}{D}} - 1, \quad (46.29)$$

которая в сочетании с формулой (46.07) упрощается следующим образом:

$$\mu = \frac{1 + a\sqrt{L}}{\ln \frac{1}{D}} - 1. \quad (46.30)$$

Из последней формулы видно, что  $\mu$  есть монотонно возрастающая функция  $L$ , так что дробление энергии, как и в случае постоянной цели, всегда ведет к потерям.

Для количественных расчетов целесообразно пользоваться формулой (46.29). На рис. 46—49 сплошными линиями изображены характеристики обнаружения медленно мерцающей цели, вычисленные по формуле (46.29), а пунктирными — характеристики, построенные по указанному выше приближенному рецепту. Мы видим, что оба способа приводят к достаточно близким результатам.

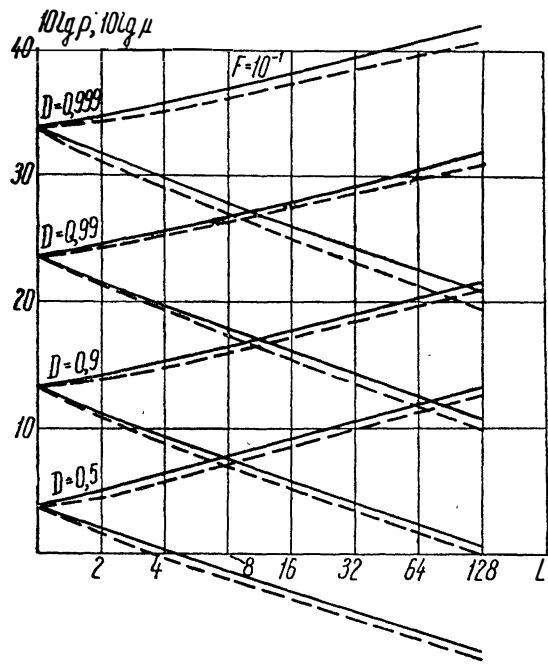


Рис. 46. Характеристики обнаружения медленно мерцающей цели по некогерентной пачке при  $F = 10^{-1}$ : сплошные кривые — по формуле (46,29), пунктирные — по рис. 33,б и 31.

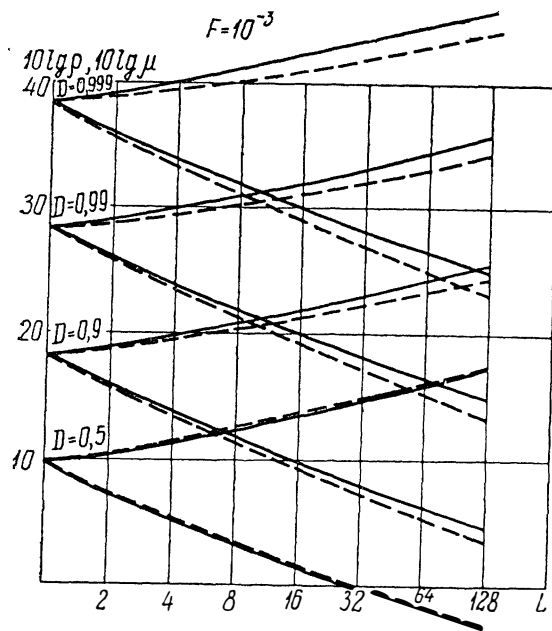


Рис. 47. То же при  $F = 10^{-3}$ ; пунктирные кривые — по рис. 34,б и 31.

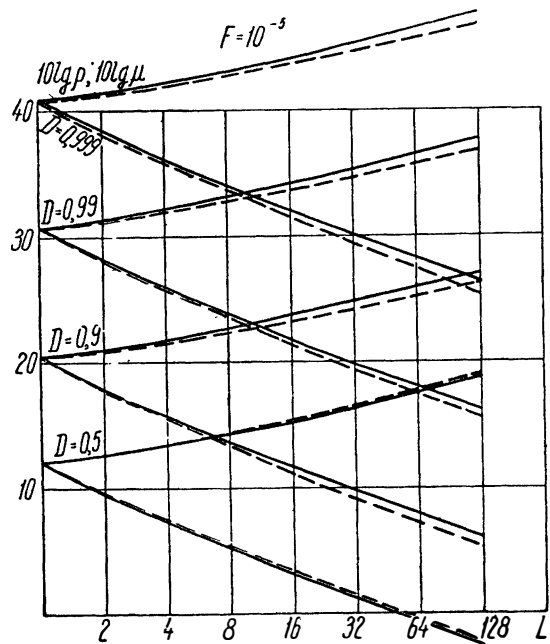


Рис. 48. То же при  $F=10^{-5}$ ; пунктирные кривые — по рис. 35, б и 31.

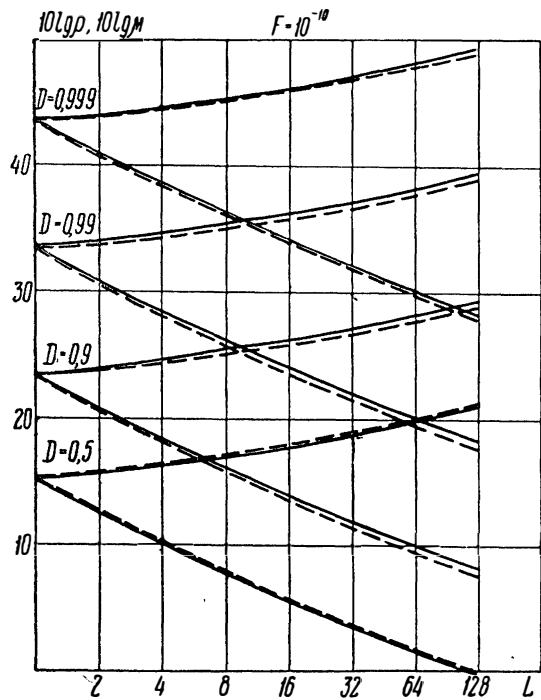


Рис. 49. То же при  $F=10^{-10}$ ; пунктирные кривые — по рис. 36, б и 31.

## § 47. КОЭФФИЦИЕНТ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ КОГЕРЕНТНОЙ ПАЧКИ

Перейдем к исследованию оптимального приемника, обнаруживающего мерцающую цель по когерентной пачке сигналов. Учитывая в этом случае междупериодную корреляцию помех по формуле (43.16), можно по § 59 ввести комплексные случайные величины  $N_{g\lambda}$ , соответствующие помехе и удовлетворяющие соотношениям

$$n_{g\lambda} = \operatorname{Re} N_{g\lambda}, \quad (47.01)$$

$$\bar{N}_{g\lambda} = 0, \quad \overline{N_{g\lambda}^* N_{h\lambda}} = 2R_{gh} r_{\lambda\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi}. \quad (47.02)$$

Если по аналогии обозначить

$$M_{g\lambda} = M_g \omega_x e^{-i(x-1)\Delta\psi}, \quad M_g = e_g e^{i(\omega_g^t g - \psi_g)}, \quad (47.03)$$

то согласно формулам (43.06) и (43.12) будем иметь

$$m_{g\lambda} = \operatorname{Re} M_{g\lambda}. \quad (47.04)$$

Обозначим через  $\|Q_{gh}\|$  матрицу, обратную  $\|R_{gh}\|$ , через  $\|q_{\lambda\lambda}\|$  — матрицу, обратную  $\|r_{\lambda\lambda}\|$ . Нетрудно показать, что матрицы

$$\|Q_{gh} q_{\lambda\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi}\| \quad \text{и} \quad \|R_{gh} r_{\lambda\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi}\| \quad (47.05)$$

будут взаимно обратными, так как выполняется соотношение

$$\sum_j \sum_{\sigma} R_{gj} Q_{jh} r_{\sigma\sigma} q_{\sigma\lambda} e^{i(x-\sigma+\sigma-\lambda)\Delta\psi} = e^{i(x-\lambda)\Delta\psi} \delta_{gh} \delta_{\lambda\lambda} = \delta_{gh} \delta_{\lambda\lambda}. \quad (47.06)$$

Поскольку комплексные случайные величины  $N_{g\lambda}$  предполагаются нормальными, плотность вероятности для них равна

$$\begin{aligned} P(N_{11}, N_{11}^*, \dots, N_{HL}, N_{HL}^*) = \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \sum_{g, h} Q_{gh} q_{\lambda\lambda'} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi} N_{g\lambda} N_{h\lambda'}^* \right\} \\ = \frac{1}{(4\pi)^{HL} \operatorname{Det} \|R_{gh} r_{\lambda\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi}\|} \end{aligned} \quad (47.07)$$



Если ввести далее комплексные случайные величины

$$F_{g_x} = M_{g_x} + N_{g_x}, \quad f_{g_x} = \operatorname{Re} F_{g_x}, \quad (47.08)$$

то коэффициенты правдоподобия будут равны

$$\Lambda(\omega_1, \omega_1^*, \dots, \omega_L, \omega_L^*) = p(\omega_1, \omega_1^*, \dots, \omega_L, \omega_L^*) \times \\ \times \frac{P(F_{11} - M_{11}, F_{11}^* - M_{11}^*, \dots, F_{HL} - M_{HL}, F_{HL}^* - M_{HL}^*)}{P(F_{11}, F_{11}^*, \dots, F_{HL}, F_{HL}^*)}, \quad (47.09)$$

где функция  $P$  определяется формулой (47.07), а функция  $p$  — формулой (43.14). Коэффициент правдоподобия  $\Lambda$ , определяющий работу оптимального приемника обнаружения, равен

$$\Lambda = \iint \dots \iint \Lambda(\omega_1, \omega_1^*, \dots, \omega_L, \omega_L^*) d\omega_1 d\omega_1^* \dots d\omega_L d\omega_L^*, \quad (47.10)$$

где интегрирование производится по всем возможным значениям  $\omega_L$ . Хотя вычисление интеграла (47.10) производится тем же методом, что и вычисление интеграла (59.15) (см. далее § 59), и приводит к формуле (47.25), мы используем ниже другой способ вычисления  $\Lambda$ , ведущий к цели более быстро. Здесь мы обращаем внимание читателя лишь на то, что формулу (47.09) можно более детально записать в виде

$$\Lambda(\omega_1, \omega_1^*, \dots, \omega_L, \omega_L^*) = p(\omega_1, \omega_1^*, \dots, \omega_L, \omega_L^*) e^{\varphi - \frac{1}{2} \mu}, \quad (47.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \sum_{x,\lambda} \sum_{g,h} Q_{gh} q_{x\lambda} e^{i(x-\lambda) \Delta \psi} (F_{g_x} M_{h\lambda}^* + F_{h\lambda} M_{g_x}^*) = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} e^{i(x-\lambda) \Delta \psi} F_x \omega_\lambda^* e^{i(\lambda-1) \Delta \theta} \\ &F_x = \sum_{g,h} Q_{gh} \bar{F}_{g_x} M_h^* \end{aligned} \right\} \quad (47.12)$$

и

$$\mu = \rho \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda} e^{i(x-\lambda)(\Delta\psi - \Delta\theta)} \omega_x \omega_\lambda^*, \quad \rho = \sum_{g,h} Q_{gh} M_g M_h^* \quad (47.13)$$

Поэтому из формул (47.10) и (47.11) следует, что внутрипериодная обработка входных величин  $F_{gx}$  в оптимальном приемнике должна заключаться в образовании величины

$$F_x = \sum_{g,h} Q_{gh} F_{gx} M_h^* = M_x + N_x, \quad (47.14)$$

где

$$M_x = \rho \omega_x e^{-i(x-1)\Delta\theta} \quad \text{и} \quad N_x = \sum_{g,h} Q_{gh} N_{gx} M_h^* \quad (47.15)$$

Дальнейшая обработка величин  $F_x$  зависит лишь от междупериодной корреляции помех и полезных сигналов. Величины  $F_x$  являются нормальными как в присутствии сигналов, так и при наличии одних помех, причем

$$\overline{F_x} = 0. \quad (47.16)$$

Формула (47.15) показывает, что

$$\overline{M_x^* M_\lambda} = 2\rho^2 r_{x\lambda}^m e^{i(x-\lambda)\Delta\theta}, \quad (47.17)$$

где усреднение производится по мерцаниям цели при фиксированном значении  $\Delta\theta$ . С другой стороны, мы для величин  $N_x$  имеем

$$\overline{N_x^* N_\lambda} = \sum_{g,h} \sum_{j,k} Q_{hg} Q_{jk} R_{gj} r_{x\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi} M_h M_k^* \quad (47.18)$$

или в силу второго соотношения (47.13)

$$\overline{N_x^* N_\lambda} = 2\rho r_{x\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi}. \quad (47.19)$$

При наличии полезного сигнала, в силу независимости процессов  $m(t)$  и  $n(t)$ , мы имеем

$$\overline{F_x^* F_\lambda} = 2\rho r_{x\lambda}^f, \quad \text{где} \quad r_{x\lambda}^f = \rho r_{x\lambda}^m e^{i(x-\lambda)\Delta\theta} + r_{x\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi} \quad (47.20)$$

и плотность вероятности равна

$$p_m(F_1, F_1^*, \dots, F_L, F_L^*) = \frac{1}{(4\pi\rho)^L \text{Det} \| r_{x\lambda}^f \|} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\rho} \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda}^f F_x F_\lambda^* \right\}, \quad (47.21)$$

где  $q_{x\lambda}^f$  суть элементы матрицы, обратной  $\|r_{x\lambda}^f\|$ . Если же полезный сигнал отсутствует, то

$$\overline{F_x^* F_\lambda} = 2\rho r_{x\lambda}^n, \quad \text{где } r_{x\lambda}^n = r_{x\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi} \quad (47.22)$$

и плотность вероятности для тех же величин  $F_x, F_x^*$  равна

$$p_0(F_1, F_1^*, \dots, F_L, F_L^*) = \frac{1}{(4\pi\rho)^L \text{Det} \|r_{x\lambda}^n\|} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\rho} \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda}^n F_x F_\lambda^* \right\}, \quad (47.23)$$

причем

$$q_{x\lambda}^n = q_{x\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\psi}. \quad (47.24)$$

Если в результате эксперимента реализовалась какая-то последовательность значений  $F_x$  и  $F_x^*$ , то согласно общей теории (ср. гл. V) вероятность наличия полезного сигнала определяется коэффициентом правдоподобия

$$\Lambda = \frac{p_m(F_1, F_1^*, \dots, F_L, F_L^*)}{p_0(F_1, F_1^*, \dots, F_L, F_L^*)}, \quad (47.25)$$

в данном случае равным

$$\Lambda = \frac{\text{Det} \|r_{x\lambda}^n\|}{\text{Det} \|r_{x\lambda}^f\|} \exp \left\{ \frac{1}{2\rho} \sum_{x,\lambda} (q_{x\lambda}^n - q_{x\lambda}^f) F_x F_\lambda^* \right\}. \quad (47.26)$$

Коэффициент правдоподобия (47.26) можно записать короче так:

$$\Lambda = \frac{D^n}{D^f} e^S, \quad (47.27)$$

где определители

$$D^n = \text{Det} \|r_{x\lambda}^n\| = \text{Det} \|r_{x\lambda}\|, \quad D^f = \text{Det} \|r_{x\lambda}^f\| \quad (47.28)$$

зависят лишь от статистических свойств сигналов и помех, а величина

$$S = \frac{1}{2p} \sum_{x, \lambda} (q_{x\lambda}^n - q_{x\lambda}^f) F_x F_\lambda^* \quad (47.29)$$

определяется также данными на входе приемника. Поэтому оптимальный приемник должен образовывать величину  $S$  или какую-нибудь другую, с ней однозначно связанную.

В заключение отметим, что в первоначальной постановке задачи мы предполагали известными  $f_{gx}$  — выборки вещественной функции  $f(t)$  на входе приемника, а не комплексные величины  $F_{gx}$  — выборки некоторой комплексной функции  $F(t)$ , связанной с  $f(t)$  соотношением

$$f(t) = \operatorname{Re} F(t). \quad (47.30)$$

Однако определение функции  $F(t)$  не представляет труда. Оно особенно просто в случае „узкополосных“ сигналов, ширина полосы частот которых мала по сравнению с несущей частотой — это условие всегда выполняется на практике. В самом деле, тогда  $f(t)$  можно записать в виде

$$f(t) = E(t) \cos [\omega_0 t - \Psi(t)], \quad (47.31)$$

где  $E(t)$  и  $\Psi(t)$  — медленно меняющиеся функции времени, и комплексная функция  $F(t)$  равна

$$F(t) = E(t) e^{i[\omega_0 t - \Psi(t)]}. \quad (47.32)$$

Вещественную функцию

$$\operatorname{Im} F(t) = E(t) \sin [\omega_0 t - \Psi(t)] \quad (47.33)$$

можно практически осуществить, задерживая процесс (47.31) на четверть периода  $\left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right)$ , поскольку за это время функции  $E(t)$  и  $\Psi(t)$  практически не успеют измениться.

Таким образом, оперируя с комплексными случайными величинами

$$F_x = x_x + iy_x, \quad (47.34)$$

мы предполагаем, что производится двухканальная обработка входных данных — в более общем смысле, чем это предполагалось в предыдущей главе.

Более простые формулы получаются, если не стремиться к общности и считать, что корреляционные свойства помехи

определяются формулой (43.15) и что в частности, регулярное движение отражателей отсутствует. Тогда величины  $x_z$  и  $y_z$  в формуле (47.34) определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} x_z &= \sum_g A_g f_{gz}, & y_z &= \sum_g B_g f_{gz}, \\ A_g &= \sum_h Q_{gh} e_h \cos(\omega_0 t_h - \psi_h), \\ B_g &= \sum_h Q_{gh} e_h \sin(\omega_0 t_h - \psi_h) \end{aligned} \right\} \quad (47.35)$$

—такими же, как и в предыдущей главе. Все остальные результаты этого параграфа остаются в силе.

В дальнейшем мы будем использовать общее определение комплексных величин  $F_z$  до тех пор, пока это не приводит к сильному усложнению формул; в § 49 мы используем уже более простую формулу (43.15).

#### § 48. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМНИК В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Формула (47.29), описывающая между периодную обработку входных данных оптимальным приемником, довольно сложна, поэтому мы рассмотрим наиболее интересные частные случаи. Начнем с пачки, состоящей из двух сигналов ( $L=2$ ). Если обозначить

$$r_{12} = r e^{-i\beta}, \quad r_{12}^m = p e^{-i\alpha}, \quad (48.01)$$

то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \|r_{z\lambda}^n\| &= \left\| \begin{array}{cc} 1 & r e^{-i\alpha} \\ r e^{i\alpha} & 1 \end{array} \right\|, & \|q_{z\lambda}^n\| &= \frac{1}{D^n} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -r e^{-i\alpha} \\ -r e^{i\alpha} & 1 \end{array} \right\|, \\ D^n &= 1 - r^2, & \alpha &= \beta + \Delta\psi \end{aligned} \right\} \quad (48.02)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \|r_{z\lambda}^f\| &= \left\| \begin{array}{cc} 1 + \rho & r e^{-i\alpha} + \rho p e^{-i\delta} \\ r e^{i\alpha} + \rho p e^{i\delta} & 1 + \rho \end{array} \right\|, \\ \|q_{z\lambda}^f\| &= \frac{1}{D^f} \left\| \begin{array}{cc} 1 + \rho & -r e^{-i\alpha} - \rho p e^{-i\delta} \\ -r e^{i\alpha} - \rho p e^{i\delta} & 1 + \rho \end{array} \right\|, \\ D^f &= 1 - r^2 + 2\rho [1 - r p \cos(\delta - \alpha)] + \rho^2 (1 - p^2), \\ \delta &= \varepsilon + \Delta\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (48.03)$$

Величина  $S$  равна

$$S = \frac{1}{2\rho D^n D^f} \{ [D^f - (1 + \rho)D^n] (|F_1|^2 + |F_2|^2) + 2 \operatorname{Re} [r (D^n - D^f) F_1 F_2^* e^{-i\alpha} + \rho \rho D^n \overline{F_1} F_2^* e^{-i\delta}] \} \quad (48.04)$$

В предельных случаях имеем следующие результаты.

1. Некоррелированные мерцания,  $\rho = 0$ . Фаза  $\delta = \varepsilon + \Delta\theta$  из формулы (48.04) выпадает, и когерентность пачки благодаря мерцаниям исчезает; в частности, когерентного накопления производить нельзя. Выражение

$$S = \frac{(1 + r^2 + \rho)(|F_1|^2 + |F_2|^2) - 2r(2 + \rho) \operatorname{Re} \{ F_1 F_2 e^{-i\alpha} \}}{2(1 - r^2)(1 - r^2 + 2\rho + \rho^2)} \quad (48.05)$$

при некоррелированных помехах ( $r = 0$ ) принимает вид

$$S = \frac{|F_1|^2 + |F_2|^2}{2(1 + \rho)}, \quad (48.06)$$

т. е. оптимальный приемник должен производить накопление сигналов после квадратичного детектора. Наоборот, при сильно коррелированных помехах ( $r \approx 1$ ,  $\beta \approx 0$ ) имеем

$$S = \frac{|F_1 - F_2 e^{i\Delta\psi}|^2}{2\rho(1 - r^2)}, \quad (48.07)$$

так что оптимальный приемник должен образовывать череспериодные разности с учетом набега фаз  $\Delta\psi$ , в результате чего сильно коррелированные помехи почти полностью вычитаются. При  $\Delta\psi = 0$ , когда отражающие частицы в целом неподвижны,

$$S = \frac{|F_1 - F_2|^2}{2\rho(1 - r^2)} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2\rho(1 - r^2)}, \quad (48.08)$$

приемник должен производить череспериодное вычитание по обоим каналам, а затем суммировать квадраты этих разностей.

2. Полностью коррелированные мерцания,  $\rho = 1$  и  $\varepsilon = 0$ . Этот случай наиболее близок к рассмотренному в гл. V приемнику для пачки постоянных сигналов, однако здесь амплитуда обоих сигналов в пачке хотя и одинакова, но случайна. Выражение

$$S = \frac{|[1 - r e^{i(x - \Delta\theta)}] F_1 + [e^{-i\Delta\theta} - r e^{-i\alpha}] F_2|^2}{2(1 - r^2) \{1 - r^2 + 2\rho [1 - r \cos(\Delta\theta - \alpha)]\}} \quad (48.09)$$

для сильно коррелированных помех ( $r \approx 1$ ,  $\beta \approx 0$ ) опять переходит в выражение (48.07), а для некоррелированных помех ( $r=0$ ) дает

$$S = \frac{|F_1 + F_2 e^{i\Delta\vartheta}|}{2(1+2\rho)}, \quad (48.10)$$

т. е. оптимальная обработка заключается в когерентном сложении сигналов с учетом набега фазы  $\Delta\vartheta$ .

Если коэффициент корреляции помех  $r$  любой,  $\alpha=0$  и  $\Delta\vartheta=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , то

$$S = \frac{|F_1 + F_2|^2}{2(1+r)(1+r+2\rho)}, \quad (48.11)$$

если же  $\alpha=0$  и  $\Delta\vartheta=\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ , то

$$S = \frac{|F_1 - F_2|^2}{2(1-r)(1-r+2\rho)}. \quad (48.12)$$

Таким образом, оптимальный приемник при этих значениях  $\alpha$  и  $\Delta\vartheta$  должен производить когерентное сложение (т. е. простое сложение или вычитание). Заметим, что при  $r \approx 1$  формулы (48.08) и (48.12) становятся эквивалентными.

3. Некоррелированные помехи,  $r=0$ . Обозначая  $q^2 = 1 - \rho^2$ , будем иметь

$$S = \frac{(1+\rho q^2)[|F_1|^2 + |F_2|^2 + 2\rho \operatorname{Re}(F_1 F_2^* e^{-i\delta})]}{2(1+2\rho+\rho^2 q^2)}. \quad (48.13)$$

Это выражение применимо при любой корреляции между последовательными сигналами; для некоррелированных и полностью коррелированных мерцаний оно переходит в формулы (48.06) и (48.10) соответственно.

4. Сильно коррелированные помехи,  $r \approx 1$  и  $\beta \approx 0$ . В силу того, что  $D^n = 1 - r^2 \approx 0$ , можно в фигурной скобке выражения (48.04) пренебречь членами, пропорциональными  $D^n$ , и тогда получается

$$S = \frac{|F_1 - F_2 e^{i\Delta\vartheta}|^2}{2\rho(1-r^2)}, \quad (48.14)$$

как в формуле (48.07).

Ряд полученных выше соотношений нетрудно обобщить на случай любого числа  $L$  сигналов в пачке. Мы ограничимся случаем сильно коррелированных помех ( $r_{\chi l} \approx 1$ ),

когда элементы  $q_{x\lambda}$  велики и выражение (47.29) можно записать в приближенной форме

$$S = \frac{1}{2\rho} \sum_{x,\lambda} q_{x\lambda}^n F_x F_\lambda^* \quad (48.15)$$

Если матрицу  $\|r_{x\lambda}\|$  задать в виде

$$r_{x\lambda} = r^{|\lambda-x|} e^{i(x-\lambda)\beta} \quad (r < 1; x, \lambda = 1, \dots, L), \quad (48.16)$$

то элементы матрицы  $\|q_{x\lambda}^n\|$  будут равны (ср. § 35 и § 40)

$$\left. \begin{aligned} q_{11}^n = q_{LL}^n &= \frac{1}{1-r^2}, \quad q_{xx}^n = \frac{1+r^2}{1-r^2} \quad (1 < x < L), \\ q_{x, x+1}^n &= (q_{x+1, x}^n)^* = -\frac{r}{1-r^2} e^{-ix} \quad (1 \leq x \leq L-1), \end{aligned} \right\} \quad (48.17)$$

а остальные  $q_{x\lambda}^n$  будут нулями. Формула (48.15) принимает вид

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-r^2} [ |F_1|^2 + (1+r^2)(|F_2|^2 + \dots + |F_{L-1}|^2) + \\ &\quad + |F_L|^2 - 2r \operatorname{Re} \{ (F_1 F_2^* + \dots + F_{L-1} F_L^*) e^{-i\alpha} \} ] \approx \\ &\approx \frac{1}{1-r^2} [ |F_1 - F_2 e^{i\Delta\psi}|^2 + |F_2 - F_3 e^{i\Delta\psi}|^2 + \dots + \\ &\quad + |F_{L-1} - F_L e^{i\Delta\psi}|^2 ], \end{aligned} \quad (48.18)$$

поскольку  $r \approx 1$ ,  $\beta \approx 0$ . В данном случае оптимальный приемник должен производить квадратичное накопление последовательных разностей.

Если корреляционные коэффициенты заданы формулой

$$r_{x\lambda} = r^{(x-\lambda)^2}, \quad (48.19)$$

то при  $L=3$  и  $\Delta\psi=0$  имеем

$$\|q_{x\lambda}^n\| = \frac{1}{(1+r^2)(1-r^2)^2} \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -r(1+r^2) & r^2 \\ -r(1+r^2) & (1+r^2)(1+r^2) & -r(1+r^2) \\ r^2 & -r(1+r^2) & 1 \end{array} \right\| \quad (48.20)$$



и вместо формулы (48.18) получаем выражение

$$S = \frac{1}{(1+r^2)(1-r^2)^2} [|F_1|^2 + (1+r^2)(1+r^4)|F_2|^2 + \\ + |F_3|^2 - 2r(1+r^2)\operatorname{Re}(F_1F_2^* + F_2F_3^*) + \\ + 2r^2\operatorname{Re}(F_1F_3^*)] \approx \frac{1}{2(1-r^2)^2} |F_1 - 2F_2 + F_3|^2, \quad (48.21)$$

содержащее разность второго порядка. Можно показать, что при  $L=4$  появляется разность третьего порядка, а при  $L=5$ —четвертого; по-видимому, при любом  $L$  получим разность  $L-1$ -го порядка.

В гл. XI показано, что формулы (48.16) и (48.19) определяют законы спадания коэффициента корреляции помех, обусловленных отражениями от хаотически движущихся частиц, в предельных случаях больших и малых  $\tau$  (по сравнению с временем корреляции для скоростей частиц). Мы видим, что в этих предельных случаях формулы для оптимальной обработки получают совершенно различными.

Появление разности второго порядка в формуле (48.21) можно понять так. Обозначим

$$\xi_x = \operatorname{Re} N_x, \quad \bar{\xi}_x = 0 \quad (x = 1, 2, 3) \quad (48.22)$$

и зададим вторые моменты случайных величин  $\xi_x$  с помощью соотношений

$$\overline{\xi_x^2} = 1, \quad \overline{\xi_1\xi_2} = \overline{\xi_2\xi_3} = r, \quad \overline{\xi_1\xi_3} = r', \quad (48.23)$$

считая  $r = r_{12} = r_{23}$  и  $r' = r_{13}$  вещественными числами. В случае (48.16) мы должны положить

$$r' = r^2, \quad (48.24)$$

а в случае (48.19)

$$r' = r^4. \quad (48.25)$$

Из соотношений (48.23) вытекают формулы

$$\overline{(\xi_1 - \xi_2)^2} + \overline{(\xi_2 - \xi_3)^2} = 4(1 - r) \quad (48.26)$$

и

$$\overline{(\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2} = 6 - 8r + 2r'. \quad (48.27)$$

При  $r' = r^2$  мы имеем

$$\overline{(\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2} = (1 - r)[8 - 2(1 + r)] \approx 4(1 - r) \quad \text{при } r \approx 1, \quad (48.28)$$

так что в данном случае образование квадрата разности второго порядка и квадратичное накопление простых разностей приводит к практически одинаковым результатам. Полагая  $r' = r^4$ , мы, однако, получаем

$$(\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2 = 2(1-r)^2(3+2r+r^2) \approx 12(1-r)^2, \quad (48.29)$$

так что при  $r \approx 1$  разность второго порядка дает значительное ослабление интенсивности помех по сравнению с формулой (48.26).

#### § 49. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКА, ОБРАЗУЮЩЕГО ЧЕРЕСПЕРИОДНУЮ РАЗНОСТЬ

Оптимальный приемник, дающий положительный ответ о наличии цели при превышении коэффициентом правдоподобия некоторого порогового значения, характеризуют вероятностью ложной тревоги  $F$  и вероятностью правильного обнаружения  $D$ . Эти вероятности зависят как от порога, так и от эффективного отношения сигнала к помехе.

Вычислим  $F$  и  $D$  для приемника, образующего разность (ср. § 42)

$$|\mathcal{G}| = |F_1 - F_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (49.01)$$

и принимающего решения по схеме:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \mathcal{G} \geq \mathcal{G}_*, \text{ то считаем, что } f = m + n, \\ \text{если } \mathcal{G} < \mathcal{G}_*, \text{ то считаем, что } f = n. \end{array} \right\} \quad (49.02)$$

Как видно из формул (48.08) и (48.12), такой приемник при некоторых условиях близок к оптимальному, по крайней мере, при  $\beta = 0$  и  $\Delta\psi = 0$ .

Случайная величина (49.01) имеет плотность вероятности

$$p(\mathcal{G}) = \frac{\mathcal{G}}{\sigma^2} e^{-\frac{\mathcal{G}^2}{2\sigma^2}}, \quad (49.03)$$

где по формулам (47.20) и (47.22) при  $\Delta\psi = 0$  и вещественном  $r = r_{12} = r_{21}$  мы получаем

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^2 = \frac{1}{2} \overline{\mathcal{G}^2} = 2\rho(1-r) \text{ при отсутствии сигнала,} \\ \sigma^2 = \frac{1}{2} \overline{\mathcal{G}^2} = 2\rho[1-r + \rho(1-p \cos \delta)] = \\ = 2\rho(1-r)(1+\mu) \text{ при наличии сигнала,} \end{array} \right\} \quad (49.04)$$

причем величина

$$\mu = \rho \frac{1 - \rho \cos \delta}{1 - r} \quad (49.05)$$

играет роль эффективного отношения сигнал/помеха в данной задаче.

Действительно, при отсутствии полезного сигнала  $\sigma^2 = \sigma_n^2$ , а при его наличии  $\sigma^2 = \sigma_m^2 + \sigma_n^2$ , где  $\sigma_m^2$  — интенсивность полезного сигнала, а  $\sigma_n^2$  — интенсивность помех *после вычитания*. Поэтому естественно определить

$$\mu = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2}, \quad (49.06)$$

что в силу выражений (49.04) как раз и дает формулу (49.05). Вычисляя  $F$  и  $D$ , мы получаем обычную связь между ними

$$D = F^{1+\mu}, \quad (49.07)$$

характерную для флюктуирующего сигнала на фоне нормальных помех [ср. § 34 и формулу (45.09)].

Напомним, что комплексные величины  $F_x$  образуются в результате внутрипериодной обработки входного процесса двумя каналами, находящимися в квадратуре (ср. конец § 47). Поэтому наряду с рассмотренным выше случаем приемника, образующего «двухканальную» разность (49.01), исследуем более простой приемник, работающий по схеме

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } |\xi| \geq \xi_* \text{ считаем, что } f = m + n, \\ \text{при } |\xi| < \xi_* \text{ считаем, что } f = n, \end{array} \right\} \quad (49.08)$$

где [ср. формулы (42.27) и (42.28)]

$$\xi = x_1 - x_2 \quad (49.09)$$

есть «одноканальная» разность, плотность вероятности которой равна

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}, \quad (49.10)$$

причем  $\sigma^2$  вычисляется по формулам (49.04). Вероятности  $F$  и  $D$  равны

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, & z_* &= \frac{\xi_*}{\sqrt{2\rho(1-r)}}, \\ D &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{z_*} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, & y_* &= \frac{z_*}{\sqrt{1+\mu}}. \end{aligned} \right\} \quad (49.11)$$

Эти формулы были уже получены в § 32, по ним построены пунктирные кривые на рис. 28, которые, следовательно, дают характеристики обнаружения приемника, образующего одноканальную разность (49.09). Если приемник образует двухканальную разность (49.01), то его характеристики соответствуют пунктирным кривым на рис. 31; сам этот рисунок позволяет сравнить обнаружение постоянной и мерцающей цели таким приемником. Преимущества двухканального приемника, работающего по формуле (49.02), над одноканальной схемой (49.08) можно оценить, сравнивая пунктирные кривые на рис. 31 и 28.

Предыдущие результаты справедливы при условии, что фаза  $\delta = \varepsilon + \Delta\vartheta$  имеет какое-то определенное значение, т. е. цель движется с фиксированной скоростью. Параметры  $\mu$  и  $D$  зависят от  $\Delta\vartheta$ , и лишь для некоррелированных мерцаний ( $\rho = 0$ ) эта зависимость отсутствует. Если скорость цели является случайной величиной, то для вычисления  $D$  необходимо произвести дополнительное усреднение по разности фаз  $\Delta\vartheta$  (ср. § 42), для чего необходимо привлечь численные методы. Из формулы (49.07) без численных расчетов получается лишь двойное неравенство

$$F \frac{1}{\sqrt{1+2\mu_0(1+\rho)}} \leq D \leq F \frac{1}{\sqrt{1+2\mu_0(1-\rho)}}, \quad (49.12)$$

позволяющее довольно точно оценить  $D$  при малых  $\rho$ . Роль отношения сигнал/помеха при неизвестной скорости играет параметр

$$\mu_0 = \frac{\rho}{2(1-r)}, \quad (49.13)$$

введенный ранее в § 42.

Заметим, что лишь в случае медленных мерцаний ( $\rho = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ ) параметр (49.05) равен параметру

$$\mu = \rho \frac{1 - \cos \Delta\vartheta}{1-r}, \quad (49.14)$$

введенному в § 42 для постоянной цели [см. формулу (49.16)]. В противоположном случае  $p=0$  формула (49.05) дает

$$\mu = \frac{p}{1-r} = 2\mu_0, \quad (49.15)$$

причем отношение величин (49.14) и (49.15) равно  $1 - \cos \Delta\vartheta$ . Это значит, что при  $\Delta\vartheta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  величина (49.14)

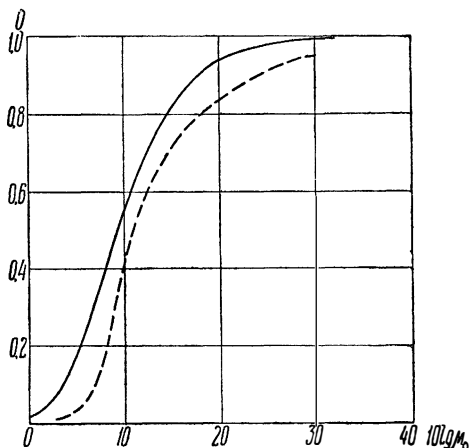


Рис. 50. Характеристики обнаружения приемника, образующего „двухканальную“ разность (49.01), при  $F = 0,37 \cdot 10^{-5}$ .

Сплошная кривая — быстро мерцающая цель, пунктир — постоянная цель.

лишь вдвое больше величины (49.15), в то время как при скоростях, близких к „слепым“ скоростям ( $\Delta\vartheta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ) величина (49.14) во много раз меньше величины (49.15).

Эти соображения показывают, что обнаружение медленно мерцающей или постоянной цели при произвольном значении  $\Delta\vartheta$  из-за слепых скоростей происходит с большим трудом, чем обнаружение быстро мерцающей цели, для которой  $p=0$  и слепых скоростей нет. Рис. 50 иллюстрирует это положение: сплошная кривая есть характеристика обнаружения быстро мерцающей цели ( $p=0, \mu = 2\mu_0$ ), построенная по формуле (49.07) или (49.12), пунк-

тирная кривая соответствует постоянной цели и взята из рис. 39 (где она дана сплошной линией). Вследствие того, что постоянная цель не наблюдается при слепых скоростях, для ее обнаружения требуются бóльшие значения  $\mu_0$  (на 2—6 дБ), чем для обнаружения быстро мерцающей цели. Ясно, что при увеличении коэффициента корреляции  $\rho$  у мерцающей цели также появятся слепые скорости, и вероятность ее обнаружения при заданном  $\mu_0$  упадет, а вся характеристика обнаружения сместится вправо

## ГЛАВА VIII

### ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

#### § 50. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРА ПО МАКСИМУМУ АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

В предыдущих главах мы рассматривали различные случаи обнаружения полезного сигнала на фоне помех. Задача об *измерении* параметров полезного сигнала при наличии помех исследуется в рамках той же статистической схемы, изложенной в главе V, но имеет ряд особенностей. Чтобы не создавать лишних трудностей, мы отделим сначала проблему измерения от проблемы обнаружения и будем считать, что полезный сигнал  $m$  присутствует, так что априорные вероятности наличия и отсутствия полезного сигнала равны

$$P(m) = 1, \quad P(0) = 0, \quad (50.01)$$

и требуется измерить параметр  $\tau$  сигнала  $m(t, \tau)$ .

Эта постановка задачи соответствует „чистому“ измерению, для которого формулы (29.28)—(29.30) принимают вид

$$p_f[m(\tau)] = \frac{\Lambda(\tau)}{\Lambda}, \quad \Lambda = \int \Lambda(\tau) d\tau, \quad (50.02)$$

где

$$\Lambda(\tau) = p_m(\tau) \frac{p_{m(\tau)}(f)}{p_0(f)} \quad (50.03)$$

есть коэффициент правдоподобия, отличающийся от апостериорной плотности вероятности  $p_f[m(\tau)]$  только множителем  $\Lambda$ , не зависящим от  $\tau$ .

Согласно гл. V оптимальный приемник, производящий измерение параметра  $\tau$ , должен образовывать апостериорную плотность вероятности  $p_f[m(\tau)]$  или же коэффициент правдоподобия  $\Lambda(\tau)$  (являющийся при „чистом“ измерении ненормированной плотностью вероятности). На основании этих вероятностных данных приходится принимать решение и указывать какое-то определенное значение параметра  $\tau$  как результат измерения. Схему, принимающую это решение, можно считать включенной в оптимальный приемник (ср. § 30).

*Наиболее вероятное значение  $\tau$ , т. е. такое значение  $\tau$ , при котором плотность вероятности  $p_f[m(\tau)]$  и коэффициент правдоподобия  $\Lambda(\tau)$  максимальны, естественно определить как результат измерения и считать „измеренным“ значением  $\tau$ .*

Рассмотрим простейшие следствия, вытекающие из этого определения.

При нормальных помехах коэффициент правдоподобия равен

$$\Lambda(\tau) = p_m(\tau) \frac{p(f-m)}{p(f)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} [f_g - m_g(\tau)] [f_h - m_h(\tau)] \right\} / \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh} f_g f_h \right\}. \quad (50.04)$$

Легко показать, что отыскание наиболее вероятного значения  $\tau$  приводит к некоторому обобщению метода наименьших квадратов. Действительно, пусть сначала помеха является некоррелированной, так что  $Q_{gh} = 0$  при  $g \neq h$  и, кроме того, все элементы  $Q_{hh}$  равны. Тогда максимум  $\Lambda(\tau)$  достигается (при  $p_m(\tau) = \text{const}$ ), когда выражение

$$\varepsilon^2 = \sum_{h=1}^H [f_h - m_h(\tau)]^2 \quad (50.05)$$

минимально. В общем случае вместо выражения (50.05) нужно брать квадратичную форму, учитывающую корреляцию помех

$$\varepsilon^2 = \sum_{g,h} Q_{gh} [f_g - m_g(\tau)] [f_h - m_h(\tau)], \quad (50.06)$$



а также учитывать и априорное распределение  $p_m(\tau)$  (при  $p_m(\tau) \neq \text{const}$ ). Если имеется еще неизвестный параметр  $\theta$ , то коэффициент правдоподобия  $\Lambda(\tau)$  вычисляется по формуле (29.34).

В качестве примера рассмотрим измерение неизвестной амплитуды  $a$  сигнала известной формы  $s(t)$

$$m(t, a) = as(t). \quad (50.07)$$

Пусть амплитуда  $a$  распределена по нормальному закону

$$p_m(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_0}} e^{-\frac{a^2}{2a_0^2}}. \quad (50.08)$$

Если перейти к выборкам функций  $f(t)$  и  $m(t)$  в моменты  $t_h$ , обозначая

$$f_h = f(t_h), m_h = m(t_h), s_h = s(t_h), h = 1, \dots, H \quad (50.09)$$

и считая выборки помех  $n_h$  в моменты  $t_h$  независимыми, причем

$$\bar{n}_h = 0 \text{ и } \overline{n_h^2} = \sigma^2 \quad (50.10)$$

то можно написать плотность распределения случайных величин  $n_1, \dots, n_H$  в виде

$$p(n_1, \dots, n_H) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{H}{2}} \sigma^H} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{h=1}^H n_h^2 \right\}. \quad (50.11)$$

Поэтому коэффициент правдоподобия  $\Lambda(a)$  равен [ср. (32.03)]

$$\Lambda(a) = p_m(a) e^{\varphi(a) - \frac{1}{2}\mu(a)}, \quad (50.12)$$

где величины  $\varphi(a)$  и  $\mu(a)$  равны

$$\varphi(a) = \sum_{g, h} Q_{gh} f_g m_h = \frac{a}{\sigma^2} \sum_h f_h s_h, \quad (50.13)$$

$$\mu(a) = \sum_{g, h} Q_{gh} m_g m_h = \frac{a^2}{\sigma^2} \sum_h s_h^2.$$

Учитывая формулу (50.08), запишем коэффициент правдоподобия в виде

$$\Lambda(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a_0} \exp \left\{ \frac{a}{\sigma^2} \sum_h f_h s_h - \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_h s_h^2 \right) \right\}. \quad (50.14)$$

Наиболее вероятное значение параметра  $a$  обозначим через  $\hat{a}$ . В соответствии со сказанным выше, при  $a = \hat{a}$  функция  $\Lambda(a)$  максимальна, поэтому  $\hat{a}$  определится из уравнения

$$\frac{\partial \ln \Lambda(a)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_h f_h s_h - a \left( \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_h s_h^2 \right) = 0, \quad (50.15)$$

откуда

$$\hat{a} = \frac{\sum_h f_h s_h}{\sum_h \left( s_h^2 + \frac{\sigma^2}{a_0^2} \right)}. \quad (50.16)$$

Важным свойством величины  $\hat{a}$  по формуле (50.16) является то, что она является *линейной* функцией входных данных  $f_1, \dots, f_N$ .

В данной задаче роль отношения сигнал/помеха играет параметр

$$\rho = \frac{a_0^2 \sum_h s_h^2}{\sigma^2}. \quad (50.17)$$

Если он велик, то формула (50.16) принимает вид

$$\hat{a} = \frac{\sum_h f_h s_h}{\sum_h s_h^2}, \quad (50.18)$$

так что наиболее вероятное значение  $a$  не зависит от параметра  $a_0$ , характеризующего априорное распределение (50.08).

Представим  $\Lambda(a)$  в виде

$$\Lambda(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a_0} \exp \left\{ - \frac{(a - \hat{a})^2}{2 \frac{a_0^2}{1 + \rho}} + \left( \frac{\hat{a}}{a_0} \right)^2 \frac{1 + \rho}{2\sigma^2} \right\}. \quad (50.19)$$

Формула (50.19) показывает, что апостериорное распределение величины  $a$  также является гауссовым, причем среднее значение этого распределения является случайным и

равно  $\hat{a}$ , а дисперсия от случайных величин не зависит и равна

$$b = \frac{a_0^2}{1 + \rho} \quad (50.20)$$

Исследуем статистические свойства случайной величины  $\hat{a}$ . Усредняя  $f_h$  по помехе, мы получим

$$\bar{f}_h = m_h = a s_h, \quad (50.21)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \bar{\hat{a}} &= \frac{\rho a}{1 + \rho}, \\ \overline{(\hat{a} - \bar{\hat{a}})^2} &= \frac{\rho a_0^2}{(1 + \rho)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (50.22)$$

Следовательно,  $\hat{a}$  является (при фиксированном  $a$ ) нормальной случайной величиной, распределение которой равно

$$p_a(\hat{a}) = \frac{1 + \rho}{\sqrt{2\pi\rho} a_0} \exp \left\{ - \frac{\left( \hat{a} - \frac{\rho a}{1 + \rho} \right)^2}{2 \frac{\rho a_0^2}{(1 + \rho)^2}} \right\}. \quad (50.23)$$

Таким образом, величина  $\hat{a}$  имеет математическое ожидание  $\bar{\hat{a}}$ , смещенное относительно истинного значения неизвестного параметра  $a$  на величину

$$\bar{\hat{a}} - a = - \frac{a}{1 + \rho}, \quad (50.24)$$

зависящую от самого параметра  $a$ . Дисперсия  $\hat{a}$  определяется второй формулой (50.22); она не зависит от измеряемого параметра  $a$ . Удобно вместо двух дисперсий  $\overline{(\hat{a} - \bar{\hat{a}})^2}$  и  $b$  ввести понятие средней квадратичной ошибки измерения  $\Delta^2$ , определяемой формулой

$$\Delta^2 = \overline{(\hat{a} - a)^2}. \quad (50.25)$$

В силу формул (50.23) и (50.25) имеем

$$\Delta^2 = \overline{[(\hat{a} - \bar{\hat{a}}) + (\bar{\hat{a}} - a)]^2} = \overline{(\hat{a} - \bar{\hat{a}})^2} + \overline{(\bar{\hat{a}} - a)^2} = \frac{\rho a_0^2 + a^2}{(1 + \rho)^2}. \quad (50.26)$$

Формула (50.26) показывает, что средняя квадратичная ошибка измерения в общем случае больше дисперсии  $(\hat{a} - a)^2$  и только при  $a = 0$ , достигая своего минимума, становится ей равной. Усредняя  $\Delta^2$  по случайному параметру  $a$ , получаем

$$\overline{\Delta^2} = \frac{a_0^2}{1 + \rho} = b, \quad (50.27)$$

т. е. средний квадрат ошибки, усредненный по всем возможным значениям параметра  $a$ , равен дисперсии (50.20) апостериорного распределения.

Рассмотрим апостериорное распределение (50.19) при больших и малых значениях отношения сигнал/помеха  $\rho$ .

При  $\rho \rightarrow \infty$  имеем

$$\overline{\hat{a}} = a, \quad (50.28)$$

и дисперсия

$$\overline{(\hat{a} - a)^2} = \frac{a_0^2}{\rho} = \frac{\sigma^2}{\sum s_h^2} \quad (50.29)$$

не зависит от неизвестного параметра  $a$  и от  $a_0$ , т. е. от априорного распределения (50.08), а определяется лишь интенсивностью шумов  $\sigma^2$  и энергией сигнала  $\sum s_h^2$ .

Апостериорное распределение при  $\rho \gg 1$  гораздо острее априорного, при этом его дисперсия равна

$$b \approx \frac{a_0^2}{\rho} = \frac{\sigma^2}{\sum s_h^2}, \quad (50.30)$$

т. е. также не зависит от априорного распределения (50.08) и равна дисперсии (50.29).

Средняя квадратичная ошибка измерения, определяемая формулой (50.26), будет равна

$$\Delta^2 = \frac{a_0^2}{\rho}. \quad (50.31)$$

Таким образом, все три средние квадратичные величины (50.29), (50.30) и (50.31) в этом случае совпадают между собой и апостериорное распределение характеризуется двумя параметрами  $\overline{\hat{a}} = a$  и  $b$ .

При  $\rho \rightarrow 0$  мы получаем

$$\hat{a} = 0 \quad (50.32)$$

при любом значении  $a$ , откуда

$$\overline{\hat{a}} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\hat{a} - a} = -a, \quad (50.33)$$

а дисперсия

$$\overline{(\hat{a} - a)^2} = 0. \quad (50.34)$$

Дисперсия же апостериорного распределения при  $\rho \rightarrow 0$  будет равна

$$b = a_0^2, \quad (50.35)$$

т. е. апостериорное распределение имеет ту же дисперсию, что и априорное. Легко видеть, что в этом случае все апостериорное распределение воспроизводит априорное распределение практически без изменений, так что никакой новой информации процесс измерения не дает.

Средняя квадратичная ошибка измерения в этом случае равна

$$\Delta^2 = a^2, \quad (50.36)$$

а ее усредненное значение

$$\overline{\Delta^2} = a_0^2. \quad (50.37)$$

Формулы (50.36) и (50.37) также характеризуют плохое качество измерения.

В принципе можно было бы использовать при любых  $\rho$  в качестве измеренного значения  $a$  величину  $\hat{a}$ , определяемую формулой (50.18), которая, как уже было указано, не зависит от параметра  $a_0$ . Тогда при любых  $\rho$  и фиксированном значении  $a$  распределение случайной величины  $\hat{a}$ , определяемой формулой (50.18), будет равно

$$p_a(\hat{a}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{a_0^2}{2\pi\rho}}} \exp \left\{ -\frac{(\hat{a} - a)^2}{2\frac{a_0^2}{\rho}} \right\}, \quad (50.38)$$

так как величина  $\hat{a}$  имеет следующие статистические свойства

$$\left. \begin{aligned} \overline{\hat{a}} &= a, \\ \overline{(\hat{a} - a)^2} &= \left( \frac{\sum n_h s_h^2}{\sum s_h^2} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum s_h^2} = \frac{a_0^2}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (50.39)$$

Недостаток величины  $\hat{a}$ , определяемой формулой (50.18) при любых  $\rho$ , состоит в том, что при  $\rho \rightarrow 0$  дисперсия  $(\hat{a} - a)^2$  неограниченно возрастает. Кроме того, дисперсия по формуле (50.37) больше средней дисперсии  $b$  по формуле (50.27). В дальнейшем мы будем считать, что измерение производится по максимуму апостериорной вероятности, поскольку преимущества других способов измерения ни в коей мере не компенсируют их недостатков.

### § 51. ВЫДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

В этом параграфе мы разберем простейший случай измерения нескольких неизвестных параметров, а именно, измерение элементов случайной последовательности.

Пусть  $m_h$  и  $n_h$  суть выборки двух независимых случайных процессов  $m(t)$  и  $n(t)$  нормального типа, удовлетворяющих соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \overline{m_h} &= 0, \quad \overline{m_g m_h} = R_{gh}^m, \\ \overline{n_h} &= 0, \quad \overline{n_g n_h} = R_{gh}^n. \end{aligned} \right\} \quad (51.01)$$

Будем считать  $m(t)$  полезным сигналом,  $n(t)$  — помехой, причем поставим задачу об измерении каждого элемента  $m_h$  при наличии помех  $n_h$ .

Априорная  $H$ -мерная плотность вероятности полезного сигнала равна

$$p(m_1, \dots, m_H) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}^m\|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H Q_{gh}^m m_g m_h \right\}, \quad (51.02)$$

а априорная  $H$ -мерная плотность вероятности помех равна

$$P(n_1, \dots, n_H) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}^n\|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g, h=1}^H Q_{gh}^n n_g n_h \right\}. \quad (51.03)$$

Коэффициент правдоподобия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Lambda(m_1, \dots, m_H) &= p(m_1, \dots, m_H) \frac{P(f_1 - m_1, \dots, f_H - m_H)}{P(f_1, \dots, f_H)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}^m\|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g, h} (Q_{gh}^n + Q_{gh}^m) m_g m_h + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{g, h} Q_{gh}^n f_g m_h \right\}. \end{aligned} \quad (51.04)$$

Найдем наиболее вероятные значения  $m_g$ , для чего решим систему уравнений

$$\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial m_g} = 0, \quad g=1, \dots, H. \quad (51.05)$$

Учитывая симметрию матриц  $\|Q_{gh}^n\|$  и  $\|Q_{gh}^m\|$ , мы получим для искомых величин  $\hat{m}_g$  уравнения

$$\sum_j (Q_{gj}^n + Q_{gj}^m) \hat{m}_j - \sum_h Q_{gh}^n f_h = 0, \quad (51.06)$$

так что эти величины являются линейными комбинациями входных данных  $f_h$

$$\hat{m}_g = \sum_h k_{gh} f_h. \quad (51.07)$$

Для коэффициентов  $k_{gh}$  получаются уравнения

$$\sum_j (Q_{gj}^n + Q_{gj}^m) k_{jh} = Q_{gh}^n. \quad (51.08)$$

Эти уравнения путем дозольно угомигельных преобразований приводятся к уравнениям (26.10). Чтобы сократить

эти преобразования, введем матричные обозначения

$$\left. \begin{aligned} k &= \|k_{gh}\|, \quad R_f = \|R_{gh}^f\| = \|R_{gh}^m + R_{gh}^n\| = R^m + R^n, \\ R^m &= \|R_{gh}^m\|, \quad R^n = \|R_{gh}^n\|, \\ Q^m &= \|Q_{gh}^m\|, \quad Q^n = \|Q_{gh}^n\|, \quad Q^f = \|Q_{gh}^f\|, \end{aligned} \right\} \quad (51.09)$$

так что

$$Q R = R^n Q^n = Q^m R^m = R^m Q^m = Q^f R^f = R^f Q^f = E, \quad (51.10)$$

где  $E$  — единичная матрица. Тогда уравнения (51.08) запишутся так:

$$(Q^m + Q^n)k = Q^f \quad (51.11)$$

и умножение на  $R^n$  слева дает

$$(R^n Q^m + E)k = (R^n + R^m)Q^m k = R^f Q^m k = E, \quad (51.12)$$

откуда получаем

$$Q^m k = Q^f, \quad (51.13)$$

и окончательно

$$k = R^m Q^f, \quad k R^f = R^m. \quad (51.14)$$

Это уже совпадает с соотношениями (26.12) и (26.10).

Таким образом, операция выделения случайного сигнала из случайной помехи по максимуму коэффициента правдоподобия является линейной операцией. Она точно совпадает с оптимальной линейной фильтрацией последовательностей, изложенной в гл. IV и основанной на критерии минимума средней квадратичной ошибки. В частности, величины (51.07) совпадают с величинами (26.05).

Полученные результаты устанавливают связь между теорией оптимальной фильтрации случайных последовательностей и процессов, изложенной в первой части книги, и теорией оптимальных приемников. Эту связь можно было бы исследовать более подробно, однако мы ограничимся этими краткими указаниями и перейдем к более сложным вопросам, относящимся к измерению параметров сигнала в присутствии помех.



## § 52. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ СЛАБЫХ И СИЛЬНЫХ ПОМЕХАХ

В двух предыдущих параграфах мы рассмотрели простейшие случаи измерения параметров сигнала при наличии помех. В этих случаях выполнены следующие условия: 1) измеряемые параметры имеют распределение Гаусса; 2) полезный сигнал линейно зависит от измеряемых параметров. При невыполнении этих условий задача сильно усложняется. Теоретическое исследование оптимального приемника, производящего измерение при наличии помех, было впервые проведено В. А. Котельниковым в 1946 г., причем предложенный им метод является весьма общим. В настоящем параграфе мы рассмотрим проблемы измерения параметра сигнала, следуя, в основном, работе Котельникова и лишь применяя иные обозначения; некоторое обобщение по сравнению с этой работой будет заключаться в том, что мы будем считать помехи коррелированными.

Если полезный сигнал  $m(t, \tau)$ , кроме времени  $t$ , зависит только от одного параметра  $\tau$ , который подлежит измерению, то для нормальных помех коэффициент правдоподобия равен

$$\Lambda(\tau) = p_m(\tau) e^{\varphi(\tau) - \frac{1}{2} \mu(\tau)}, \quad (52.01)$$

где  $p_m(\tau)$  — априорная плотность вероятности параметра  $\tau$ , а величины  $\varphi(\tau)$  и  $\mu(\tau)$  имеют обычный смысл

$$\varphi(\tau) = \sum_{g,h} Q_{gh} f_g m_h(\tau) \quad (52.02)$$

и

$$\mu(\tau) = \sum_{g,h} Q_{gh} m_g(\tau) m_h(\tau). \quad (52.03)$$

Здесь  $f_g = f(t_g)$  — выборки процесса на входе приемника,  $m_h(\tau) = m(t_h, \tau)$  — выборки полезного сигнала с параметром  $\tau$ , а  $\|Q_{gh}\|$  — матрица, обратная корреляционной матрице помех, элементы которой равны

$$R_{gh} = \overline{n_g n_h} = \overline{n(t_g) n(t_h)}. \quad (52.04)$$

Оптимальный приемник должен образовывать коэффициент правдоподобия  $\Lambda(\tau)$  или какую-нибудь монотонно воз-

растающую функцию от этого коэффициента (в дальнейшем удобно брать  $\ln \Lambda(\tau)$ ), на основании чего он выдает  $\hat{\tau}$  — значение  $\tau$ , измеренное по максимуму коэффициента правдоподобия. Ясно, что если от приемника требуется определенный ответ в виде числа, то ничего лучшего он дать не может, и нам остается только рассчитать характеристики такого приемника.

Расчет характеристик оптимального приемника, производящего измерение параметра сигнала в присутствии помех, связан с некоторыми трудностями. При слабых помехах, когда ошибки измерения малы и измеряемый параметр  $\tau$  распределен, как и в рассмотренных выше случаях, по закону Гаусса, качество измерения можно характеризовать его средней квадратичной ошибкой (см. далее). При сильных помехах качество измерения удобно характеризовать вероятностью ошибки, превышающей некоторое заданное значение.

Начнем со слабых помех. Из соотношения (52.01) имеем

$$\ln \Lambda(\tau) = \varphi(\tau) - \frac{1}{2} \mu(\tau) + \ln p_m(\tau). \quad (52.05)$$

Величина  $\hat{\tau}$  есть корень уравнения

$$\frac{d}{d\tau} \ln \Lambda(\tau) = 0, \quad (52.06)$$

в котором вторая производная отрицательна

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \ln \Lambda(\tau) < 0 \text{ при } \tau = \hat{\tau}. \quad (52.07)$$

Если есть несколько значений  $\hat{\tau}$ , удовлетворяющих условиям (52.06) и (52.07), то следует выбрать то, для которого  $\Lambda(\hat{\tau})$  максимально, поскольку мы считаем, что присутствует один полезный сигнал.

При  $\tau \approx \hat{\tau}$  можно разложить  $\ln \Lambda(\tau)$  в ряд Тейлора

$$\ln \Lambda(\tau) = \ln \Lambda(\hat{\tau}) - \frac{(\tau - \hat{\tau})^2}{2\Delta^2} + \dots, \quad (52.08)$$

отбрасывая члены порядка  $(\tau - \hat{\tau})^3$  и выше. Положительная величина  $\Delta^2$  определяется соотношением

$$\frac{1}{\Delta^2} = -\frac{d^2}{d\tau^2} \ln \Lambda(\hat{\tau}) = \frac{1}{2} \mu''(\hat{\tau}) - \varphi''(\hat{\tau}) - \frac{d^2}{d\tau^2} \ln p_m(\hat{\tau}). \quad (52.09)$$

Производя дифференцирование, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \mu''(\tau) &= \sum_{g, h} Q_{gh} m'_g(\tau) m'_h(\tau) + \sum_{g, h} Q_{gh} m_g(\tau) m''_h(\tau), \\ \varphi''(\tau) &= \sum_{g, h} Q_{gh} f_g m''_h(\tau), \end{aligned} \right\} (52.10)$$

причем мы использовали симметрию матрицы  $\|Q_{gh}\|$ . Окончательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta^2} &= \sum_{g, h} Q_{gh} m'_g(\hat{\tau}) m'_h(\hat{\tau}) - \sum_{g, h} Q_{gh} [f_g - m_g(\hat{\tau})] m''_h(\hat{\tau}) - \\ &\quad - \frac{d^2}{d\hat{\tau}^2} \ln p_m(\hat{\tau}), \end{aligned} \quad (52.11)$$

и коэффициент правдоподобия при  $\tau \approx \hat{\tau}$  имеет вид

$$\Lambda(\tau) = \Lambda(\hat{\tau}) e^{-\frac{(\tau - \hat{\tau})^2}{2\Delta^2}}. \quad (52.12)$$

Интересно отметить, что в рассмотренных ранее простых случаях эта формула была точной, и мы получали распределение Гаусса при любых  $\tau - \hat{\tau}$ . Формула (52.11) при этом упростилась бы: второе слагаемое обращается в нуль ( $m''_h(\tau) = 0$ , так как полезный сигнал линейно зависит от измеряемого параметра), а третье есть константа (так как распределение  $p_m(\tau)$  является нормальным и  $\ln p_m(\tau)$  — квадратичная функция  $\tau$ ). В общем случае формула (52.12) имеет ограниченное применение, однако при достаточно слабых помехах или, что то же самое, при достаточно больших отношениях сигнал/помеха формула (52.12) определяет нам практически весь апостериорный закон распределения величины  $\tau$ . Это закон Гаусса со средним (и наиболее вероятным) значением  $\hat{\tau}$  и дисперсией  $\Delta^2$ , которую при слабых помехах можно вычислять по формуле

$$\Delta^2 = \frac{1}{\sum_{g, h} Q_{gh} m'_g(\hat{\tau}) m'_h(\hat{\tau})}. \quad (52.13)$$

При уменьшении интенсивности помех и при увеличении мощности сигнала эта величина неограниченно уменьшается и гауссово распределение (52.12) становится все более

„острым“ и поэтому более точным, поскольку отброшенные члены играют все меньшую роль. Величина, стоящая в знаменателе формулы (52.13), всегда положительна [см. далее формулу (52.26)] и монотонно возрастает с увеличением амплитуды сигнала, поэтому остальными слагаемыми в правой части (52.11) можно пренебречь при достаточно больших отношениях сигнал/помеха; для слагаемого  $-\frac{d^2}{d\hat{\tau}^2} \ln p_m(\hat{\tau})$  это верно потому, что оно не зависит от этого отношения, а для суммы

$$\sum_{g,h} Q_{gh} [i_g - m_g(\hat{\tau})] m_h''(\hat{\tau}) \quad (52.14)$$

потому, что при этих условиях разность  $i_g - m_g(\hat{\tau})$  практически определяется помехой и, следовательно, дает меньший вклад в величину  $\frac{1}{\Delta^2}$ .

Предположим, что истинное значение  $\tau$  равно  $\tau_0$ , так что на входе приемника имеется функция

$$f(t) = m(t, \tau_0) + n(t), \quad (52.15)$$

выборки которой равны

$$f_g = m_g(\tau_0) + n_g. \quad (52.16)$$

Какая связь существует между истинным значением  $\tau_0$  и измеряемым значением  $\hat{\tau}$ ?

Функцию (52.02) можно представить в виде

$$\varphi(\tau) = \mu(\tau, \tau_0) + \nu(\tau), \quad (52.17)$$

где

$$\mu(\tau, \tau_0) = \sum_{g,h} Q_{gh} m_g(\tau_0) m_h(\tau) \quad (52.18)$$

и

$$\nu(\tau) = \sum_{g,h} Q_{gh} n_g m_h(\tau), \quad (52.19)$$

причем функция (52.18) обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \mu(\tau, \tau_0) &= \mu(\tau_0, \tau) = \overline{\nu(\tau) \nu(\tau_0)}, \\ \mu(\tau) &= \mu(\tau, \tau) = \overline{\nu^2(\tau)}, \end{aligned} \right\} \quad (52.20)$$

доказательство которых не представляет труда.

Можно ожидать, при слабых помехах разность  $\hat{\tau} - \tau_0$  мала, поэтому в выражении для производной

$$\frac{d}{d\tau} \ln \Lambda(\tau) = \frac{\partial \mu(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} + \nu'(\tau) - \frac{1}{2} \mu'(\tau) + \frac{d}{d\tau} \ln p_m(\tau) \quad (52.21)$$

при  $\tau = \hat{\tau}$  можно ограничиться нулевым и первым членом разложения Тейлора для функций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mu(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} &= \sum_{g, h} Q_{gh} m_g(\tau_0) m'_h(\tau) = \\ &= \sum Q_{gh} m_g(\tau_0) m'(\tau_0) + (\tau - \tau_0) \sum Q_{gh} m_g(\tau_0) m''_h(\tau_0), \\ \frac{1}{2} \mu'(\tau) &= \sum_{g, h} Q_{gh} m_g(\tau) m'(\tau) = \sum Q_{gh} m_g(\tau_0) m'_h(\tau_0) + \\ &+ (\tau - \tau_0) \left[ \sum Q_{gh} m_g(\tau_0) m''_h(\tau_0) + \sum Q_{gh} m'_g(\tau_0) m'_h(\tau_0) \right], \\ \frac{d}{d\tau} \ln p_m(\tau) &= \frac{d}{d\tau_0} \ln p_m(\tau_0) + (\tau - \tau_0) \frac{d^2}{d\tau_0^2} \ln p_m(\tau_0) \end{aligned} \right\} (52.22)$$

и заменить  $\nu'(\tau)$  на  $\nu'(\tau_0)$ . Приравнявая выражение (52.21) при  $\tau = \hat{\tau}$  нулю, получаем для разности  $\hat{\tau} - \tau_0$  выражение

$$\hat{\tau} - \tau_0 = \frac{\nu'(\tau_0) + \frac{d}{d\tau_0} \ln p_m(\tau_0)}{\sum_{g, h} Q_{gh} m'_g(\tau_0) m'_h(\tau_0) - \frac{d^2}{d\tau_0^2} \ln p_m(\tau_0)}, \quad (52.23)$$

где

$$\nu'(\tau_0) = \sum_{g, h} Q_{gh} n_g m'_h(\tau_0). \quad (52.24)$$

В данном приближении случайная величина  $\hat{\tau}$  является нормальной, ее среднее значение и дисперсия равны

$$\left. \begin{aligned} \overline{\hat{\tau}} &= \tau_0 + \frac{\frac{d}{d\tau_0} \ln p_m(\tau_0)}{\sum_{g, h} Q_{gh} m'_g(\tau_0) m'_h(\tau_0) - \frac{d^2}{d\tau_0^2} \ln p_m(\tau_0)}, \\ \overline{(\hat{\tau} - \tau_0)^2} &= \frac{\sum Q_{gh} m'_g(\tau_0) m'_h(\tau_0)}{\left[ \sum Q_{gh} m'_g(\tau_0) m'_h(\tau_0) - \frac{d^2}{d\tau_0^2} \ln p_m(\tau_0) \right]^2}, \end{aligned} \right\} (52.25)$$

поскольку

$$\overline{[v'(\tau_0)]^2} = \sum_{g, h} Q_{gh} m'_g(\tau_0) m'_h(\tau_0). \quad (52.26)$$

При достаточно большом отношении сигнал/помеха производными  $\ln p_m(\tau)$  можно пренебречь по сравнению с величиной (52.26) и мы имеем

$$\overline{\hat{\tau}} = \tau_0, \quad \overline{(\hat{\tau} - \tau_0)^2} = \Delta^2, \quad (52.27)$$

где величина

$$\Delta^2 = \Delta^2(\tau_0) = \frac{1}{\sum Q_{gh} m'_g(\tau_0) m'_h(\tau_0)} \quad (52.28)$$

практически совпадает с величиной (52.13).

Условное распределение величины  $\hat{\tau}$  определяется поэтому нормальным законом

$$p_{\tau_0}(\hat{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta} e^{-\frac{(\hat{\tau} - \tau_0)^2}{2\Delta^2}} \quad (52.29)$$

с той же дисперсией, что и в формуле (52.12).

При уменьшении отношения сигнал/помеха точность выведенных выше соотношений будет падать, и при достаточно сильных помехах они будут давать результаты, неправильные даже качественно. При сильных помехах целесообразно характеризовать качество измерения вероятностью того, что измеренное (любым способом) значение  $\hat{\tau}$  отличается от истинного  $\tau_0$  по абсолютной величине больше, чем на  $\varepsilon$ . Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) &= P(\hat{\tau} > \tau_0 + \varepsilon) + P(\hat{\tau} < \tau_0 - \varepsilon) = \\ &= \int P_{\tau_0}(\hat{\tau} > \tau_0 + \varepsilon) p_m(\tau_0) d\tau_0 + \int P_{\tau_0}(\hat{\tau} < \tau_0 - \varepsilon) p_m(\tau_0) d\tau_0, \end{aligned} \quad (52.30)$$

где  $P_{\tau_0}(\hat{\tau} > \tau_0 + \varepsilon)$  есть вероятность события  $\hat{\tau} > \tau_0 + \varepsilon$  при условии, что истинное значение параметра  $\tau$  равно  $\tau_0$ . При написании формулы (52.30) мы использовали выражение (29.04) для полной вероятности. Переходя в первом интеграле к переменной  $\tau = \tau_0 + \varepsilon$ , а во втором — к переменной  $\tau = \tau_0 - \varepsilon$ , мы получаем

$$\begin{aligned} P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) &= \int [P_{\tau - \varepsilon}(\hat{\tau} > \tau) p_m(\tau - \varepsilon) + \\ &+ P_{\tau + \varepsilon}(\hat{\tau} < \tau) p_m(\tau + \varepsilon)] d\tau. \end{aligned} \quad (52.31)$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда априорное распределение  $p_m(\tau)$  имеет прямоугольную форму

$$\left. \begin{aligned} p_m(\tau) &= \frac{1}{T} \text{ при } 0 < \tau < T, \\ p_m(\tau) &= 0 \text{ при } \tau < 0 \text{ и } \tau > T. \end{aligned} \right\} \quad (52.32)$$

Этого всегда можно добиться надлежащей заменой переменных. Функции  $p_m(\tau)$ ,  $p_m(\tau - \varepsilon)$  и  $p_m(\tau + \varepsilon)$  изображены на рис. 51. Если мы в интеграле (52.31) ограничимся

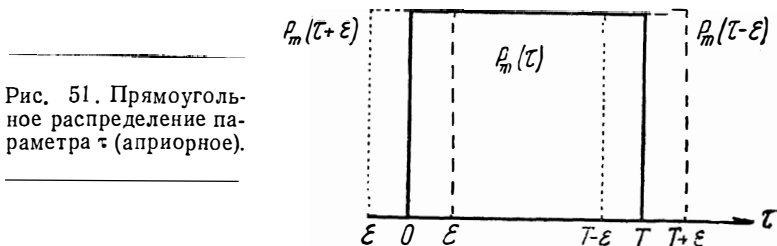


Рис. 51. Прямоугольное распределение параметра  $\tau$  (априорное).

интервалом  $\varepsilon < \tau < T - \varepsilon$ , то в виду положительности подынтегральных функций мы можем только уменьшить значение интеграла, и поэтому

$$P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) \geq \frac{1}{T} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} [P_{\tau-\varepsilon}(\hat{\tau} > \tau) + P_{\tau+\varepsilon}(\hat{\tau} < \tau)] d\tau. \quad (52.33)$$

Для подынтегральной функции в последнем выражении можно вывести следующее неравенство

$$\frac{1}{2} [P_{\tau-\varepsilon}(\hat{\tau} > \tau) + P_{\tau+\varepsilon}(\hat{\tau} < \tau)] \geq F\left(\frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)}\right), \quad (52.34)$$

где

$$F(z_*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (52.35)$$

есть вероятность ложной тревоги при простом обнаружении, соответствующая нормированному порогу  $z_*$  [см. формулу (31.34)], а

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(\tau) &= \sum_{g,h} Q_{gh} [m_g(\tau+\varepsilon) - m_g(\tau-\varepsilon)] [m_h(\tau+\varepsilon) - m_h(\tau-\varepsilon)] = \\ &= \mu(\tau+\varepsilon) + \mu(\tau-\varepsilon) - 2\mu(\tau+\varepsilon, \tau-\varepsilon) \end{aligned} \quad (52.36)$$

есть отношение сигнал/помеха в задаче об обнаружении разностного полезного сигнала

$$\left. \begin{aligned} m_{\varepsilon}(t, \tau) &= m(t, \tau + \varepsilon) - m(t, \tau - \varepsilon), \\ m_{\varepsilon h}(\tau) &= m_h(\tau + \varepsilon) - m_h(\tau - \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (52.37)$$

на фоне нормальных коррелированных помех.

Неравенство (52.34) доказывается следующим образом. Пусть на фоне помех производится прием одного из сигналов  $m(t, \tau + \varepsilon)$  или  $m(t, \tau - \varepsilon)$ , причем априорная вероятность каждого из них равна  $\frac{1}{2}$ . Оптимальный приемник, производящий различие двух взаимно исключающих случаев

$$f(t) = m(t, \tau + \varepsilon) + n(t) \text{ и } f(t) = m(t, \tau - \varepsilon) + n(t) \quad (52.38)$$

есть по существу оптимальный приемник обнаружения разностного сигнала (52.37) в известной нам разностной функции

$$\tilde{f}(t) = f(t) - m(t, \tau - \varepsilon). \quad (52.39)$$

Такой приемник однозначно определяется, например, заданием вероятности ложной тревоги  $F$  или порога  $z_*$  в формуле (52.35), вероятность правильного обнаружения  $D$  зависит еще от параметра (52.36). Полная вероятность принятия правильного решения определяется формулой (30.11), а полная вероятность ошибки  $V$  при равновероятности обоих сигналов равна

$$V = 1 - W = \frac{1}{2}(1 - D + F). \quad (52.40)$$

Она зависит от  $F$ . Производная

$$\frac{\partial V}{\partial F} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial D}{\partial F} + 1 \right) \quad (\text{при } \mu_{\varepsilon}(\tau) = \text{const}) \quad (52.41)$$

обращается в нуль при условии

$$\frac{\partial D}{\partial F} = \Lambda_* = 1 \quad (52.42)$$

[ср. формулу (31.39)], что, как легко видеть, соответствует минимуму  $V$ . Учитывая, соотношение

$$\Lambda_* = e^{\varphi} \cdot \frac{1}{2} \mu_{\varepsilon}(\tau), \quad (52.43)$$



мы видим, что для достижения минимального значения  $V$  надо в формуле (31.34) положить

$$\varphi_* = \frac{1}{2} \mu_\varepsilon(\tau), \quad z_* = \frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)}, \quad (52.44)$$

и формула (31.35) принимает вид

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - F, \quad (52.45)$$

откуда окончательно

$$V_{\min} = F\left(\frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)}\right). \quad (52.46)$$

Левая часть соотношения (52.34) равна полной вероятности ошибки для приемника, осуществляющего различение сигналов  $m(t, \tau - \varepsilon)$  и  $m(t, \tau + \varepsilon)$  с помощью измерения параметра  $\tau$ . При этом считается принятым первый сигнал, если  $\hat{\tau}$  — измеренное значение параметра — меньше  $\tau$ , и второй сигнал — при  $\hat{\tau} > \tau$ . Поскольку такой способ различения двух сигналов является неоптимальным и во всяком случае не может приводить к вероятности ошибки, меньшей чем вероятность (52.46), мы и получаем неравенство (52.34)\*.

Формулы (52.33) и (52.34) приводят к выражению

$$P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) \geq \frac{2}{T} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} F\left(\frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)}\right) d\tau, \quad (52.47)$$

связывающему вероятность ошибки при измерении параметра  $\tau$  с вероятностью ложной тревоги при обнаружении разностного сигнала (52.37).

\* Формула (52.46) соответствует так называемому идеальному наблюдателю, который обеспечивает максимум  $W$  и минимум  $V=1-W$ . В гл. V указано (см. мелкий шрифт в конце § 30), что идеальный наблюдатель эквивалентен оптимальному приемнику обнаружения с вероятностью  $F$ , соответствующей максимуму  $W$ . Строгое доказательство того, что такой оптимальный приемник дает абсолютный максимум  $W$ , дано в приложении I.

При достаточно малых  $\varepsilon$  можно положить

$$m_h(\tau + \varepsilon) - m_h(\tau - \varepsilon) = 2\varepsilon m'_h(\tau) \quad (52.48)$$

и поэтому величина (52.36) приближенно равна

$$\mu_\varepsilon(\tau) = \frac{4\varepsilon^2}{\Delta^2(\tau)}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)} = \frac{\varepsilon}{\Delta(\tau)}, \quad (52.49)$$

где  $\Delta^2(\tau)$  определяется формулой (52.28). Поэтому правая часть формулы (52.45) равна

$$\frac{2}{T} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} F\left(\frac{1}{2} \sqrt{\mu_\varepsilon(\tau)}\right) d\tau = \frac{2}{T} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} F\left(\frac{\varepsilon}{\Delta(\tau)}\right) d\tau \approx \frac{2}{T} \int_0^T F\left(\frac{\varepsilon}{\Delta(\tau)}\right) d\tau. \quad (52.50)$$

Если помехи достаточно слабы и измерение производится по максимуму коэффициента правдоподобия, то с помощью распределения (52.29) можно вычислить условную вероятность ошибки

$$\begin{aligned} P_{\tau_0}(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\Delta(\tau_0)}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2(\tau_0)}} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\varepsilon}{\Delta(\tau_0)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2F\left(\frac{\varepsilon}{\Delta(\tau_0)}\right), \end{aligned} \quad (52.51)$$

и полная вероятность ошибки равна

$$P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) = \frac{2}{T} \int_0^T F\left(\frac{\varepsilon}{\Delta(\tau_0)}\right) d\tau_0. \quad (52.52)$$

Сравнивая последнее выражение с формулами (52.47) и (52.50), мы видим, что если измерение производится по коэффициенту правдоподобия, то при малых ошибках  $\varepsilon$  и слабых помехах знак неравенства в соотношении (52.47) можно заменить на знак равенства. Приемник, осуществляющий такое измерение, является оптимальным в том смысле, что обеспечивает минимальную вероятность ошибки  $P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon)$ . В других случаях формула (52.47) дает, вообще говоря, лишь одностороннюю оценку погрешности измерения и вероятность ошибки  $P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon)$  может значительно превосходить минимальное значение (ср. конец § 56).

### § 53. ПРОСТОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРИХОДА СИГНАЛА ПРИ СЛАБЫХ ПОМЕХАХ

Одним из наиболее часто используемых в радиолокации способов измерения неизвестных координат цели является измерение момента прихода сигнала, отраженного от цели. В этом и следующих параграфах мы рассмотрим измерение времени прихода сигнала  $\tau$ , от которого полезный сигнал зависит следующим образом

$$m(t, \tau) = m(t - \tau), \quad (53.01)$$

причем мы пренебрегаем возможной зависимостью амплитуды сигнала от  $\tau$ . Априорное распределение параметра  $\tau$  для простоты предполагается прямоугольным [см. формулу (52.32)].

Вводимый таким образом параметр  $\tau$  обладает рядом особенностей, которые облегчают как практическое осуществление оптимального приемника, производящего измерение, так и теоретическое исследование возможностей измерения.

Действительно, функцию (52.02) в данном случае можно записать так:

$$\varphi(\tau) = \sum_g k_g(\tau) f_g, \quad (53.02)$$

где

$$k_g(\tau) = \sum_h Q_{gh} m_h(\tau) = \sum_h Q_{gh} m(t_h - \tau). \quad (53.03)$$

Последняя формула эквивалентна вычислению коэффициентов  $k_g(\tau)$  из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_h R_{gh} k_h(\tau) = m(t_g - \tau), \quad g, h = 1, \dots, H, \quad (53.04)$$

причем для стационарных помех

$$R_{gh} = R(t_g - t_h). \quad (53.05)$$

Поэтому коэффициенты  $k_g(\tau)$  могут быть записаны следующим образом:

$$k_g(\tau) = k(\tau - t_g) \Delta t, \quad (53.06)$$

и выражение (53.02) приобретает вид

$$\varphi(\tau) = \Delta t \sum_g k(\tau - t_g) f_g, \quad (53.07)$$

что по существу совпадает с формулой (26.47). Если промежуток наблюдения бесконечен, то функцию  $\varphi(\tau)$  можно получить в виде процесса на выходе фильтра с частотной характеристикой (27.10), причем параметр  $\tau$  играет роль физического времени. Результаты получатся практически те же, если наблюдение производится за конечный промежуток времени, охватывающий все сигналы — от самого раннего сигнала  $m(t)$  до самого позднего сигнала  $m(t-T)$  — и, кроме того, имеющий на концах дополнительные промежутки, продолжительность которых определяется временем корреляции помех (ср. конец § 27). В других случаях приходится решать систему уравнений (53.04) или соответствующее интегральное уравнение, но формула (53.07) остается в силе, так что  $\varphi(\tau)$  воспроизводится (в виде функции времени) некоторым линейным фильтром.

Случайную функцию  $v(\tau)$ , определенную формулой (52.19), можно представить в аналогичном виде

$$v(\tau) = \Delta t \sum_g k(\tau - t_g) n(t_g) \quad (53.08)$$

и рассматривать как результат прохождения помехи  $n(t)$  через рассмотренный выше фильтр, в котором  $k(\tau - t)$  есть реакция на единичный импульс. Легко видеть, что  $v(\tau)$  есть стационарный случайный процесс, автокорреляционная функция которого

$$\mu(\tau, \tau_0) = \overline{v(\tau) v(\tau_0)} \quad (53.09)$$

есть четная функция разности  $\tau - \tau_0$ . Поэтому в данном случае

$$\mu(\tau, \tau_0) = \mu(\tau - \tau_0) = \mu(\tau_0 - \tau), \quad (53.10)$$

причем выполняется соотношение

$$|\mu(\tau - \tau_0)| \leq \mu. \quad (53.11)$$

Параметр  $\mu = \mu(0)$  есть эффективное отношение сигнал/помеха (не зависящее от  $\tau$ ), которое было введено еще в § 31. Введенная в формуле (52.36) величина  $\mu_\varepsilon(\tau)$  также не зависит от  $\tau$ , и мы будем ее просто обозначать как

$$\mu_\varepsilon = 2[\mu - \mu(2\varepsilon)]. \quad (53.12)$$

Считая разность  $\tau - \tau_0$  достаточно малой и учитывая, что  $\mu(\tau - \tau_0)$  есть четная функция, можно написать разложение

$$\mu(\tau - \tau_0) = \mu \left[ 1 - \frac{1}{2} (\delta\omega)^2 (\tau - \tau_0)^2 \right], \quad (53.13)$$

где параметр  $\delta\omega$ , имеющий размерность частоты, определяется формулой

$$(\delta\omega)^2 = -\frac{\mu''(0)}{\mu(0)} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau_0} \mu(\tau - \tau_0) \Big|_{\tau = \tau_0} \quad (53.14)$$

или в развернутом виде

$$(\delta\omega)^2 = \frac{\sum_{g,h} Q_{gh} m'(t_g) m'(t_h)}{\sum_{g,h} Q_{gh} m(t_g) m(t_h)}. \quad (53.15)$$

Введенная в § 52 величина  $\Delta$  равна

$$\Delta = \frac{1}{\delta\omega \sqrt{\mu}}. \quad (53.16)$$

Она не зависит от  $\tau$  и определяет дисперсию случайной величины  $\hat{\tau}$  — значения параметра  $\tau$ , измеренного по максимуму коэффициента правдоподобия [ср. формулы (52.28) и (52.29)].

Выясним смысл параметра  $\delta\omega$ . Для некоррелированных помех имеем

$$(\delta\omega)^2 = \frac{\sum_h [m'(t_h)]^2}{\sum_h m^2(t_h)} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \omega^2 |M(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} |M(\omega)|^2 d\omega}, \quad (53.17)$$

так что  $\delta\omega$  определяется формой полезного сигнала и характеризует полосу частот, занятую сигналом. Параметр  $\delta\omega$  отличается, однако, от ширины полосы  $\Delta\omega$ , которую мы определили формулой (3.30). Оба параметра по порядку

величины часто одинаковы, тогда параметр  $\delta\omega$  по порядку равен  $\frac{1}{T_0}$ , где  $T_0$  — длительность полезного сигнала [см. ниже формулы (53.23) и (53.25) для колоколообразного и треугольного импульсов]. Однако в некоторых случаях  $\delta\omega$  может значительно превосходить  $\Delta\omega$  и  $\frac{1}{T_0}$  [ср. ниже формулу (53.29)]; эти случаи имеют важное практическое значение.

Поскольку выражения (52.22) или (53.13) для  $\mu(\tau, \tau_0)$  справедливы лишь при условии

$$\delta\omega(\tau - \tau_0) \sim \delta\omega\Delta \ll 1, \quad (53.18)$$

то и полученная выше формула (53.16) справедлива лишь при условиях

$$\mu \gg 1 \text{ и } \Delta \ll T_0, \quad (53.19)$$

так что сказанное выше относится к точному измерению параметра  $\tau$  при слабых помехах. По мере уменьшения  $\mu$  величина  $\Delta$  растет, и, начиная с некоторого значения  $\mu$ , формула (53.16) становится непригодной. Можно считать, что применимость формулы (52.22) или (53.13) при  $|\tau - \tau_0| \sim \Delta$  определяет нижний предел для „больших“ значений параметра  $\mu$ , при которых еще справедлива формула (53.16). Во всяком случае эта применимость есть необходимое условие того, что помехи можно считать слабыми.

Если помехи коррелированы, то вместо формулы (53.17) мы имеем

$$(\delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \frac{\omega^2 |M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega}{\int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega}, \quad (53.20)$$

так что  $\delta\omega$  зависит от формы спектра помех. Величину  $\delta\omega$  можно называть „средней квадратичной“ шириной полосы полезного сигнала на выходе оптимального линейного фильтра, рассмотренного нами ранее (см. § 27).

Рассмотрим в заключение некоторые частные случаи измерения момента прихода  $\tau$  полезного сигнала на фоне некоррелированной помехи (белого шума) по функции  $f(t)$ , известной в некотором интервале времени. В этом случае величину  $\delta\omega$  можно вычислять по формуле

$$(\delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [m'(t)]^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} m^2(t) dt}. \quad (53.21)$$

Для колоколообразного (гауссова) импульса

$$m(t) = ae^{-\frac{t^2}{2\beta^2}} \quad (53.22)$$

(где  $a$  и  $\beta$  — постоянные) мы получаем

$$\delta\omega = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}. \quad (53.23)$$

Для треугольного импульса

$$\left. \begin{aligned} m(t) &= a \left(1 - \frac{2|t|}{T_0}\right) \text{ при } |t| \leq \frac{T_0}{2}, \\ m(t) &= 0 \text{ при } |t| > \frac{T_0}{2} \end{aligned} \right\} \quad (53.24)$$

мы имеем

$$\delta\omega = \frac{2\sqrt{3}}{T_0}. \quad (53.25)$$

Для прямоугольного импульса

$$\left. \begin{aligned} m(t) &= a \text{ при } |t| < \frac{T_0}{2}, \\ m(t) &= 0 \text{ при } |t| > \frac{T_0}{2} \end{aligned} \right\} \quad (53.26)$$

величина  $\delta\omega$  получается бесконечной, поскольку производная  $m'(t)$  при  $t = \pm \frac{T_0}{2}$  бесконечно велика. Поэтому величина  $\Delta$  по формуле (53.16) получается равной нулю, что свидетельствует о неприменимости рассуждения § 52 к

прямоугольному импульсу, являющемуся чрезмерной идеализацией реальных радиолокационных сигналов, имеющих круглые (но не бесконечно круглые) склоны. В самом деле, функция  $\mu(\tau - \tau_0)$  для прямоугольного импульса равна (ср. § 20)

$$\left. \begin{aligned} \mu(\tau - \tau_0) &= \mu \left[ 1 - \frac{|\tau - \tau_0|}{T_0} \right] && \text{при } |\tau - \tau_0| \leq T_0, \\ \mu(\tau - \tau_0) &= 0 && \text{при } |\tau - \tau_0| \geq T_0, \end{aligned} \right\} (53.27)$$

так что разложение (53.13) для такого сигнала несправедливо.

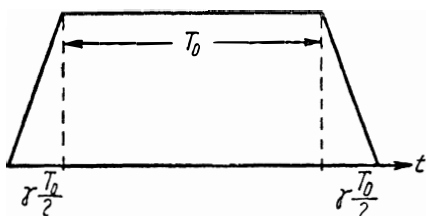


Рис. 52. Трапеци-  
идальный импульс.

Чтобы разобраться в этом вопросе более детально, рассмотрим трапециoidalный импульс (рис. 52)

$$\left. \begin{aligned} m(t) &= a && \text{при } |t| \leq \frac{T_0}{2}, \\ m(t) &= a \frac{1 + \gamma - \frac{2|t|}{T_0}}{\gamma} && \text{при } \frac{T_0}{2} \leq |t| \leq (1 + \gamma) \frac{T_0}{2}, \\ m(t) &= 0 && \text{при } |t| \geq (1 + \gamma) \frac{T_0}{2}, \end{aligned} \right\} (53.28)$$

для которого

$$\delta\omega = \frac{2}{\sqrt{\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) T_0}} \approx \frac{2}{\sqrt{\gamma} T_0} \quad \text{при } \gamma \ll 1. \quad (53.29)$$

Вычисляя функции  $\mu(\tau - \tau_0)$  для взятых импульсов, можно оценить применимость приближенной формулы (53.13). Колоколообразному импульсу (53.22) соответствует функция

$$\mu(\tau - \tau_0) = \mu e^{-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{4\beta^2}}, \quad \mu = \frac{\sqrt{\pi} a^2 \beta}{S_n}, \quad (53.30)$$



а треугольному — функция

$$\left. \begin{aligned} \mu(\tau - \tau_0) &= \mu \left[ 1 - 6 \frac{(\tau - \tau_0)^2}{T_0^2} + 6 \frac{|\tau - \tau_0|^3}{T_0^3} \right] && \text{при } |\tau - \tau_0| \leq \frac{T_0}{2}, \\ \mu(\tau - \tau_0) &= 2\mu \left[ 1 - \frac{|\tau - \tau_0|}{T_0} \right]^3 && \text{при } \frac{T_0}{2} \leq |\tau - \tau_0| \leq T_0, \\ \mu(\tau - \tau_0) &= 0 && \text{при } |\tau - \tau_0| \geq T_0, \\ \mu &= \frac{a^2 T_0}{3S_n}, \end{aligned} \right\} \quad (53.31)$$

так что выражение (53.13) справедливо лишь при условии

$$(\tau - \tau_0)^2 \leq 4\beta^2 \quad (53.32)$$

для колоколообразного импульса, и при условии

$$|\tau - \tau_0| \leq T_0 \quad (53.33)$$

для треугольного импульса. Поскольку параметр  $\beta$  для колоколообразного импульса определяет его эффективную длительность, оба условия (53.32) и (53.33) по существу равнозначны и приводят к соотношениям (53.18) и (53.19).

Для трапециoidalного импульса (53.28) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \mu(\tau - \tau_0) &= \mu \left[ 1 - \frac{2(\tau - \tau_0)^2}{\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{3}\right) T_0^2} + \frac{4|\tau - \tau_0|^3}{3\gamma^2 \left(1 + \frac{\gamma}{3}\right) T_0^3} \right] && \text{при } |\tau - \tau_0| \leq \gamma \frac{T_0}{2}, \\ \mu(\tau - \tau_0) &= \mu \left[ \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{3}} - \frac{|\tau - \tau_0|}{\left(1 + \frac{\gamma}{3}\right) T_0} \right] && \text{при } \frac{\gamma T_0}{2} \leq |\tau - \tau_0| \leq T_0, \\ \mu(\tau - \tau_0) &= 0 && \text{при } |\tau - \tau_0| \geq (1 + \gamma) T_0, \\ \mu &= \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{3}\right) a^2 T_0}{S_n}, \end{aligned} \right\} \quad (53.34)$$

так что выражение (53.13) применимо лишь при условии

$$|\tau - \tau_0| \ll \frac{\gamma T_0}{2}, \quad (53.35)$$

а при  $\frac{\gamma T_0}{2} \leq |\tau - \tau_0| \leq T_0$  и  $\gamma \ll 1$  функция (53.34) практически совпадает с выражением (53.27) для прямоугольного импульса.

Теперь мы можем оценить возможности, имеющиеся при измерении момента прихода трапециoidalного импульса с достаточно крутыми склонами, т. е. с достаточно малым  $\gamma$ . Поскольку согласно формулам (53.16) и (53.29) погрешность в измерении момента прихода определяется величиной

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu} T_0} = \frac{\sqrt{S_n \gamma T_0}}{2a} \quad (\text{при } \gamma \ll 1), \quad (53.36)$$

то, действительно,  $\Delta \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Однако формула (53.16) справедлива лишь при условии

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu} T_0} \ll \frac{\gamma T_0}{2}, \quad (53.37)$$

которое можно записать в виде

$$\mu \gg \frac{1}{\gamma} \quad \text{или} \quad \frac{a^2}{S_n} \gg \frac{1}{\gamma T_0}, \quad (53.38)$$

т. е. чем круче фронт зондирующего сигнала и чем больше величина  $\delta\omega$ , тем при больших значениях параметра  $\mu$  (отношения сигнал/помеха) необходимо производить измерение, чтобы получить среднюю квадратичную ошибку (53.36).

Из этого примера видно, что применение длительных сигналов, удовлетворяющих условию  $\delta\omega \gg \frac{1}{T_0}$ , позволяет повысить точность измерения момента прихода, определяющего в радиолокации дальность цели. Однако чрезмерное увеличение  $\delta\omega$  (при данных  $T_0$  и  $\mu$ ) может не привести к желаемому увеличению точности, так как формула (53.16) справедлива лишь при определенных условиях.

Полученный результат является частным случаем положения, установленного В. А. Котельниковым на основании рассмотрения различных способов модуляции сигнала. Чем меньше вероятность малых ошибок при слабых (малых)

помехах, «тем при меньшей интенсивности помехи наступает граница между «большой» и «малой» помехой. При «большой» же помехе выведенные формулы становятся неверными. В пределе изложенные здесь способы позволяют свести погрешность, получаемую от воздействия «малых» помех, к нулю, но при этом «малыми» помехами должны будут считаться помехи, интенсивность которых также равна нулю. Таким образом, этими способами совершенно уничтожить действие помех, как и следовало ожидать, не удастся, можно лишь получить уменьшение их влияния. Такое уменьшение бывает целесообразно в случае помех с достаточно малой интенсивностью и необходимости иметь очень малые ошибки при передаче».

#### § 54. СЛОЖНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРИХОДА СИГНАЛА ПРИ СЛАБЫХ ПОМЕХАХ

В предыдущем изложении мы не учитывали того обстоятельства, что полезный сигнал  $m(t - \tau)$ , время прихода  $\tau$  которого мы должны измерить, имеет характер высокочастотного сигнала и может быть записан в виде

$$m(t - \tau) = e(t - \tau) \cos [\omega_0(t - \tau) - \psi(t - \tau) - \theta], \quad (54.01)$$

где  $\omega_0$  — несущая частота,  $e(t)$  — огибающая,  $\psi(t)$  — медленно меняющаяся (дополнительная) фаза,  $\theta$  — начальная фаза. Такой же характер имеет и функция

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \sum_{g,h} Q_{gh} f_g m_h(\tau) = \\ &= \sum_{g,h} Q_{gh} f_g e(t_h - \tau) \cos[\omega_0(t_h - \tau) - \psi(t_h - \tau) - \theta], \end{aligned} \quad (54.02)$$

которую можно написать в виде

$$\varphi(\tau) = \mathcal{G}(\tau) \cos [\omega_0 \tau - \Phi(\tau) + \theta], \quad (54.03)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}(\tau) \cos \Phi(\tau) &= \\ &= \sum_{g,h} Q_{gh} f_g e(t_h - \tau) \cos [\omega_0 t_h - \psi(t_h - \tau)], \\ \mathcal{G}(\tau) \sin \Phi(\tau) &= \\ &= \sum_{g,h} Q_{gh} f_g e(t_h - \tau) \sin [\omega_0 t_h - \psi(t_h - \tau)], \end{aligned} \right\} \quad (54.04)$$

причем  $\mathcal{G}(\tau)$  и  $\Phi(\tau)$  — медленно меняющиеся функции (по сравнению с высокочастотной фазой  $\omega_0\tau$ ).

Оптимальное устройство точного измерения позволяет в принципе измерить время прихода с точностью до долей периода несущей, равного  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ . Для этого необходимо измерять начальную фазу  $\theta$  полезного сигнала. Однако в большинстве случаев детальная информация о времени запаздывания, связанная с фазой  $\theta$ , является излишней, так что  $\theta$  можно считать неизвестным параметром, равномерно распределенным в пределах окружности ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ). Тогда мы приходим к проблеме сложного измерения параметра  $\tau$  при наличии случайного (неизвестного) параметра  $\theta$ , причем коэффициент правдоподобия  $\Lambda(\tau)$  оказывается равным (ср. § 33)

$$\Lambda(\tau) = p_m(\tau) e^{-\frac{1}{2}\mu} I_0(\mathcal{G}(\tau)). \quad (54.05)$$

При прямоугольном априорном распределении (52.32) и независимости  $\mu$  от  $\tau$ , оптимальный приемник сложного измерения должен выдавать  $\hat{\tau}$  — измеренное значение  $\tau$ , соответствующее максимуму функции

$$\mathcal{G}^2(\tau) = \left\{ \sum_{g,h} Q_{gh} f_g e^{(t_h - \tau)} \cos[\omega_0 t_h - \psi(t_h - \tau)] \right\}^2 + \\ + \left\{ \sum_{g,h} Q_{gh} f_g e^{(t_h - \tau)} \sin[\omega_0 t_h - \psi(t_h - \tau)] \right\}^2. \quad (54.06)$$

Пусть данные нам значения  $f_g$  равны

$$f_g = e^{(t_g - \tau_0)} \cos[\omega_0(t_g - \tau_0) - \psi(t_g - \tau_0) - \theta_0] + n_g, \quad (54.07)$$

где  $\tau_0$  есть истинное время прихода полезного сигнала,  $\theta_0$  — его фаза,  $n_g$  — значения помехи в моменты  $t_g$ . Пренебрегая, как в § 33, суммами быстро осциллирующих слагаемых, пропорциональных

$$\cos[\omega_0(t_g + t_h) - \psi(t_g - \tau_0) - \psi(t_h - \tau)] \text{ и} \\ \sin[\omega_0(t_g + t_h) - \psi(t_g - \tau_0) - \psi(t_h - \tau)], \quad (54.08)$$

Мы без каких-либо других пренебрежений можем преобразовать формулу (54.06) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2(\tau) = & \left\{ M \cos(\omega_0 \tau_0 - \Psi + \theta_0) + \right. \\ & \left. + \sum_{g,h} Q_{gh} n_g e(t_h - \tau) \cos[\omega_0 t_h - \psi(t_h - \tau)] \right\}^2 + \\ & + \left\{ M \sin(\omega_0 \tau_0 - \Psi + \theta_0) + \right. \\ & \left. + \sum_{g,h} Q_{gh} n_g e(t_h - \tau) \sin[\omega_0 t_h - \psi(t_h - \tau)] \right\}^2, \quad (54.09) \end{aligned}$$

где величины  $M$  и  $\Psi$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} M \cos \Psi = & \frac{1}{2} \sum_{g,h} Q_{gh} e(t_g - \tau_0) e(t_h - \tau) \cos[\omega_0(t_g - t_h) - \\ & - \psi(t_g - \tau_0) + \psi(t_h - \tau)], \\ M \sin \Psi = & \frac{1}{2} \sum_{g,h} Q_{gh} e(t_g - \tau_0) e(t_h - \tau) \sin[\omega_0(t_g - t_h) - \\ & - \psi(t_g - \tau_0) + \psi(t_h - \tau)]. \end{aligned} \quad (54.10)$$

Нетрудно показать (ср. § 53), что  $M = M(\tau - \tau_0)$  и  $\Psi = \Psi(\tau - \tau_0)$ , причем  $M$  есть четная, а  $\Psi$  — нечетная функция  $\tau - \tau_0$  и, кроме того,

$$\mu = M(0). \quad (54.11)$$

Если параметр  $\mu$  велик (т. е. помехи достаточно слабые), то первый член в каждой из фигурных скобок (54.09), как правило, значительно больше второго (т. е. суммы, обусловленной значениями помехи  $n_g$ ), и поэтому при образовании квадратов сумм в фигурных скобках можно пренебречь квадратами этих членов. В результате получаем

$$\mathcal{E}^2(\tau) = M^2(\tau - \tau_0) + 2M(\tau - \tau_0)N(\tau, \tau_0), \quad (54.12)$$

где

$$\begin{aligned} N(\tau, \tau_0) = \\ = \sum_{g,h} Q_{gh} n_g e(t_h - \tau) \cos[\omega_0 t_h - \psi(t_h - \tau) - \omega_0 \tau_0 + \Psi - \theta_0]. \end{aligned} \quad (54.13)$$

Пренебрегая при вычислении квадратного корня из правой части (54.12) членами порядка  $\frac{N^2}{M^2}$  по сравнению с удержанными, т. е. делая то же приближение, что и при написании самой формулы (54.12), получим

$$\mathcal{G}(\tau) = M(\tau - \tau_0) + N(\tau, \tau_0). \quad (54.14)$$

Можно сказать, что при достаточно больших отношениях сигнал/помеха выражение для огибающей  $\mathcal{G}(\tau)$  как бы „линеаризуется“, т. е. представляется в виде суммы полезного сигнала  $M$  и помехи  $N$ . Чтобы избежать усложнений, ограничимся наиболее простым случаем, когда помеха является белым шумом

$$Q_{gh} = \frac{1}{R_n(0)} \delta_{gh}. \quad (54.15)$$

В этом случае формулы (54.10) дают

$$M(\tau - \tau_0) = \frac{1}{2R_n(0)} \sum_h e(\tau_h - \tau_0) e(t_h - \tau), \quad (54.16)$$

если к тому же сделать предположение, что частотная и фазовая модуляции отсутствуют ( $\psi(t) \equiv 0$ ). Из формулы (54.13) легко находим

$$\left[ \frac{\partial N(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} \right]^2 = \frac{1}{2R_n(0)} \sum_h [e'(t_h - \tau_0)]^2 \text{ при } \tau = \tau_0. \quad (54.17)$$

Пользуясь приближенным выражением

$$M(\tau - \tau_0) = \mu \left[ 1 - \frac{1}{2} (\delta\omega)^2 (\tau - \tau_0)^2 \right], \quad (54.18)$$

где

$$(\delta\omega)^2 = \frac{\sum_h [e'(t_h - \tau_0)]^2}{\sum_h e^2(t_h - \tau)}, \quad (54.19)$$

мы, как и в § 52 и 53, получаем для дисперсии  $\Delta^2$  измеряемого значения  $\hat{\tau}$  выражение

$$\Delta = \frac{1}{\delta\omega \sqrt{\mu}}, \quad (54.20)$$

по существу эквивалентное формуле (53.16).

В предыдущем параграфе мы считали, что полезный сигнал является видеоимпульсом—колоколообразным, треугольным или трапециoidalным импульсом без высокочастотного заполнения. Выведенные выше соотношения показывают, что если полезный сигнал является высокочастотным импульсом без фазовой и частотной модуляции, то при больших значениях  $\mu$  измерение момента его прихода сводится к измерению момента прихода видеоимпульса  $\frac{e(t-\tau)}{\sqrt{2}}$ , где  $e(t-\tau)$ —огibaющая высокочастотного импульса. Тем самым результаты § 53 распространяются на случай радиолокационного измерения дальности и азимута по времени прихода радиоимпульсов.

### § 55. ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ПРИХОДА СИГНАЛА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОМЕХАХ

Неравенство (52.47), выведенное ранее для простого измерения любого параметра, упрощается в случае, когда  $\tau$  есть время прихода полезного сигнала, поскольку тогда величина  $\mu_\varepsilon$  не зависит от  $\tau$  и определяется формулой (53.12)

$$\mu_\varepsilon = 2 [\mu - \mu(2\varepsilon)]. \quad (55.01)$$

Интеграл в правой части неравенства (52.47) тогда вычисляется элементарно, и мы получаем

$$P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) \geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{T}\right) A, \quad (55.02)$$

где

$$A = 2F\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu_\varepsilon}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\mu_\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (55.03)$$

есть минимальная вероятность ошибки в оптимальном приемнике, различающем два равновероятных сигнала  $m(t, \tau + \varepsilon)$  и  $m(t, \tau - \varepsilon)$  [т. е. обнаруживающем разностный сигнал (52.37)].

В § 52 мы показали, что при малых  $\varepsilon$  и слабых помехах в соотношении (55.02) можно знак неравенства заменить знаком равенства, если простое измерение производится по коэффициенту правдоподобия. При сильных помехах, когда

отношение сигнал/помеха достаточно мало,  $F \approx \frac{1}{2}$  и  $A \approx 1$ , мы, очевидно, имеем

$$P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) = 1 - \frac{2\varepsilon}{T}, \quad (55.04)$$

так как вероятность получить  $\hat{\tau}$  в данном интервале определяется априорным распределением (52.32). Следовательно, и в этом предельном случае в соотношении (55.02) можно взять знак равенства. Однако в промежуточных случаях коэффициент  $A$  лишь определяет нижнюю границу вероятности ошибки при оптимальном измерении.

Величину  $A$  мы изобразили на рис. 53. Ее можно называть коэффициентом неопределенности (или ненадежности) при измерении. При  $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$  коэффициент  $A \rightarrow 0$ , вероятность ошибки исчезает, и мы получаем при измерении определенный результат. При  $\mu_\varepsilon \rightarrow 0$  коэффициент  $A \rightarrow 1$ ; это значит, что наблюдаемые максимумы (пики) коэффициента правдоподобия  $\Lambda(\tau)$  или апостериорного распределения  $p_f[m(\tau)]$  никаким сигналам не соответствуют и являются лишь случайными выбросами помехи, полностью маскирующей полезный сигнал.

Коэффициент  $A$  и рис. 53 допускают различные интерпретации. Пусть мы измеряем положение сигнала на фоне белого шума по входному процессу  $f(t)$ , причем продолжительность сигнала равна  $T_0$  и вне соответствующего интервала сигнал равен нулю. По формулам (52.03) и (31.27) мы получаем:

$$\begin{aligned} \mu(\tau - \tau_0) &= \frac{1}{R_n(0)} \sum_h m(t_h - \tau_0) m(t_h - \tau) = \\ &= \frac{\Delta t}{S_n} \sum_h m(t_h - \tau_0) m(t_h - \tau) \end{aligned} \quad (55.05)$$

или при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\mu(\tau - \tau_0) = \frac{1}{S_n} \int_{-\infty}^{\infty} m(t - \tau_0) m(t - \tau) dt, \quad (55.06)$$

так что для сигналов, имеющих полную продолжительность  $T_0$

$$\mu(\tau - \tau_0) = 0 \text{ при } |\tau - \tau_0| \geq T_0 \quad (55.07)$$



и

$$\mu_\epsilon = 2\mu \text{ при } \epsilon \geq \frac{T_0}{2}. \quad (55.08)$$

Беря последнее значение  $\mu_\epsilon$ , мы получаем коэффициент неоднозначности  $A$  в узком смысле этого слова, который мы будем обозначать через  $A_0$ . Величина  $A_0$  определяет вероятность принять за полезный сигнал ложный пик ко-

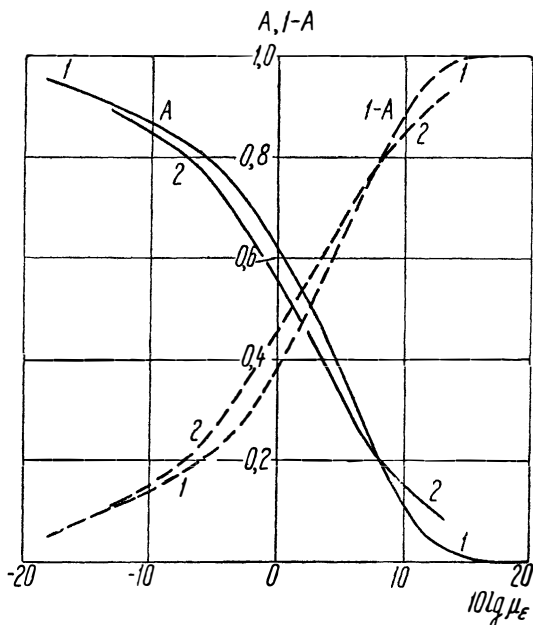


Рис. 53. Коэффициент неопределенности  $A$  (и величина  $1-A$ ) как функция  $\mu_\epsilon$ :

1 — для сигнала с известной амплитудой; 2 — для сигнала со случайной амплитудой, распределенной по закону Релея.

эффицента правдоподобия  $\Lambda(\tau)$ , вызванный шумом и не имеющий никакого отношения к сигналу. При  $\epsilon < \frac{T_0}{2}$  вместо формулы (55.08) нужно применять общую формулу (55.01), которая, вообще говоря, приводит к меньшему значению  $\mu_\epsilon$  и большему значению коэффициента неопределенности  $A$ . Это объясняется сложением вероятностей ошибок двух типов: ошибки принять ложный пик за сиг-

нал (вероятность этой ошибки дает  $A_0$ ) и ошибки в точном определении момента прихода сигнала по правильному пику вследствие того, что шум смещает максимум этого пика и получается  $|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon$ .

Формулу (55.02) можно обобщить на случай сложного измерения, когда полезный сигнал зависит от дополнительного параметра  $\theta$ , который не измеряется и принимает непрерывную совокупность значений. Для этого нужно воспользоваться формулой полной вероятности (29.04)

$$P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) = \int p_m(\theta) P_\theta(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) d\theta, \quad (55.09)$$

где  $p_m(\theta)$  есть плотность вероятности случайного параметра  $\theta$ , а  $P_\theta(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon)$  — вероятность ошибки при измерении параметра  $\tau$  при условии, что параметр  $\theta$  имеет определенное значение. Последняя вероятность не отличается от вероятности ошибки при простом измерении, поэтому для нее справедливы формулы (55.02) и (55.03), причем параметр  $\mu_\varepsilon$ , вообще говоря, зависит от  $\theta$ .

Если параметр  $\theta$  является фазой полезного сигнала, то согласно § 33 параметр  $\mu_\varepsilon$  от  $\theta$  не зависит, так что для измерения момента прихода сигнала с неизвестной фазой справедливы формулы (55.02) и (55.03), выведенные выше для простого измерения. Результаты § 54 показывают, что при достаточно слабых помехах в формуле (55.02), как и при простом измерении, следует взять знак равенства.

Если дополнительный параметр является случайной амплитудой (огibaющей)  $G$ , то

$$\mu_\varepsilon(G) = G^2 \mu_\varepsilon, \quad \text{где } \mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon(1), \quad (55.10)$$

и формула (55.09) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) &= \int p_m(G) P_G(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) dG \cong \\ &\cong \left(1 - \frac{2\varepsilon}{T}\right) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int p_m(G) dG \int_{\frac{1}{2}|G|\sqrt{\mu_\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \left(1 - \frac{2\varepsilon}{T}\right) \sqrt{\frac{\mu_\varepsilon}{2\pi}} \int p_m(G) dG \int_{|G|}^{\infty} e^{-\frac{\mu_\varepsilon x^2}{8}} dx. \quad (55.11) \end{aligned}$$

Если считать, что амплитуда сигнала распределена по закону Релея

$$\left. \begin{aligned} p_m(G) &= Ge^{-\frac{G^2}{2}} \quad \text{при } G \geq 0, \\ p_m(G) &= 0 \quad \text{при } G < 0 \end{aligned} \right\} \quad (55.12)$$

(ср. § 34), то двойной интеграл можно преобразовать с помощью формулы Дирихле следующим образом

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\mu_\varepsilon}{2\pi}} \int_0^\infty Ge^{-\frac{G^2}{2}} dG \int_G^\infty e^{-\frac{\mu_\varepsilon x^2}{8}} dx = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_\varepsilon}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\mu_\varepsilon x^2}{8}} dx \int_0^x Ge^{-\frac{G^2}{2}} dG = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_\varepsilon}{2\pi}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{\mu_\varepsilon x^2}{8}} - e^{-\left(1 + \frac{\mu_\varepsilon}{4}\right) \frac{x^2}{2}} \right] dx = \\ &= 1 - \frac{\sqrt{\frac{\mu_\varepsilon}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\mu_\varepsilon}{4}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\mu_\varepsilon}}}, \end{aligned} \quad (55.13)$$

так что мы опять получаем неравенство (55.02), в котором коэффициент неопределенности

$$A = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\mu_\varepsilon}}} \quad (55.14)$$

характеризует измерение времени прихода сигнала с неизвестной амплитудой или же с неизвестными амплитудой и фазой.

Величина (55.14) также изображена на рис. 53 как функция  $\mu_\varepsilon$ . Мы видим, что при больших  $\mu_\varepsilon$  коэффициент  $A$  для сигнала со случайной амплитудой гораздо больше, чем для сигнала с постоянной амплитудой. Отметим, что при измерении параметра  $\tau$  у сигнала со случайной амплитудой, могущей принимать сколь угодно малые значения, помеху сколь угодно малой интенсивности нельзя считать

слабой в смысле § 52—54. Поэтому в настоящее время точность (или, скорее, надежность) измерения момента прихода флюктуирующего сигнала можно количественно оценить только с помощью коэффициента  $A$ .

При использовании полученных в этом параграфе результатов следует помнить, что коэффициент  $A$  определяет не саму ошибку измерения, а ее нижнюю границу, так как неравенство (55.02) лишь в предельных случаях переходит в равенство. Это значит, что если коэффициент  $A$  близок к единице, то измерение может дать лишь неопределенный результат, но из малости  $A$  (скажем, из значений  $A=0,1$  или  $A=0,2$ ) какие-либо количественные выводы сделать трудно. В конце следующего параграфа мы рассмотрим этот вопрос более детально.

### § 56. ЗАДАЧА О РАЗЛИЧИИИ $M$ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Выше мы исследовали измерение непрерывного параметра при наличии нормальных помех. В этом параграфе мы рассмотрим аналогичную задачу для *дискретного* параметра. Последняя задача является более простой и поэтому позволяет получить более полное решение, которое имеет самостоятельный интерес и вместе с тем дает возможность выяснить некоторые вопросы, относящиеся к измерению непрерывного параметра.

Пусть опять мы знаем заранее, что полезный сигнал присутствует, но его дискретный параметр  $k$ , могущий принимать  $M$  значений

$$k = 1, \dots, M, \quad (56.01)$$

неизвестен и требуется его определить. Иначе говоря, известно, что на входе присутствует какой-то из  $M$  сигналов  $m_k(t) = m(t, k)$  и нужно различить, какой именно сигнал присутствует в принимаемой функции

$$f(t) = m_k(t) + n(t). \quad (56.02)$$

Если мы интересуемся обнаружением каждого из сигналов  $m_k(t)$  в отдельности, то мы должны исходить из соответствующего коэффициента правдоподобия  $\Lambda_k$ . Если сигналы  $m_k(t)$  имеют неизвестную случайную фазу, то согласно § 33 коэффициент  $\Lambda_k$  равен

$$\Lambda_k = p_k e^{-\frac{1}{2} \mu_k} I_0(\mathcal{E}_k), \quad (56.03)$$

и если амплитуда  $m_k(t)$  также случайна и распределена по закону Релея, то согласно § 34

$$\Lambda_k = \frac{p_k}{1 + \mu_k} e^{\frac{\mathcal{E}_k^2}{2(1 + \mu_k)}}. \quad (56.04)$$

При написании выражений (56.03) и (56.04) мы воспользовались формулой (29.38), несколько изменив обозначения. Здесь  $p_k$  — априорная вероятность появления  $k$ -го сигнала  $m_k(t)$ , а  $\mu_k$  — эффективное отношение сигнал/помеха для него, причем для простоты мы будем далее считать, что все  $p_k$  и  $\mu_k$  равны

$$p_k = \frac{1}{M}, \quad \mu_k = \mu \quad (k = 1, \dots, M). \quad (56.05)$$

Величина  $\mathcal{E}_k$  — огибающая, вычисляемая по формуле (33.07): она-то в сущности и определяет коэффициент правдоподобия  $\Lambda_k$ , являющийся монотонной функцией  $\mathcal{E}_k$  или же безразмерного параметра

$$z_k = \frac{\mathcal{E}_k}{\sqrt{\mu}}. \quad (56.06)$$

При измерении дискретного параметра  $k$  естественно образовать все  $M$  коэффициентов правдоподобия  $\Lambda_k$  и принимать решение по максимальному  $\Lambda_k$  (ср. § 50). Таким путем мы приходим к схемам  $M$ -канальных приемников, на выходе каждого канала которых образуются величины

$$\varphi_k = \mu + \nu_k \quad \text{или} \quad \varphi_k = \nu_k, \quad (56.07)$$

$\mathcal{E}_k$ ,  $z_k$  или  $\Lambda_k$ . Второе соотношение (56.05) означает, что случайные величины  $\nu_k$  во всех каналах имеют одинаковые статистические свойства, в частности,

$$\overline{\nu_k} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\nu_k^2} = \mu, \quad (56.08)$$

причем мы дополнительно примем, что величины  $\nu_k$  в различных каналах статистически независимы

$$\overline{\nu_k \nu_l} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l. \quad (56.09)$$

Более подробно условие (56.09) можно записать в виде

$$\overline{v_k v_l} = \sum_{g,h} Q_{gh} m_g(k) m_h(l) = 0 \text{ при } k \neq l, \quad (56.10)$$

где, например,  $m_g(k)$  — значения сигнала  $m(t, k)$  в моменты  $t_g$ . Образовывая величину

$$\varphi_l = \sum_{g,h} Q_{gh} f_g m_h(l) \quad (56.11)$$

в  $l$ -м канале по принятым значениям  $f_g$ , мы будем иметь на выходе  $l$ -го канала одну помеху

$$\varphi_l = v_l = \sum_{g,h} Q_{gh} n_g m_h(l), \quad (56.12)$$

если только

$$f_g = m_g(k) + n_g \text{ при } k \neq l. \quad (56.13)$$

Это значит, что каждый сигнал проходит только по своему каналу, ничего не давая на выходе остальных. Поэтому в литературе данную задачу часто называют задачей о системе  $M$  ортогональных сигналов.

Данную схему можно применить, например, в задаче о сигнале с неизвестным временем прихода  $\tau$  (см. § 53—55). В качестве примера возьмем импульсы прямоугольной формы, время прихода которых может принимать лишь дискретные значения

$$\tau = k\Delta\tau, \quad k = 1, \dots, M. \quad (56.14)$$

Если помеха представляет собой белый шум и если выполняется условие

$$\Delta\tau \geq T_0, \quad (56.15)$$

где  $T_0$  есть длительность импульсов, то в силу соотношения

$$\sum_h m_h(k) m_h(l) = 0 \text{ при } k \neq l \quad (56.16)$$

мы имеем задачу об  $M$  ортогональных сигналах, причем

$$M = \frac{T}{\Delta\tau}, \quad (56.17)$$

где  $T$  — длина интервала времени, в котором исследуется появление сигнала.

В случае сигналов произвольной формы корреляционная функция

$$\mu(\tau - \tau_0) = \overline{v(\tau)v(\tau_0)} = \sum_{g, h} Q_{gh} m_g(\tau_0) m_h(\tau) \quad (56.18)$$

стремится к нулю при  $|\tau - \tau_0| \rightarrow \infty$ . Если при условии

$$|\tau - \tau_0| \geq \Delta\tau \quad (56.19)$$

функция  $\mu(\tau - \tau_0)$  принимает малые значения, которыми можно пренебречь, то при дискретных значениях (56.14) опять можно считать, что выполняется условие ортогональности (56.10).

Задача об  $M$  ортогональных сигналах имеет и другие интерпретации и применения. Например, сигналы могут быть разнесены не по времени прихода, а по частоте и вследствие этого удовлетворять условиям (56.10).

Рассмотрим  $M$ -канальный приемник, принимающий решение о наличии сигнала  $m(t, \hat{k})$  при условии

$$\Lambda_{\hat{k}} > \Lambda_k \text{ [при всех } k = 1, \dots, M, \text{ отличных от } \hat{k}]. \quad (56.20)$$

Вычислим вероятность того, что такое измерение дает правильный результат, т. е. что отобранный по максимуму  $\Lambda_{\hat{k}}$  (или  $z_{\hat{k}}$ ) параметр  $\hat{k}$  равен истинному значению  $k_0$ . Обозначим эту вероятность через  $P(z)$ ; она, очевидно, зависит от значения  $z = z_{k_0}$ . Пусть  $F(z)$  есть вероятность ложной тревоги в каждом канале при пороге  $z$  (если этот канал использовать для обнаружения каждого из сигналов  $m(t, k)$  в отдельности). Тогда вероятность  $P(z)$  в силу независимости случайных величин  $v_k$  в  $M-1$  канале ( $k \neq k_0$ ) равна

$$P(z) = [1 - F(z)]^{M-1}. \quad (56.21)$$

Если плотность вероятности величины  $z$  в  $k_0$ -м канале, где действительно имеется сигнал  $m(t, k_0)$ , обозначить через  $p(z)$ , то вероятность  $P_m$  — вероятность произвести правильное измерение  $k$  при любом значении  $z$  — будет равна

$$P_m = \int_0^{\infty} P(z) p(z) dz = \int_0^{\infty} [1 - F(z)]^{M-1} p(z) dz \quad (56.22)$$

или

$$P_m = \sum_{k=0}^{M-1} C_{M-1}^k (-1)^k \int_0^{\infty} F^k(z) p(z) dz = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k C_{M-1}^k \overline{F}^k, \quad (56.23)$$

где  $C_{M-1}^k$  есть биномиальный коэффициент

$$C_{M-1}^k = \frac{(M-1)!}{k!(M-1-k)!} = \frac{(M-1)(M-2)\dots(M-2-k)}{k!}. \quad (56.24)$$

В случае сигнала с неизвестной фазой, когда

$$F(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad p(z) = ze^{-\frac{\mu+z^2}{2}} I_0(\sqrt{\mu}z), \quad (56.25)$$

пользуясь тождеством (33.46), имеем

$$\begin{aligned} \overline{F}^k &= e^{-\frac{kz^2}{2}} = \int_0^{\infty} ze^{-\frac{\mu+(k+1)z^2}{2}} I_0(\sqrt{\mu}z) dz = \\ &= \frac{e^{-\frac{k\mu}{2(k+1)}}}{k+1} \int_0^{\infty} ze^{-\frac{\frac{\mu}{k+1} + z^2}{2}} I_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{k+1}}z\right) dz = \\ &= \frac{e^{-\frac{k\mu}{2(k+1)}}}{k+1}, \end{aligned} \quad (56.26)$$

откуда из формулы (56.23) получаем следующее выражение:

$$P_m = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k C_{M-1}^k \frac{e^{-\frac{k\mu}{2(k+1)}}}{k+1}. \quad (56.27)$$

В случае флюктуирующего сигнала с неизвестной фазой, когда

$$F(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad p(z) = \frac{z}{1+\mu} e^{-\frac{z^2}{2(1+\mu)}}, \quad (56.28)$$

мы получаем более простое выражение

$$P_m = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k C_{M-1}^k \frac{1}{1+k(1+\mu)}, \quad (56.29)$$



поскольку тогда

$$\overline{F^k} = \frac{1}{\Gamma + \mu} \int_0^{\infty} z e^{-\left(k + \frac{1}{1+\mu}\right) \frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{1 + k(1 + \mu)}. \quad (56.30)$$

При двух сигналах ( $M=2$ ) формула (56.27) принимает вид

$$P_m = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu}{4}}, \quad (56.31)$$

а формула (56.29) дает

$$P_m = 1 - \frac{1}{2 + \mu}. \quad (56.32)$$

При любом  $M$  в обоих случаях имеем предельные соотношения

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} P_m = 1, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} P_m = \frac{1}{M}, \quad (56.33)$$

которые, разумеется, можно было ожидать заранее. Второе соотношение (56.33) является следствием тождества

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k C_{M-1}^k \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k C_{M-1}^k \int_0^1 x^k dx = \\ &= \int_0^1 dx \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k C_{M-1}^k x^k = \int_0^1 (1-x)^{M-1} dx = \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (56.34)$$

При больших  $M$  расчеты по формулам (56.27) и (56.29) становятся громоздкими, поэтому целесообразно вывести асимптотические формулы, пригодные при  $M \rightarrow \infty$ . Для этого можно аппроксимировать функцию (56.21) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= 0 \text{ при } z < z_0, \\ P(z) &= 1 \text{ при } z > z_0, \end{aligned} \right\} \quad (56.35)$$

причем  $z_0$  будем определять из требования, чтобы при  $z = z_0$  точная функция (56.21) была равна

$$P(z_0) = [1 - F(z_0)]^{M-1} = \frac{1}{2} \quad (56.36)$$

или

$$F(z_0) = e^{-\frac{z_0^2}{2}} = 1 - 2^{-\frac{1}{M-1}}. \quad (56.37)$$

Отсюда

$$z_0 = \sqrt{-2 \ln \left(1 - 2^{-\frac{1}{M-1}}\right)}. \quad (56.38)$$

Действительно, при увеличении  $M$  переход функции  $P(z)$  от значений  $P(z) \approx 0$  к значениям  $P(z) \approx 1$  становится все более резким, поэтому аппроксимация (56.35) дает все более точные результаты. Подставляя выражение (56.35) в выражение (56.22), получаем

$$P_m = \int_{z_0}^{\infty} p(z) dz = D(z_0), \quad (56.39)$$

т. е. вероятность правильного измерения равна *вероятности правильного обнаружения одного сигнала* при использовании порога (56.38), зависящего от  $M$ , для которого можно написать приближенное выражение

$$z_0 = \sqrt{2 \ln \frac{M-1}{\ln 2}} \quad (\text{при } M \gg 1). \quad (56.40)$$

На рис. 54 и 55 приведена зависимость вероятности  $P_m$  от отношения сигнал/помеха  $\mu$ , вычисленная для  $M=2, 4, 8$  и 16 по точным формулам и для  $M=16, 200, 2\,000$  и 20 000 — по приближенным. На рисунках видно, что уже при  $M=16$  расчеты, произведенные по приближенным формулам, дают достаточно удовлетворительные результаты. Из предыдущих формул следует, что разность  $1-P$  при увеличении  $\mu$  уменьшается для сигналов с постоянной амплитудой гораздо быстрее (экспоненциально), чем для сигналов с флюктуирующей амплитудой. Таким образом, правильное измерение дискретного параметра нефлюктуирующего сигнала с большой надежностью произвести гораздо легче, чем такое же измерение для флюктуирующего сигнала, а для мало надежного различения сигналов с постоянной амплитудой требуется, наоборот, большее отношение сигнал/помеха. Это обстоятельство мы уже обсуждали раньше в теории обнаружения.

Из рис. 54 и 55 и формул (56.39) и (56.40) видно, что необходимые значения  $\mu$  возрастают с увеличением  $M$ , однако, довольно медленно, поскольку число сигналов  $M$  входит под знаком логарифма.

В § 55 мы вывели для вероятности измерения непрерывного параметра  $\tau$  неравенство (55.02), в правой части

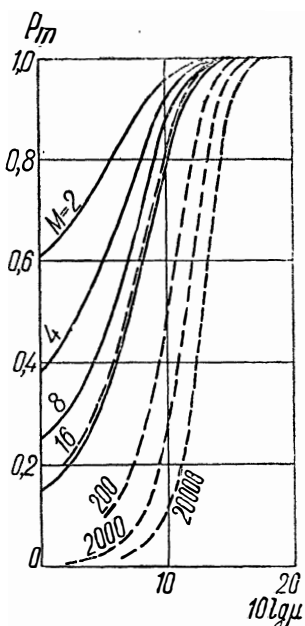


Рис. 54. Зависимость вероятности правильного различения  $P_m$  от отношения сигнал/помеха в одном канале при неизвестной фазе сигнала.

Сплошные кривые — по точной формуле (56.27), пунктирные — по приближенной формуле (56.39).

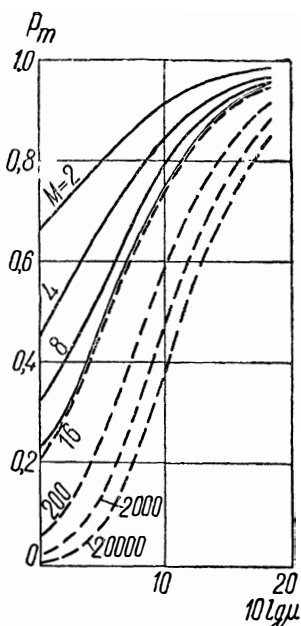


Рис. 55. Зависимость вероятности правильного различения  $P_m$  от отношения сигнал/помеха в одном канале при неизвестной фазе и неизвестной амплитуде сигнала.

Сплошные кривые — по формуле (56.29), пунктирные — по приближенной формуле (56.39).

которого фигурирует полная вероятность ошибки при различении двух сигналов  $m(t, \tau + \varepsilon)$  и  $m(t, \tau - \varepsilon)$ . Эти сигналы при достаточно большом  $\varepsilon$  можно считать ортогональными, и тогда по формулам (55.02) и (55.08) мы получаем

$$P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \varepsilon) \geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{T}\right) A_0, \quad (56.41)$$

где

$$A_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{2} \sqrt{2\mu}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (56.42)$$

В данном параграфе мы показали, что различить  $M$  ортогональных сигналов при весьма большом  $M$  труднее, чем при  $M=2$  или  $M=4$ . Поэтому ясно, что при больших значениях  $M$ , получающихся по формуле (56.17), вероятность ошибки  $P(|\hat{\tau} - \tau_0| > \epsilon)$  должна значительно превышать величину, стоящую в правой части неравенства (56.41).

В настоящее время лишь рассмотрение „системы  $M$  ортогональных сигналов“ позволяет получить какие-то количественные (хотя и приближенные) результаты о возможностях измерения параметра сигнала в широком интервале значений этого параметра. Только при вероятности  $P_m$ , достаточно близкой к единице, можно считать, что грубое измерение непрерывного параметра  $\tau$  достаточно надежно и что данный максимум коэффициента правдоподобия связан с сигналом, а не является случайным выбросом. Если при разбиении априорного интервала  $0 < \tau < T$  на  $M$  частей в соответствии с формулами (56.14), (56.15) и (56.19) получается вероятность  $P_m$ , достаточно близкая к единице, то можно ставить вопрос о дальнейшем уточнении значения  $\tau$ , т. е. более точном измерении.

Теоретические возможности, связанные с точным измерением произвольного параметра  $\tau$ , были рассмотрены в § 52 и конкретизированы в § 53—55 для измерения времени прихода сигнала. Если сигнал имеет постоянную амплитуду и помехи достаточно слабы, то измеренное значение  $\hat{\tau}$  является нормальной случайной величиной, среднее значение которой равно  $\tau_0$  — истинному значению  $\tau$ , а дисперсия определяется формулой (53.16). Также можно пользоваться неравенством (55.02) и рис. 53, которые должны давать приближенную оценку ошибки при «точном» измерении, проводимом вслед за грубым измерением, поскольку тогда при «точном» измерении интервал измерения  $\tau$  достаточно узок.

На практике измерение параметра сигнала при наличии помех естественно разбивается на две различные операции: грубое измерение и точное, причем результаты точного измерения должны приниматься в расчет только при их согласии с результатами грубого. Заметим, что экспериментальное исследование функций  $\Lambda(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$  или  $\mathcal{G}(\tau)$  для непрерывного параметра часто возможно лишь в результате построения этих функций по отдельным точкам (56.14), полученным в результате разбиения исходного ин-

тервала на большое число малых интервалов  $\Delta\tau$ , причем помехи в разных интервалах являются приближенно независимыми. Таким образом, задача об  $M$  ортогональных сигналах отображает свойства реальных технических устройств.

Задача о системе  $M$  ортогональных сигналов была впервые поставлена и решена (в более частных предположениях) В. А. Котельниковым.

## § 57. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С ДИСКРЕТНЫМ ПАРАМЕТРОМ И ИЗМЕРЕНИЕ ЭТОГО ПАРАМЕТРА

В предыдущих параграфах мы рассматривали лишь «чистое» измерение, т. е. предполагали заранее известным присутствие полезного сигнала, причем только одного — с некоторым неизвестным значением параметра  $a$ ,  $\tau$  или  $k$ , которое требовалось измерить. Обычно измерение приходится сочетать с обнаружением, ввиду чего вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

Обнаружение сигналов  $m_k(t) = m(t, k)$  с дискретным параметром  $k$  ( $k=1, \dots, M$ ) и измерение этого параметра можно производить с помощью различных  $M$ -канальных приемников, которые мы будем условно называть приемниками I, II и III типов.

Приемник I типа производит обнаружение по коэффициенту правдоподобия

$$\Lambda = \sum_{k=1}^M \Lambda_k, \quad (57.01)$$

а именно,

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \Lambda \geq \Lambda_* \text{ решает, что сигналы имеются,} \\ \text{при } \Lambda < \Lambda_* \text{ решает, что сигналов нет} \end{array} \right\} \quad (57.02)$$

и, кроме того, при  $\Lambda \geq \Lambda_*$  принимает решение о наличии сигнала с максимальным  $\Lambda_k$ . Этот приемник нуждается в модификации, если сигналы могут, например, появляться попарно.

Если сигналы  $m_k(t)$  других неизвестных параметров не имеют, то каждый канал приемника должен образовывать величину

$$\Lambda_k = p_k e^{\varphi_k - \frac{1}{2} \mu_k}, \quad (57.03)$$

где  $p_k$  есть вероятность появления  $k$ -го сигнала при условии, что какой-то полезный сигнал присутствует, а  $\varphi_k$  определяется формулами (56.07). Таким образом, осуществление приемника I типа является с практической точки зрения дозольно громоздкой задачей, поскольку после линейной обработки входных данных (при получении  $\varphi_k$ ) требуется образовывать величины (57.03) и затем их суммировать по формуле (57.01). Однако приемник I типа является *оптимальным* приемником обнаружения в смысле гл. V, так что характеристики всех других приемников должны уступать характеристикам приемника I типа. Поскольку вычисление характеристик приемника I типа связано с определенными трудностями (см. далее), детально изучить преимущества этого приемника не удастся, однако можно считать установленным, что преимущества эти невелики.

Приемник II типа производит предварительное испытание всех  $M$  каналов по правилу

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \Lambda_k \geq \lambda_k \text{ сигнал } m_k(t) \text{ может быть,} \\ \text{при } \Lambda_k < \lambda_k \text{ сигнала } m_k(t) \text{ нет,} \end{array} \right\} \quad (57.04)$$

где  $\lambda_k$  — порог в  $k$ -м канале приемника. Если во всех каналах  $\Lambda_k < \lambda_k$ , то выносится решение об отсутствии сигналов, если хотя бы в одном канале  $\Lambda_k \geq \lambda_k$ , то выносится решение о наличии сигналов. Если заранее известно, что может быть не больше одного сигнала, то в качестве такового предлагается сигнал с максимальным  $\Lambda_k$ . Если число сигналов не ограничено, то испытание по формуле (57.04) является окончательным.

Приемник III типа сначала производит измерение, т. е. выбирает из всех  $M$  величин  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_M$  наибольшую, а затем, испытывая выбранное значение  $\Lambda_k$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \Lambda_k \geq \lambda_k \text{ решает, что есть сигнал } m_k(t), \\ \text{при } \Lambda_k < \lambda_k \text{ решает, что сигналов нет,} \end{array} \right\} \quad (57.05)$$

где  $\lambda_k$  — те же пороги, что и в формуле (57.04). Этот приемник можно применять только при условии, что появление двух или более полезных сигналов  $m_k(t)$  а priori исключено. Если же может появиться только один сигнал, то приемники II и III типов, как легко видеть, эквивалент-

ны, поскольку они производят те же самые операции, но в другой последовательности.

Можно сказать, что в приемнике I типа сначала производится обнаружение, а затем измерение, в приемнике II типа обнаружение и измерение проводятся параллельно, а приемник III типа сначала измеряет параметр  $k$ , а потом проверяет наличие сигнала с измеренным параметром «на обнаружение». Приемники II и III типов осуществить на практике гораздо проще, чем приемник I типа, поскольку вместо отдельных  $\Lambda_k$  в каждом канале приемника можно образовывать любую монотонно возрастающую функцию  $\Lambda_k$ .

При исследовании характеристик введенных выше приемников мы ограничимся системой  $M$  ортогональных равновероятных сигналов с одинаковым отношением сигнал/помеха (см. § 56), причем одновременное появление двух или более сигналов будем считать исключенным. Ясно, что в силу равноправности всех сигналов [см. формулы (56.05) и (56.08)] все пороги  $\lambda_k$  в формулах (57.04) и (57.05) следует брать одинаковыми, и тогда вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения во всех каналах приемника II типа будут одинаковы.

$$F = F_1 = \dots = F_M, D = D_1 = \dots = D_M. \quad (57.06)$$

Вычислим вероятность ложной тревоги в приемнике II типа. Случайные величины  $\nu_k$  в различных каналах независимы в силу формулы (56.09), поэтому вероятность правильного необнаружения в  $M$ -канальном приемнике II типа по формуле умножения вероятностей независимых событий равна

$$1 - F' = (1 - F)^M, \quad (57.07)$$

и вероятность ложной тревоги  $F'$  получается равной

$$F' = 1 - (1 - F)^M. \quad (57.08)$$

Вероятность пропуска сигнала приемником II типа, очевидно, равна

$$1 - D' = (1 - D)(1 - F)^{M-1}, \quad (57.09)$$

поскольку приемник II типа может обнаружить сигнал и за счет ложной тревоги в одном из  $M-1$  «пустых» каналов. Вероятность правильного обнаружения равна

$$D' = 1 - (1 - D)(1 - F)^{M-1}. \quad (57.10)$$

Формулы (57.08) и (57.10) связывают вероятности  $F'$  и  $D'$  в  $M$ -канальном приемнике с вероятностями  $F$  и  $D$  в отдельном канале, производящем обнаружение одного сигнала. Заметим, что  $F'$  и  $D'$  характеризуют лишь «обнаруживающие» функции приемника II типа и не касаются его «измерительных» функций. При достаточно малом  $F$  мы можем пользоваться приближенными формулами

$$F' = MF, \quad D' = D. \quad (57.11)$$

Особенно простой результат эти формулы дают для сигналов с неизвестной амплитудой и фазой (§ 34). Действительно, в силу формул (34.25) и (57.11) мы имеем

$$D' = \left( \frac{F'}{M} \right)^{\frac{1}{1+\mu}}, \quad (57.12)$$

где  $\mu$  есть отношение сигнал/помеха в каждом канале. Эта формула позволяет в явном виде найти значение  $\mu$ , необходимое для обеспечения заданных  $F'$  и  $D'$ :

$$\mu = \frac{\ln \frac{1}{F'} + \ln M}{\ln \frac{1}{D'}} - 1. \quad (57.13)$$

В одноканальном приемнике обнаружения, т. е. при  $M=1$ , соответствующее значение  $\mu$  равно [ср. формулу (34.24)]

$$\mu' = \frac{-\ln \frac{1}{F'}}{\ln \frac{1}{D'}} - 1, \quad (57.14)$$

так что формулу (57.13) можно переписать в виде

$$\mu = \mu' + \frac{\ln M}{\ln \frac{1}{D'}}. \quad (57.15)$$

Мы видим, что для достижения заданных  $F'$  и  $D'$  в  $M$ -канальном приемнике требуются тем большие значения  $\mu$ , чем больше  $M$ , причем необходимое приращение  $\mu$  пропорционально  $\ln M$ .



Для сигналов с неизвестной фазой из формул (33.48) и (57.11) получаем

$$z_* = \sqrt{2 \left( \ln \frac{1}{F'} + \ln M \right)}, \quad (57.16)$$

где  $z_*$  — нормированный порог решения в  $M$ -канальном приемнике.

Подставляя это выражение в формулу (33.49) и считая в последней  $\eta = 0$ , получим выражение

$$D' = D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad (57.17)$$

где

$$y_* = z_* - \sqrt{\mu} = \sqrt{2 \left( \ln \frac{1}{F'} + \ln M \right)} - \sqrt{\mu}. \quad (57.18)$$

Разрешая последнее соотношение относительно  $\mu$ , приходим к выражению

$$\mu = \left[ \sqrt{2 \left( \ln \frac{1}{F'} + \ln M \right)} - y_* \right]^2, \quad (57.19)$$

которое при  $y_* = 0$  (т. е. при  $D' = \frac{1}{2}$ ) упрощается следующим образом:

$$\mu = \mu' + 2 \ln M, \quad (57.20)$$

где

$$\mu' = \ln \frac{1}{F'} \quad (57.21)$$

есть отношение сигнал/помеха, обеспечивающее те же вероятности  $F'$  и  $D' = \frac{1}{2}$  в одноканальном приемнике обнаружения, описанном в § 33. Формулы (57.19) и (57.20) опять приводят к логарифмической зависимости  $\mu$  от числа каналов  $M$ , которая получается и для сигналов с другими свойствами, а также при измерении (см. § 56).

Характеристики приемника II и III типов при сделанных предположениях совпадают, поэтому нам остается исследовать только приемник I типа. Если сигналы  $m_k(t)$  от дополнительных случайных параметров не зависят, то при

отсутствии сигнала  $m_k(t)$  коэффициент правдоподобия (57.03) равен

$$\Lambda_k = \frac{1}{M} e^{\nu_k - \frac{1}{2}\mu}. \quad (57.22)$$

Вследствие того, что случайная величина  $\nu_k$  является нормальной и имеет моменты

$$\overline{\nu_k} = 0, \quad \overline{\nu_k^2} = \mu, \quad (57.23)$$

нетрудно написать распределение  $\nu_k$  и вычислить среднее

$$e^{\overline{q\nu_k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{q\nu - \frac{\nu^2}{2\mu}} d\nu = e^{\frac{q^2\mu}{2}}, \quad (57.24)$$

где  $q$  — любое число. Отсюда нетрудно найти моменты случайной величины (57.22)

$$\overline{\Lambda_k} = \frac{1}{M}, \quad \overline{\Lambda_k^2} = \frac{1}{M} e^{\mu}, \quad \overline{\Lambda_k^2} - (\overline{\Lambda_k})^2 = \frac{1}{M^2} (e^{\mu} - 1). \quad (57.25)$$

При наличии сигнала  $m_k(t)$  мы имеем  $\varphi_k = \mu + \nu_k$  и

$$\Lambda_k = \frac{1}{M} e^{\nu_k + \frac{1}{2}\mu}, \quad (57.26)$$

так что

$$\overline{\Lambda_k} = \frac{1}{M} e^{\mu}, \quad \overline{\Lambda_k^2} = \frac{1}{M^2} e^{3\mu}, \quad \overline{\Lambda_k^2} - (\overline{\Lambda_k})^2 = \frac{1}{M} e^{2\mu} (e^{\mu} - 1). \quad (57.27)$$

Если теперь учесть, что помехи  $\nu_k$  в различных каналах приемника, где образуются величины  $\Lambda_k$  в соответствии с формулой (56.10) статистически независимы

$$\overline{\nu_k \nu_l} = 0 \quad \text{при } k \neq l, \quad (57.28)$$

то при отсутствии полезного сигнала получаем

$$a_0 = \overline{\Lambda} = 1, \quad b_0 = \overline{\Lambda^2} - (\overline{\Lambda})^2 = \frac{1}{M} (e^{\mu} - 1), \quad (57.29)$$

а при наличии одного полезного сигнала

$$a_1 = \overline{\Lambda} = 1 + \frac{1}{M} (e^{\mu} - 1),$$

$$b_1 = \overline{\Lambda^2} - (\overline{\Lambda})^2 = \frac{1}{M} (e^{\mu} - 1) \left[ 1 + \frac{1}{M} (e^{2\mu} - 1) \right]. \quad (57.30)$$

До сих пор рассуждения были совершенно строги, однако они не дают еще возможности вычислить вероятность ложной тревоги  $F'$  и вероятность правильного обнаружения  $D'$ , так как распределение величины  $\Lambda$  неизвестно, а известны лишь моменты (57.29) и (57.30). Поскольку  $\Lambda$  является суммой  $M$  независимых случайных величин  $\Lambda_k$ , то при больших  $M$  естественно считать, что случайная величина  $\Lambda$  приближенно распределена по закону Гаусса. Отсюда вероятность ложной тревоги получается равной

$$F' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z_* = \frac{\Lambda_* - a_0}{\sqrt{b_0}}, \quad (57.31)$$

а вероятность правильного обнаружения

$$D' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_*}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad y_* = \frac{\Lambda_* - a_1}{\sqrt{b_1}}. \quad (57.32)$$

Если для простоты положить  $y_* = 0$  и  $D' = \frac{1}{2}$ , то мы получим соотношения

$$z_* = \sqrt{\mu'} = \frac{a_1 - a_0}{\sqrt{b_0}} = \sqrt{\frac{1}{M} (e^{\mu} - 1)}, \quad e^{\mu} = M\mu' + 1, \quad (57.33)$$

в которых согласно формулам (31.34) и (31.35)  $\mu'$  означает отношение сигнал/помеха, которое при простом обнаружении обеспечивает те же вероятности  $F'$  и  $D' = \frac{1}{2}$ .

Соотношения (57.33) приводят к выражению

$$\mu = \ln(M\mu' + 1) \approx \ln \mu' + \ln M \quad (\text{при } M\mu' \gg 1). \quad (57.34)$$

Прежде чем анализировать этот результат, рассмотрим еще сигналы с неизвестными фазами. Моменты соответствующего коэффициента правдоподобия

$$\Lambda_k = \frac{1}{M} e^{-\frac{1}{2}\mu} I_0(\mathcal{E}_k) \quad (57.35)$$

[ср. формулу (56.03)] при отсутствии полезного сигнала  $m_k(t)$  равны

$$\bar{\Lambda}_k = \frac{1}{M}, \quad \overline{\Lambda_k^2} = \frac{1}{M^2} I_0(\mu), \quad \overline{\Lambda_k^2} - (\bar{\Lambda}_k)^2 = \frac{1}{M^2} [I_0(\mu) - 1], \quad (57.36)$$

где мы использовали формулу для так называемого второго интеграла Вебера (см. Ватсон стр. 433) и учли, что функция распределения величины  $\mathcal{E}_k$  согласно § 33 равна

$$p(\mathcal{E}_k) = \frac{\mathcal{E}_k}{\mu} e^{-\frac{\mathcal{E}_k^2}{2\mu}}. \quad (57.37)$$

Поэтому вместо выражений (57.29) мы получаем

$$a_0 = \bar{\Lambda} = 1, \quad b_0 = \bar{\Lambda}^2 - (\bar{\Lambda})^2 = \frac{1}{M} [I_0(\mu) - 1], \quad (57.38)$$

а при наличии одного полезного сигнала

$$a_1 = \bar{\Lambda} = 1 + \frac{1}{M} [I_0(\mu) - 1]. \quad (57.39)$$

Формула (57.33) изменяется следующим образом:

$$z_* = \sqrt{\mu'} = \frac{a_1 - a_0}{\sqrt{b_0}} = \sqrt{\frac{1}{M} [I_0(\mu) - 1]}, \quad (57.40)$$

где мы воспользовались приближенной формулой (33.49) из которой следует, что  $z_* = \sqrt{\mu'}$  при  $\eta = 0$  и  $y_* = 0$ , причем  $\mu'$  имеет смысл отношения сигнал/помеха при одноканальном обнаружении с теми же вероятностями  $F'$  и  $D' = \frac{1}{2}$ .

Связь между  $\mu$  и  $\mu'$  дается выражением

$$I_0(\mu) = M\mu' + 1, \quad (57.41)$$

причем из неравенства

$$I_0(\mu) < e^\mu \quad (57.42)$$

следует, что по уравнению (57.41)  $\mu$  будет больше, чем  $\mu'$ , вычисленное по формуле (57.34). Однако из асимптотического выражения

$$I_0(\mu) = \frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi\mu}} \quad (57.43)$$

видно, что при больших  $\mu$ , получаемых по формуле (57.34), разница сравнительно невелика, так что в качестве грубой оценки можно использовать формулу (57.34) и для сигналов с неизвестной фазой.

Сравнивая формулу (57.20) и (57.34) при больших  $M$ , мы еще раз убеждаемся в том, что приемник I типа пре-

восходит приемник II типа, поскольку при достаточно большом значении  $\ln M$  последний требует вдвое большего отношения сигнал/помеха для достижения тех же  $F'$  и  $D'$ .

К сигналу с флюктуирующей амплитудой предыдущих рассуждений применить нельзя, поскольку получается

$$\overline{\Lambda_k^2} = \infty \text{ при } \mu > 1. \quad (57.44)$$

Исследование асимптотического (при  $M \rightarrow \infty$ ) закона распределения случайной величины  $\Lambda$  требует более тонкого математического метода. Приемник I типа для сигналов с неизвестными амплитудой и фазой рассмотрен в статье Р. Л. Добрушина, причем автор получает для этого приемника *при малых F* формулу (57.13), выведенную выше для приемника II типа. Таким образом, при данных условиях приемник I типа не имеет какого-либо заметного преимущества перед приемником II типа.

В заключение отметим, что вероятность получить правильный результат при совместном обнаружении и измерении равна

$$P = D' P_m, \quad (57.45)$$

где  $D'$  — вероятность правильного обнаружения, исследованная в этом параграфе, а  $P_m$  — вероятность правильного измерения при условии, что сигнал присутствует (см. § 56)

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ  
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ\*

---

Г Л А В А IX

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
НОРМАЛЬНОГО ТИПА

§ 58. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНЫХ  
(ГАУССОВЫХ) СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В данной главе мы выведем основные формулы, относящиеся к нормальным случайным величинам и используемые на протяжении всей книги. Изложение удобно начать с понятия характеристической функции случайных величин.

Для  $N$  случайных величин  $x_1, \dots, x_N$  характеристической функцией называется функция от  $N$  вспомогательных параметров  $u_1, \dots, u_N$ , определяемая с помощью соотношения

$$\chi(u_1, \dots, u_N) = e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_N x_N)} = \exp \left\{ i \overline{\sum_{h=1}^N u_h x_h} \right\}, \quad (58.01)$$

где черта сверху означает образование среднего (т. е. математического ожидания). Если считать, что  $N$ -мерная плотность вероятности случайных величин  $x_1, \dots, x_N$

---

\* Данная часть книги содержит вспомогательный материал, относящийся к математическим и физическим свойствам случайных величин и случайных процессов, которые при исследовании оптимальных фильтров и оптимальных приемников играют роль помех, а иногда являются и полезными сигналами. Третья часть книги должна, по мысли авторов, облегчить читателю пользование всей книгой.

равна  $p(x_1, \dots, x_H)$ , то формулу (58.01) можно переписать в виде

$$\chi(u_1, \dots, u_H) = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_H x_H)} p(x_1, \dots, x_H) dx_1 \dots dx_H, \quad (58.02)$$

т. е. функция  $\chi$  получается из функции  $p$  с помощью  $H$ -мерного интегрального преобразования Фурье. Обращение этого преобразования дает формулу

$$p(x_1, \dots, x_H) = \frac{1}{(2\pi)^H} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u_1 x_1 + \dots + u_H x_H)} \chi(u_1, \dots, u_H) du_1 \dots du_H, \quad (58.03)$$

позволяющую вычислить распределение вероятностей  $p$ , если известна характеристическая функция  $\chi$ .

Из определения (58.01) вытекают следующие свойства характеристической функции

$$\left. \begin{aligned} \chi(0, \dots, 0) &= 1, \\ \frac{\partial \chi}{\partial u_h}(0, \dots, 0) &= i \bar{x}_h, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial u_g \partial u_h}(0, \dots, 0) &= -\overline{x_g x_h}, \\ \frac{\partial^3 \chi}{\partial u_g \partial u_h \partial u_k}(0, \dots, 0) &= -i \overline{x_g x_h x_k}, \\ \frac{\partial^4 \chi}{\partial u_g \partial u_h \partial u_k \partial u_l}(0, \dots, 0) &= \overline{x_g x_h x_k x_l}, \end{aligned} \right\} \quad (58.04)$$

т. е. моменты случайных величин  $x_1, \dots, x_H$  непосредственно выражаются через производные их характеристической функции в начале координат, т. е. при  $u_1 = \dots = u_H = 0$ .

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случайных величин  $x_1, \dots, x_H$  со средними значениями, равными нулю

$$\bar{x}_h = 0 \quad (h = 1, \dots, H), \quad (58.05)$$

что ни в коей мере не умаляет общности, поскольку при  $\bar{x}_h \neq 0$  всегда можно ввести новые случайные величины

$$x'_h = x_h - \bar{x}_h, \quad (58.06)$$

удовлетворяющие условиям (58.05), и в окончательных выражениях перейти к величинам  $x_h$ .

Величины  $x_1, \dots, x_H$ , удовлетворяющие условиям (58.05), называются *нормальными* или *гауссовыми*, если их характеристическая функция равна

$$\chi(u_1, \dots, u_H) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h=1}^H R_{gh} u_g u_h \right\}, \quad (58.07)$$

где коэффициенты  $R_{gh}$  соответствуют положительно определенной квадратичной форме, удовлетворяют условию симметрии

$$R_{gh} = R_{hg} \quad (58.08)$$

и согласно третьему соотношению (58.04) имеют следующий смысл

$$R_{gh} = \overline{x_g x_h}, \quad (58.09)$$

поскольку при дифференцировании функции (58.07) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial u_g} &= -\chi \sum_k R_{gk} u_k, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial u_g \partial u_h} &= -\chi (R_{gh} - \sum_k R_{gk} u_k \sum_l R_{hl} u_l). \end{aligned} \right\} \quad (58.10)$$

Используя четвертую и пятую формулы (58.04), нетрудно также вывести соотношения

$$\left. \begin{aligned} \overline{x_g x_h x_k} &= 0, \\ \overline{x_g x_h x_k x_l} &= R_{gh} R_{kl} + R_{gk} R_{hl} + R_{gl} R_{hk}, \end{aligned} \right\} \quad (58.11)$$

последнее из которых было использовано в § 35.

Выше мы неявно предполагали, что случайные величины  $x_1, \dots, x_H$  являются вещественными, т. е. принимают только вещественные значения. Иногда целесооб-



разно вводить и комплексные случайные величины. Пусть мы имеем  $2H$  вещественных случайных величин  $x_1, \dots, x_H; y_1, \dots, y_H$  нормального типа, имеющие моменты

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_g &= 0, \quad \bar{y}_h = 0, \\ \overline{x_g x_h} &= \overline{y_g y_h} = R_{gh}^{(1)}, \quad \text{где } R_{gh}^{(1)} = R_{hg}^{(1)}, \\ \overline{x_g y_h} &= -\overline{x_h y_g} = R_{gh}^{(2)}, \quad \text{где } R_{gh}^{(2)} = -R_{hg}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (58.12)$$

Характеристическая функция этих величин, как непосредственно следует из определения (58.07), равна

$$\begin{aligned} \chi(u_1, \dots, u_H; v_1, \dots, v_H) &= e^{\overline{i(u_1 x_1 + \dots + u_H x_H + v_1 y_1 + \dots + v_H y_H)}} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h} [R_{gh}^{(1)} (u_g u_h + v_g v_h) + R_{gh}^{(2)} (u_g v_h - u_h v_g)] \right\}. \end{aligned} \quad (58.13)$$

Вместо  $2H$  вещественных случайных величин можно ввести  $H$  комплексных величин  $z_h$  по формулам

$$z_h = x_h + i y_h, \quad z_h^* = x_h - i y_h \quad (h = 1, \dots, H), \quad (58.14)$$

которые будут удовлетворять соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \overline{z_g z_h} &= \overline{x_g x_h} - \overline{y_g y_h} + i(\overline{x_g y_h} + \overline{x_h y_g}) = 0, \quad \overline{z_g^* z_h^*} = 0, \\ \overline{z_g^* z_h} &= \overline{x_g x_h} + \overline{y_g y_h} + i(\overline{x_g y_h} - \overline{x_h y_g}) = \\ &= 2[R_{gh}^{(1)} + i R_{gh}^{(2)}]. \end{aligned} \right\} \quad (58.15)$$

Если ввести комплексные коэффициенты

$$R_{gh} = R_{gh}^{(1)} + i R_{gh}^{(2)}, \quad R_{gh}^* = R_{hg}, \quad (58.16)$$

то соотношения (58.15) можно переписать в виде

$$\overline{z_g z_h} = \overline{z_g^* z_h^*} = 0, \quad \overline{z_g^* z_h} = 2R_{gh}. \quad (58.17)$$

Обозначая

$$w_h = u_h + i v_h, \quad w_h^* = u_h - i v_h, \quad (58.18)$$

можно характеристическую функцию (58.13) записать более кратко

$$\chi(w_1, w_1^*, \dots, w_H, w_H^*) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h} R_{gh} w_g w_h^* \right\}, \quad (58.19)$$

где

$$\sum_{g,h} R_{gh} \omega_g \omega_h^* = \sum_{g,h} [R_{gh}^{(1)} (u_g u_h + v_g v_h) + R_{gh}^{(2)} (u_g v_h - u_h v_g)] \quad (58.20)$$

есть в силу формул (58.16) положительно определенная эрмитова форма, принимающая вещественные неотрицательные значения при любых  $u_h$  и  $v_h$ . В формуле (58.19) уже можно считать  $\chi$  функцией от  $\omega_h$  и  $\omega_h^*$  (а не от  $u_h$  и  $v_h$ ), определяемой с помощью соотношения

$$\chi(\omega_1, \omega_1^*, \dots, \omega_H, \omega_H^*) = e^{\frac{i}{2} \overline{(\omega_1^* z_1 + \omega_1 z_1^* + \dots + \omega_H^* z_H + \omega_H z_H^*)}}, \quad (58.21)$$

так что, например,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega_g \partial \omega_h^*} (0, 0, \dots, 0, 0) = -\frac{1}{4} \overline{z_g^* z_h} = -\frac{1}{2} R_{gh} \quad (58.22)$$

в соответствии с формулой (58.17).

## § 59. МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССА

Перейдем теперь к вычислению плотности вероятности  $p(x_1, \dots, x_H)$  вещественных случайных величин нормального типа. По формулам (58.03) и (58.07) имеем

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_H) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^H} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \sum_h u_h x_h - \frac{1}{2} \sum_{d,h} R_{gh} u_g u_h \right\} du_1 \dots du_H \end{aligned} \quad (59.01)$$

Последний интеграл всего легче вычислить, переходя от переменных  $u_1, \dots, u_H$  к переменным  $t_1, \dots, t_H$  с помощью ортогонального преобразования

$$t_g = \sum_h \alpha_{gh} u_h, \quad u_h = \sum_g \alpha_{gh} t_g, \quad \text{Det} \|\alpha_{gh}\| = 1 \quad (59.02)$$

такого, что квадратичная форма в интеграле (59.01) преобразуется к главным осям, т. е. принимает вид

$$\sum_{g,h} R_{gh} u_g u_h = \sum_k \rho_k t_k^2. \quad (59.03)$$

В этих переменных мы имеем также

$$\sum_h u_h x_h = \sum_{g,h} a_{gh} t_g x_h = \sum_k \xi_k t_k, \quad \xi_k = \sum_h a_{kh} x_h, \quad (59.04)$$

и кратный интеграл (59.01) распадается на произведение  $H$  простых интегралов

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_H) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^H} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \sum_k \xi_k t_k - \frac{1}{2} \sum_k \rho_k t_k^2 \right\} dt_1 \dots dt_H = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^H} \prod_{k=1}^H \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_k t_k - \frac{1}{2} \rho_k t_k^2} dt_k, \end{aligned} \quad (59.05)$$

каждый из которых легко вычисляется

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_k t_k - \frac{1}{2} \rho_k t_k^2} dt_k &= e^{-\frac{\xi_k^2}{2\rho_k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \rho_k \left( t_k + i \frac{\xi_k}{\rho_k} \right)^2} dt_k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_k}} e^{-\frac{\xi_k^2}{2\rho_k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho_k}} e^{-\frac{\xi_k^2}{2\rho_k}}, \end{aligned} \quad (59.06)$$

так что

$$p(x_1, \dots, x_H) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^H \prod_k \rho_k}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \frac{\xi_k^2}{\rho_k} \right\}. \quad (59.07)$$

Из теории преобразований квадратичных форм известно, что определитель, составленный из их коэффициентов, остается при ортогональных преобразованиях (59.02) инвариантом, поэтому

$$\text{Det} \|R_{gh}\| = \prod_k \rho_k = \rho_1 \dots \rho_H. \quad (59.08)$$

Далее по формуле (59.04) получаем

$$\sum_k \frac{\xi_k^2}{\rho_k} = \sum_{g,h} Q_{gh} x_g x_h, \quad \text{где } Q_{gh} = \sum_k \frac{1}{\rho_k} a_{kg} a_{kh}, \quad (59.09)$$

в то время как формула (59.03) дает

$$R_{gh} = \sum_j \rho_j \alpha_{jg} \alpha_{jh}. \quad (59.10)$$

Используя соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты  $\alpha_{gh}$  ортогонального преобразования (59.02)

$$\sum_k \alpha_{kg} \alpha_{kh} = \sum_l \alpha_{gl} \alpha_{hl} = \delta_{gh}, \quad (59.11)$$

мы легко получаем формулу

$$\sum_l R_{gl} Q_{lh} = \sum_{j,k,l} \frac{\rho_j}{\rho_k} \alpha_{jg} \alpha_{jl} \alpha_{kl} \alpha_{kh} = \sum_{j,k} \frac{\rho_j}{\rho_k} \delta_{jk} \alpha_{jg} \alpha_{kh} = \delta_{gh}, \quad (59.12)$$

показывающую, что  $Q_{gh}$  — элементы матрицы, обратной матрице  $\|R_{gh}\|$ . Поэтому формула (59.07) в развернутом виде гласит

$$p(x_1, \dots, x_H) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}\|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h} Q_{gh} x_g x_h \right\}. \quad (59.13)$$

При рассмотрении комплексных случайных величин нужно иметь в виду, что в силу формул (58.14) и (58.18) мы имеем

$$dx_h dy_h = \frac{1}{2} dz_h dz_h^*, \quad du_h dv_h = \frac{1}{2} dw_h dw_h^*, \quad (59.14)$$

поэтому, определяя плотность вероятности для комплексных величин так, что  $p(z_1, z_1^*, \dots, z_H, z_H^*) dz_1 dz_1^* \dots dz_H dz_H^*$  есть вероятность того, что эти величины попадают в соответствующий элемент многомерного пространства, мы получим вместо выражения (59.01) следующую формулу:

$$p(z_1, z_1^*, \dots, z_H, z_H^*) = \frac{1}{(4\pi)^{2H}} \iint \dots \iint \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_h (\omega_h^* z_h + \right. \\ \left. + \omega_h z_h^*) - \frac{1}{2} \sum_h R_{gh} \omega_g \omega_h^* \right\} d\omega_1 d\omega_1^* \dots d\omega_H d\omega_H^*. \quad (59.15)$$

С помощью унитарного преобразования

$$t_g = \sum_h \alpha_{gh} \omega_h, \quad \omega_h = \sum_g \alpha_{gh}^* t_g, \quad (59.16)$$

коэффициенты которого по определению удовлетворяют соотношениям

$$\sum_k \alpha_{gk} \alpha_{hk}^* = \sum_k \alpha_{kg} \alpha_{kh}^* = \delta_{gh}, \quad (59.17)$$

мы можем привести эрмитову матрицу к главным осям

$$\sum_{g,h} R_{gh} \omega_g \omega_h^* = \sum_k \rho_k |t_k|^2 \quad (\rho_k > 0), \quad (59.18)$$

причем

$$\sum_h \omega_h z_h^* = \sum_k \zeta_k^* t_k, \quad \sum_h \omega_h^* z_h = \sum_k \zeta_k t_k^*, \quad \zeta_k = \sum_h \alpha_{kh} z_h^*. \quad (59.19)$$

Вводя вещественные переменные по формулам

$$t_k = r_k + i s_k, \quad \zeta_k = \xi_k + i \eta_k, \quad (59.20)$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} dt_k dt_k^* &= 2 dr_k ds_k, \quad |t_k|^2 = r_k^2 + s_k^2, \\ \frac{1}{2} (\zeta_k^* t_k + \zeta_k t_k^*) &= \xi_k r_k + \eta_k s_k, \end{aligned} \quad (59.21)$$

откуда, пользуясь формулами (59.06), получаем

$$\begin{aligned} & \iint \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\zeta_k^* t_k + \zeta_k t_k^*) - \frac{1}{2} \rho_k |t_k|^2 \right\} dt_k dt_k^* = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \xi_k r_k} e^{-\frac{1}{2} \rho_k r_k^2} dr_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \eta_k s_k} e^{-\frac{1}{2} \rho_k s_k^2} ds_k = \\ &= \frac{4\pi}{\rho_k} e^{-\frac{\xi_k^2 + \eta_k^2}{2\rho_k}} = \frac{4\pi}{\rho_k} e^{-\frac{|\zeta_k|^2}{2\rho_k}}, \end{aligned} \quad (59.22)$$

так что

$$p(z_1, z_1^*, \dots, z_H, z_H^*) = \frac{1}{(4\pi)^H \prod_k \rho_k} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \frac{|\zeta_k|^2}{\rho_k} \right\}. \quad (59.23)$$

Соотношение (59.08) справедливо и для унитарных преобразований, а

$$\sum_k \frac{|\zeta_k|^2}{\rho_k} = \sum_{g,h} Q_{gh} z_g z_h^*, \quad \text{где} \quad Q_{gh} = \sum_k \frac{1}{\rho_k} \alpha_{kg} \alpha_{kh}^*. \quad (59.24)$$

Поскольку

$$R_{gh} = \sum_j \rho_j \alpha_{jg} \alpha_{jh}^* \quad \text{и} \quad \sum_l R_{gl} Q_{lh} = \delta_{gh}, \quad (59.25)$$

то матрица  $\|Q_{gh}\|$  обратна матрице  $\|R_{gh}\|$ , и плотность вероятности для  $H$  комплексных нормальных величин равна

$$\begin{aligned} p(z_1, z_1^*, \dots, z_H, z_H^*) &= \\ &= \frac{1}{(4\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}\|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h} Q_{gh} z_g z_h^* \right\}. \end{aligned} \quad (59.26)$$

Если по формулам (58.14) и (59.14) вернуться к вещественным случайным величинам  $x_1, \dots, x_H$  и  $y_1, \dots, y_H$  и представить эрмитову матрицу  $Q_{gh}$  в виде

$$\left. \begin{aligned} Q_{gh} &= Q_{gh}^{(1)} + iQ_{gh}^{(2)}, \\ Q_{gh}^{(1)} &= Q_{hg}^{(1)}, \quad Q_{gh}^{(2)} = -Q_{hg}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (59.27)$$

то плотность вероятности будет равна

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_H; y_1, \dots, y_H) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^H \text{Det} \|R_{gh}\|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g,h} [Q_{gh}^{(1)} (x_g x_h + y_g y_h) + \right. \\ &\quad \left. + Q_{gh}^{(2)} (x_g y_h - x_h y_g)] \right\}. \end{aligned} \quad (59.28)$$

Заметим, что если мы имеем  $H$  нормальных случайных величин  $x_1, \dots, x_H$ , то введением  $H$  дополнительных случайных величин  $y_1, \dots, y_H$ , удовлетворяющих условиям (58.12), можно всегда прийти к комплексным нор-

малыми величинами рассмотренного выше типа. При этом коэффициенты  $R_{gh}^{(2)}$  можно выбирать различным образом. Если, например, считать  $R_{gh}^{(2)} = 0$ , то величины (58.22) будут вещественными. В § 43. мы имели дело со случаем, когда выбор комплексных чисел  $R_{gh}$  подсказывался общей формулой для корреляционной функции, полученной ниже в § 69.

Формула (59.13) дает  $N$ -мерное распределение Гаусса для вещественных случайных величин, формула (59.26) — для комплексных.

С точки зрения теории вероятностей значение гауссовых случайных величин определяется тем, что величины, каждая из которых является суммой достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, имеют распределение, близкое к гауссовому. В теории вероятностей исследуются условия, при которых гауссово распределение (59.13) является предельным в этом смысле.

## § 60. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ОГИБАЮЩИХ

В гл. VII мы пользовались для комплексных случайных величин несколько иными обозначениями. Мы исходили из вещественных случайных величин

$$u_x = G_x \cos \gamma_x, \quad v_x = G_x \sin \gamma_x \quad (x = 1, \dots, L) \quad (60.01)$$

и считали их гауссовыми. При этом естественно предположить, что одномерная плотность вероятности  $p(\gamma_x)$  и двумерная плотность  $p(\gamma_x, \gamma_\lambda)$  удовлетворяют соотношениям

$$p(\gamma_x) = p(\gamma_x + \vartheta), \quad p(\gamma_x, \gamma_\lambda) = p(\gamma_x + \vartheta, \gamma_\lambda + \vartheta), \quad (60.02)$$

где  $\vartheta$  — произвольный фазовый угол. Эти соотношения означают, что при смещении всех фаз  $\gamma_x$  на одинаковый угол  $\vartheta$  мы приходим к новым фазам, обладающим той же вероятностью. Из соотношений (60.02) вытекают тождества

$$\left. \begin{aligned} \overline{\cos \gamma_x} &= 0, \quad \overline{\sin \gamma_x} = 0, \\ \overline{\cos(\gamma_x + \gamma_\lambda)} &= 0, \quad \overline{\sin(\gamma_x + \gamma_\lambda)} = 0, \\ \overline{\cos \gamma_x \cos \gamma_\lambda} &= \overline{\sin \gamma_x \sin \gamma_\lambda}, \\ \overline{\cos \gamma_x \sin \gamma_\lambda} &= -\overline{\sin \gamma_x \cos \gamma_\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (60.03)$$

откуда получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_x &= 0, \quad \bar{v}_x = 0, \\ \overline{u_x u_\lambda} &= \overline{v_x v_\lambda} = r_{x\lambda}^{(1)}, \\ \overline{u_x v_\lambda} &= -\overline{u_\lambda v_x} = r_{x\lambda}^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (60.04)$$

если сделать дополнительное предположение, что величины  $G_x$  и  $G_\lambda$  (амплитуды или огибающие) независимы от фаз  $\gamma_x$  и  $\gamma_\lambda$ . Если огибающие  $G_x$  нормировать по формуле

$$\overline{G_x^2} = 2, \quad (60.05)$$

то  $r_{x\lambda}^{(1)}$  будут коэффициентами корреляции, поскольку

$$r_{xx}^{(1)} = 1. \quad (60.06)$$

Другие свойства коэффициентов  $r_{x\lambda}^{(1)}$  и  $r_{x\lambda}^{(2)}$  выражаются формулами

$$r_{x\lambda}^{(1)} = r_{\lambda x}^{(1)}, \quad r_{x\lambda}^{(2)} = -r_{\lambda x}^{(2)}, \quad r_{xx}^{(2)} = 0. \quad (60.07)$$

Если ввести комплексные случайные величины

$$\omega_x = u_x - iv_x = G_x e^{-i\gamma_x}, \quad \omega_x^* = u_x + iv_x = G_x e^{i\gamma_x}, \quad (60.08)$$

то их моменты будут равны

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_x &= \overline{\omega_x^*} = 0, \\ \overline{\omega_x \omega_\lambda} &= \overline{\omega_x^* \omega_\lambda^*} = 0, \\ \overline{\omega_x^* \omega_\lambda} &= 2r_{x\lambda}^m, \end{aligned} \right\} \quad (60.09)$$

где комплексный коэффициент корреляции  $r_{x\lambda}^m$  равен

$$r_{x\lambda}^m = r_{x\lambda}^{(1)} - ir_{x\lambda}^{(2)}, \quad r_{x\lambda}^m = (r_{\lambda x}^m)^*. \quad (60.10)$$

При  $L=1$  эрмитова матрица  $\|r_{x\lambda}^m\|$  и обратная ей матрица  $\|q_{x\lambda}^m\|$  сводятся к единице и плотность вероятности (59.13) принимает вид

$$p(u_1, v_1) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2) \right\} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{G_1^2}{2}}. \quad (60.11)$$

При переходе от декартовых координат  $u_1, v_1$  к полярным координатам  $G_1, \gamma_1$  нужно учесть соотношение

$$du_1 dv_1 = G_1 dG_1 d\gamma_1, \quad (60.12)$$



откуда

$$p(G_1, \gamma_1) = \frac{G_1}{2\pi} e^{-\frac{G_1^2}{2}}, \quad (60.13)$$

так что одномерными плотностями вероятности для каждой величины  $G_1$  и  $\gamma_1$  равны

$$\left. \begin{aligned} p(\gamma_1) &= \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \gamma_1 < 2\pi), \\ p(G_1) &= G_1 e^{-\frac{G_1^2}{2}} \quad (0 \leq G_1 < \infty). \end{aligned} \right\} \quad (60.14)$$

При  $L=2$ , обозначая  $r_{12}^m = pe^{-i\epsilon}$ , мы имеем

$$\|r_{\kappa\lambda}^m\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & pe^{-i\epsilon} \\ pe^{i\epsilon} & 1 \end{array} \right\|, \quad \|q_{\kappa\lambda}^m\| = \frac{1}{1-p^2} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -pe^{-i\epsilon} \\ -pe^{i\epsilon} & 1 \end{array} \right\|, \quad (60.15)$$

откуда

$$\begin{aligned} p(u_1, u_2; v_1, v_2) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 (1-p^2)} \exp \left\{ -\frac{G_1^2 + G_2^2 - 2pG_1G_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2 + \epsilon)}{2(1-p^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (60.16)$$

и при переходе к полярным координатам получаем

$$\begin{aligned} p(G_1, G_2; \gamma_1, \gamma_2) &= \\ &= \frac{G_1G_2}{(2\pi)^2 (1-p^2)} \exp \left\{ -\frac{G_1^2 + G_2^2 - 2pG_1G_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2 + \epsilon)}{2(1-p^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (60.17)$$

Чтобы найти двухмерную плотность вероятности  $p(G_1, G_2)$ , необходимо проинтегрировать выражение (60.17) по  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . При интегрировании по  $\gamma_1$  нужно использовать тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{pG_1G_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2 + \epsilon)}{1-p^2} \right\} d\gamma_1 = I_0 \left( \frac{pG_1G_2}{1-p^2} \right), \quad (60.18)$$

а последующее интегрирование по  $\gamma_2$  дает множитель  $2\pi$ . Окончательно получаем

$$p(G_1, G_2) = \frac{G_1G_2}{1-p^2} \exp \left\{ -\frac{G_1^2 + G_2^2}{2(1-p^2)} \right\} I_0 \left( \frac{pG_1G_2}{1-p^2} \right). \quad (60.19)$$

Если  $G_1$  и  $G_2$  нормированы иначе, например,

$$\overline{G_1^2} = \overline{G_2^2} = 2\sigma^2, \quad (60.20)$$

так что

$$\overline{\omega_1^* \omega_2} = 2\sigma^2 p e^{-i\epsilon}, \quad (60.21)$$

то формула (60.19), как легко показать, приобретает вид

$$p(G_1, G_2) = \frac{G_1 G_2}{\sigma^4 (1-p^2)} \exp \left\{ - \frac{G_1^2 + G_2^2}{2\sigma^2 (1-p^2)} \right\} I_0 \left( \frac{p G_1 G_2}{\sigma^2 (1-p^2)} \right). \quad (60.22)$$

Заметим в заключение, что данное выше обоснование формул (60.04) является недостаточно строгим. Ввиду того, что из этих формул вытекают многочисленные и важные следствия, следует отметить, что строгое изложение вопроса должно основываться на определении огибающей и фазы случайного процесса, данном В. И. Бунимовичем (см. его книгу). Обычно же эти величины вводятся с математической точки зрения недостаточно корректно, что не позволяет дать убедительного доказательства формул (60.04).

#### § 61. ТЕПЛОВЫЕ И ДРОБОВЫЕ ШУМЫ КАК ПРИМЕРЫ НОРМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайные величины возникают при рассмотрении «выборок» случайных процессов, т. е. значений различных случайных функций времени в дискретные моменты. При этом *нормальными*, или *гауссовыми*, случайными процессами называются такие процессы, выборки из которых имеют распределение Гаусса (см. § 59), или, что то же самое, характеристическую функцию вида (58.07).

В теории оптимальных приемников обычно предполагают, что помеха является стационарным случайным процессом нормального типа. Часто делают еще одно дополнительное предположение (от которого мы полностью освободились в данной книге), что помеха является «белым шумом», т. е. имеет постоянную спектральную интенсивность, и, будучи некоррелированной во времени («абсолютно случайный процесс»), может быть представлена, как беспорядочное наложение возмущений с нулевой длительностью (ср. § 12 и 17). Существенно отметить, что собственные шумы приемника — тепловые и дробовые, которые будут подробно рассмотрены ниже, — дают основные для такой идеализации. Однако представление о по-

мехе как о белом шуме ведет к некоторым математическим трудностям, не вполне соответствует физической реальности и, что особенно важно, не позволяет включить в рассмотрение интересный вид помех, встречающихся в радиолокации, а именно помех, обусловленных хаотическими отражениями (см. гл. XI).

Поскольку внутренние шумы приемников рассматриваются на протяжении всей книги, целесообразно разобрать вкратце физическую сторону этих явлений.

**Тепловые шумы** возникают вследствие теплового движения электрических зарядов в проводниках. В каждом сопротивлении, находящемся при абсолютной температуре  $T$  в состоянии термодинамического равновесия, в результате флуктуаций возникает случайная электродвижущая сила  $\mathcal{E}(t)$ , спектральная интенсивность которой равна

$$S_{\mathcal{E}}(\omega) = 2RkT, \quad (61.01)$$

где  $k$ —постоянная Больцмана,  $R$ —сопротивление. Это соотношение применимо к любому элементу электрической цепи, причем  $R$  в общем случае определяется по формуле

$$R = \operatorname{Re} Z(\omega), \quad (61.02)$$

где  $Z(\omega)$ —импеданс данного элемента при частоте  $\omega$ .

Мы видим, что для чисто омического сопротивления, не зависящего от частоты, флуктуационная электродвижущая сила  $\mathcal{E}(t)$  является белым шумом, поскольку ее спектральная интенсивность является константой. Фактически, разумеется, при достаточно высоких частотах постоянство  $S_{\mathcal{E}}(\omega)$  всегда нарушается вследствие остаточных емкостей или индуктивностей, скин-эффекта или квантовых явлений. Нужно еще учесть, что при росте частоты квазистационарное рассмотрение цепи и вместе с ним формула (61.01) теряют свой смысл.

Оказывается, что для металлических проводников формулу (61.01) можно применять в случае, когда по ним текут постоянные или переменные токи, т. е. когда, строго говоря, термодинамическое равновесие отсутствует. Объясняется это тем, что прохождение не слишком сильных токов через металлический проводник возмущает тепловое движение электрических зарядов лишь в незначительной степени, так что флуктуации по-прежнему подчиняются формуле (61.01).

**Дробовой эффект** в электронных лампах возникает как результат дискретной структуры электронного потока. Ес-

ли, например, мы имеем диод, к которому приложено достаточно большое анодное напряжение, так что все испускаемые катодом электроны поступают на анод (рис. 56, а),

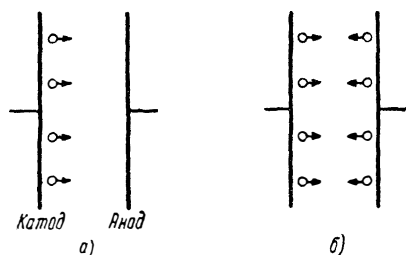


Рис. 56. Электронные потоки в диоде:

а) обычный диод—электроны движутся от катода к аноду; б) „равновесный“ диод—электроны движутся навстречу друг другу и полный анодный ток равен нулю.

то вследствие флуктуаций катодной эмиссии на средний анодный ток  $J$  накладывается случайный «дробовой» ток  $I(t)$  со спектральной интенсивностью

$$S_I(\omega) = eJ, \quad (61.03)$$

где  $e$  есть абсолютная величина заряда электрона. Мы видим, что ток  $I(t)$ , возникающий благодаря дробовому эффекту, также можно считать

белым шумом, поскольку его спектральная интенсивность не зависит от  $\omega$ . Фактически, если под  $I(t)$  понимать ток во внешней цепи диода, формула (61.03) применима при условии

$$\omega\tau_0 \ll 1, \quad (61.04)$$

где  $\tau_0$  есть время пролета электрона через диод или длительность импульса во внешней цепи, появляющегося при прохождении одного электрона от катода к аноду. При  $\omega\tau_0 > 1$  происходит резкое спадание спектральной интенсивности дробовых шумов.

В сущности говоря, дробовой шум является физической реализацией той модели случайного процесса, которую мы рассматривали в § 12, поскольку он состоит из беспорядочно возникающих возмущений (импульсов) стандартной формы.

Благодаря наличию пространственного заряда в электронных лампах лишь часть испускаемых катодом электронов доходит до анода. Оказывается, что пространственный заряд уменьшает дробовой эффект, так что для диода формула (61.03) видоизменяется следующим образом:

$$S_I(\omega) = F^2 eJ, \quad (61.05)$$

где  $F$  есть так называемый коэффициент депрессии дробового эффекта, а  $J$ —анодный ток.

Отметим, что электронная лампа является неравновес-

ной системой, поэтому для нее формула (61.01) неприменима и флуктуации имеют совершенно иную физическую природу, что и находит свое отражение в формулах (61.03) и (61.05) для диода. Интересно, что можно себе представить электрическую цепь с «равновесным» диодом (рис. 56,б), катод и анод которого находятся при одинаковых температуре и напряжении и выполнены из одного и того же материала, способного испускать электроны. Если для простоты считать, что по внешней цепи анод и катод замкнуты накоротко, и обозначить через  $R$  внутреннее сопротивление равновесного диода (по отношению к малым анодным напряжениям и токам), то тепловая э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$ , возникающая в равновесном диоде, будет связана с флуктуационным током  $I(t)$  через диод соотношением

$$\mathcal{E} = RI, \quad (61.06)$$

поэтому по формуле (61.01) получаем

$$S_I(\omega) = \frac{2kT}{R}. \quad (61.07)$$

С другой стороны, при не слишком больших плотностях заряда соударениями электронов друг с другом в пространстве между катодом и анодом можно обычно пренебречь, поэтому единственным «случайным элементом» в системе, изображенной на рис. 56,б, является электронная эмиссия. Если обозначить через  $J_a$  ток, который проходит от катода к аноду, то ток  $-J_a$  в равновесном диоде будет течь в противоположном направлении—от анода к катоду, причем каждый из этих токов должен испытывать дробовой эффект. Поэтому для равновесного диода мы должны иметь формулу

$$S_I(\omega) = 2eJ_a. \quad (61.08)$$

Формулы (61.07) и (61.08) должны совпадать, поэтому сопротивление равновесного диода должно быть равно

$$R = \frac{kT}{eJ_a}. \quad (61.09)$$

Детальное микроскопическое рассмотрение электронных потоков в диоде подтверждает последнее выражение. Таким образом, в данном примере дробовой и тепловой шумов представляют собой разные названия для одного и того же явления.

При отсутствии теплового равновесия спектральную интенсивность дробового тока часто представляют в виде

$$S_j(\omega) = \Theta \frac{2kT}{R}, \quad (61.10)$$

где  $\Theta$  называется коэффициентом депрессии тепловых шумов. Оказывается, что в диоде с задерживающим напряжением и холодным анодом

$$\Theta = \frac{1}{2}, \quad (61.11)$$

причем в этом случае формулы (61.03) и (61.10) эквивалентны. В плоском диоде с ускоряющим анодным напряжением и сильным пространственным зарядом (таким, что справедлив так называемый закон трех вторых, по которому анодный ток в основном определяется анодным напряжением и практически не зависит от тока эмиссии)

$$\Theta = 0,644, \quad (61.12)$$

причем в этом случае коэффициент  $F^2$  в формуле (61.05) мал.

Выше мы рассмотрели простейшие системы, в которых проявляются тепловые и дробовые шумы. В реальных системах эти шумы подвергаются преобразованиям. Например, в приемных устройствах дробовой и тепловой эффекты усиливаются, претерпевают фильтрацию и т. д. В теории оптимальных приемников мы предполагаем, что помеха, эквивалентная всем внутренним шумам приемника, как бы отнесена к его входному звену и представлена в виде случайного процесса  $n(t)$  с известными статистическими свойствами.

Тепловые и дробовые шумы являются классическими примерами нормальных случайных процессов, причем после прохождения через линейные системы (частотные фильтры) они остаются нормальными. Последнее следует просто из того, что при линейном преобразовании

$$x'_g = \sum_h a_{gh} x_h \quad (61.13)$$

новые случайные величины  $x'_g$  по-прежнему являются нормальными, т. е. имеют распределение Гаусса.

Другим примером нормального случайного процесса, как мы уже указывали, является радиолокационная помеха, вызванная отражением от многих хаотически движущихся рассеивателей (см. гл. XI).

## ГЛАВА X

### ТЕОРИЯ ФЛЮКТУАЦИОННОЙ МОДУЛЯЦИИ

#### § 62. МОДУЛЯЦИЯ СИНУСОИДАЛЬНОГО КОЛЕБАНИЯ НОРМАЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ ПО АМПЛИТУДЕ, ЧАСТОТЕ И ФАЗЕ

В литературе подробно изучены преобразования нормальных процессов при их прохождении через линейные и нелинейные устройства. В данной книге мы также рассматривали различные случаи фильтрации и детектирования случайных процессов в оптимальных системах. Если нормальный случайный процесс применяется для модуляции некоторого генератора синусоидальных колебаний, то в результате возникает новый случайный процесс, вообще говоря не принадлежащий к нормальному типу и являющийся сложным преобразованием исходного нормального процесса. Рассмотрению такого преобразования и посвящена данная глава.

Пусть некоторый источник колебаний в отсутствие модуляции дает чисто синусоидальные колебания с частотой  $\omega_0$  и, начиная с момента  $t=0$ , подвергается модуляции с помощью нормального флюктуационного процесса (шума). Обозначим этот флюктуационный процесс через  $x(t)$ , причем для сокращения письма нормируем случайную функцию  $x(t)$  следующим образом:

$$\overline{x(t)} = 0, \quad \overline{x^2(t)} = 1. \quad (62.01)$$

В результате модуляции получается колебание

$$V(t) = A(t) \cos [\omega_0 t - \Theta(t)], \quad (62.02)$$

где  $A(t)$  и  $\Theta(t)$  являются случайными функциями.

Будем считать, что мгновенное значение амплитуды  $A(t)$  определяется значением  $x(t)$  в тот же момент. При линейной амплитудной модуляции (АМ) мы имеем:

$$A(t) = A_0 [1 + mx(t)], \quad A_0 = \text{const.} \quad (62.03)$$

Экспоненциальная АМ

$$A(t) = A_0 e^{mx(t)} \quad (62.04)$$

является простейшим примером нелинейной АМ.

Наряду с этим примем, что флюктуационный процесс  $x(t)$  изменяет также мгновенные значения частоты и фазы генерируемого колебания, причем как частотную модуляцию (ЧМ), так и фазовую модуляцию (ФМ) будем предполагать *линейными*, так что при  $t > 0$  будем иметь

$$\Theta(t) = n\omega_0 y(t) + px(t) + \Theta_0, \quad (62.05)$$

где

$$y(t) = \int_0^t x(s) ds. \quad (62.06)$$

Величины  $m$ ,  $n$  и  $p$  в этих формулах будем называть соответственно коэффициентами амплитудной, частотной и фазовой модуляций; в общем случае  $m$ ,  $n$  или  $p$  могут быть отрицательными или равными нулю. Величину  $n\omega_0$  часто называют девиацией частоты (в данном случае это — средняя квадратичная девиация).

Под влиянием флюктуационной модуляции интенсивность колебаний, первоначально (при  $t < 0$ ) сосредоточенная в частоте  $\omega_0$ , распределяется по частотам определенным образом, зависящим от спектрального распределения флюктуационного процесса  $x(t)$  и коэффициентов модуляции. Нашей задачей и является вычисление спектральной интенсивности модулированных колебаний, а также их корреляционной функции.

Для сокращения письма введем

$$X(t) = \frac{V(t)}{A_0} \quad (62.07)$$



и будем изучать свойства случайных функций

$$X(t) = [1 + mx(t)] \cos [\omega_0 t - \Theta(t)] \quad (62.08)$$

(при линейной АМ) и

$$X(t) = e^{mx(t)} \cos [\omega_0 t - \Theta(t)] \quad (62.09)$$

(при экспоненциальной АМ).

Поскольку случайная функция  $y(t)$  получается в результате интегрирования — линейной операции над функцией  $x(t)$ , она также будет определять нормальный случайный процесс. Обозначая

$$x_\alpha = x(t_\alpha), \quad y_\alpha = y(t_\alpha), \quad \Theta_\alpha = \Theta(t_\alpha), \quad (62.10)$$

можно согласно формуле (58.07) написать характеристическую функцию

$$\chi(u_1, u_2; v_1, v_2) = e^{\overline{i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + v_1 y_1 + v_2 y_2)}} \quad (62.11)$$

в виде

$$\begin{aligned} \chi(u_1, u_2; v_1, v_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + 2e_1 u_1 u_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + b_1 v_1^2 + b_2 v_2^2 + 2e_2 v_1 v_2 + 2c_1 u_1 v_1 + 2c_2 u_2 v_2 + 2d_1 u_1 v_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2d_2 u_2 v_1 \right) \right\}, \quad (62.12) \end{aligned}$$

причем коэффициенты  $a_1, \dots, e_2$  легко выразить через корреляционную функцию

$$r(\tau) = r(-\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)}, \quad (62.13)$$

определяющую закон изменения процесса  $x(t)$  во времени. Согласно формулам (58.09) мы имеем:

$$a_1 = \overline{x_1^2} = 1, \quad a_2 = \overline{x_2^2} = 1, \quad e_1 = \overline{x_1 x_2} = r(\tau), \quad (62.14)$$

где

$$\tau = t_1 - t_2. \quad (62.15)$$

Далее

$$\left. \begin{aligned}
 b_1 &= \overline{y_1^2} = \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} r(s_1 - s_2) ds_1 ds_2, \\
 b_2 &= \overline{y_2^2} = \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} r(s_1 - s_2) ds_1 ds_2, \\
 e_2 &= \overline{y_1 y_2} = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} r(s_1 - s_2) ds_1 ds_2, \\
 c_1 &= \overline{x_1 y_1} = \int_0^{t_1} r(t_1 - s) ds, \\
 c_2 &= \overline{x_2 y_2} = \int_0^{t_2} r(t_2 - s) ds, \\
 d_1 &= \overline{x_1 y_2} = \int_0^{t_2} r(t_1 - s) ds, \\
 d_2 &= \overline{x_2 y_1} = \int_0^{t_1} r(t_2 - s) ds.
 \end{aligned} \right\} (62.16)$$

Если для сокращения обозначить

$$\begin{aligned}
 g(\tau) &= -g(-\tau) = \int_0^{\tau} r(s) ds, \\
 h(\tau) &= h(-\tau) = \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} r(s_1 - s_2) ds_1 ds_2,
 \end{aligned} \quad (62.17)$$

то

$$b_1 + b_2 - 2e_2 = \overline{(y_1 - y_2)^2} = h(\tau), \quad c_1 - d_1 = d_2 - c_2' = g(\tau). \quad (62.18)$$

Знание характеристической функции (62.12) позволяет произвести вычисление корреляционной функции модулированных колебаний. К этому мы и перейдем.

§ 63. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТР  
МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пользуясь формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta), \quad (63.01)$$

можно написать

$$\overline{X(t_1) X(t_2)} = R(\tau) + \tilde{R}(t_1, t_2), \quad \tau = t_1 - t_2, \quad (63.02)$$

так что для линейной АМ

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \overline{(1 + mx_1)(1 + mx_2) \cos [\omega_0 \tau - (\Theta_1 - \Theta_2)]}. \quad (63.03)$$

Для краткости мы будем записывать функцию  $R(\tau)$  в виде

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{E(\tau) e^{i\omega_0 \tau}\} = \frac{1}{4} [E(\tau) e^{i\omega_0 \tau} + E^*(\tau) e^{-i\omega_0 \tau}], \quad (63.04)$$

где вспомогательная комплексная функция  $E(\tau)$  для линейной АМ равна

$$E(\tau) = \overline{e^{-i(\Theta_1 - \Theta_2)}} + \overline{m(x_1 + x_2) e^{-i(\Theta_1 - \Theta_2)}} + \overline{m^2 x_1 x_2 e^{-i(\Theta_1 - \Theta_2)}}, \quad (63.05)$$

а для экспоненциальной АМ

$$E(\tau) = \overline{e^{m(x_1 + x_2) - i(\Theta_1 - \Theta_2)}}. \quad (63.06)$$

Так как

$$\Theta_1 - \Theta_2 = p(x_1 - x_2) + n\omega_0(y_1 - y_2), \quad (63.07)$$

то согласно формуле (62.11) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overline{e^{-i(\Theta_1 - \Theta_2)}} &= \chi(-p, p; -n\omega_0, n\omega_0), \\ \overline{x_1 e^{-i(\Theta_1 - \Theta_2)}} &= -i \frac{\partial \chi}{\partial u_1}(-p, p; -n\omega_0, n\omega_0), \\ \overline{x_2 e^{-i(\Theta_1 - \Theta_2)}} &= -i \frac{\partial \chi}{\partial u_2}(-p, p; -n\omega_0, n\omega_0), \\ \overline{x_1 x_2 e^{-i(\Theta_1 - \Theta_2)}} &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial u_1 \partial u_2}(-p, p; -n\omega_0, n\omega_0). \end{aligned} \right\} \quad (63.08)$$

Учитывая формулы (62.12) — (62.18), получаем

$$\left. \begin{aligned} \overline{e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau) - p^2 [1 - r(\tau)] \right\}, \\ \overline{x_1 e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}} &= -i \{ n \omega_0 g(\tau) + \\ + p [1 - r(\tau)] \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau) - p^2 [1 - r(\tau)] \right\}, \\ \overline{x_2 e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}} &= -i \{ n \omega_0 g(\tau) - \\ - p [1 - r(\tau)] \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau) - p^2 [1 - r(\tau)] \right\}, \\ \overline{x_1 x_2 e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}} &= \{ r(\tau) - n^2 \omega_0^2 g^2(\tau) + \\ + p^2 [1 - r(\tau)]^2 \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau) - p^2 [1 - r(\tau)] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (63.09)$$

так что при линейной АМ корреляционная функция модулированных колебаний вычисляется по формуле (63.04), где

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \{ [1 - imng(\tau)]^2 + m^2 r(\tau) + \\ + m^2 p^2 [1 - r(\tau)]^2 \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau) - p^2 [1 - r(\tau)] \right\}. \end{aligned} \quad (63.10)$$

Аналогично

$$\overline{e^{m(x_1 + x_2) - i(\theta_1 + \theta_2)}} = \chi(-p - im, p - im; -n\omega_0, n\omega_0), \quad (63.11)$$

поэтому при экспоненциальной АМ функция  $E(\tau)$  равна

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \exp \left\{ -2imn\omega_0 g(\tau) - \frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + m^2 [1 + r(\tau)] - p^2 [1 - r(\tau)] \right\}. \end{aligned} \quad (63.12)$$

Что же касается функции

$$\tilde{R}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} (1 + mx_1)(1 + mx_2) \cos [\omega_0(t_1 + t_2) - (\theta_1 + \theta_2)] \quad (63.13)$$

(для линейной АМ) или

$$\tilde{R}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} e^{m(x_1 + x_2)} \overline{\cos[\omega_0(t_1 + t_2) - (\Theta_1 + \Theta_2)]} \quad (63.14)$$

(для экспоненциальной АМ), входящей в правую часть формулы (63.02), то она при увеличении  $t_1$  и  $t_2$  быстро стремится к нулю, будучи пропорциональной выражению

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 (b_1 + b_2 + 2e_2)\right\}. \quad (63.15)$$

Для достаточно больших  $t_1$  и  $t_2 \ll t_1$  мы имеем приближенные формулы (ср. ниже § 66)

$$b_1 \approx 2\delta\tau \cdot t_1, \quad b_2 \approx e_2 \approx 2\delta\tau \cdot t_2, \quad (63.16)$$

поэтому при больших  $t$  мы имеем:

$$\tilde{R} \propto e^{-\frac{t}{t_0}}, \quad (63.17)$$

где время установления корреляции  $t_0$  дается формулой

$$\frac{1}{t_0} = 4n^2 \omega_0^2 \delta\tau. \quad (63.18)$$

Функция  $\tilde{R}(t_1, t_2)$  у нас появилась потому, что случайный процесс  $X(t)$  является нестационарным — модуляция началась в момент  $t=0$ . Если отвлечься от переходных процессов и рассматривать  $X(t)$  при достаточно больших положительных  $t$ , то следует считать

$$\overline{X(t_1) X(t_2)} = R(\tau). \quad (63.19)$$

Заметим, что интенсивность стационарного процесса  $X(t)$  равна

$$\overline{X^2} = R(0), \quad (63.20)$$

причем при линейной АМ

$$R(0) = \frac{1}{2} (1 + m^2), \quad (63.21)$$

а при экспоненциальной АМ

$$R(0) = \frac{1}{2} e^{m^2}. \quad (63.22)$$

По найденной выше корреляционной функции  $R(\tau)$  негрудно вычислить спектральную интенсивность модулированных колебаний

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau. \quad (63.23)$$

Подставляя в эту формулу выражения (63.10) и (63.12), можно представить спектральную интенсивность в виде

$$S(\omega) = F(\omega) + F^*(-\omega), \quad (63.24)$$

где

$$F(\omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} E(\tau) d\tau,$$

$$F^*(-\omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)\tau} E^*(\tau) d\tau. \quad (63.25)$$

Эти формулы полностью решают задачу о вычислении спектра модулированных колебаний. При пользовании ими необходимо иметь в виду, что корреляционная функция  $r(\tau)$  модулирующего случайного процесса часто неизвестна, а вместо этого дано его спектральное распределение  $s(\omega)$ , связанное с функцией  $r(\tau)$  соотношениями

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} r(\tau) d\tau,$$

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \cdot s(\omega) d\omega. \quad (63.26)$$

Таким образом исходя из спектра модулирующего процесса, нужно по второй формуле (63.26) вычислить функцию  $r(\tau)$ , а затем по формулам (62.17) — функции  $g(\tau)$  и  $h(\tau)$ , после чего формулы (63.24) и (63.25) позволяют вычислить искомую спектральную интенсивность  $S(\omega)$ . В следующих параграфах мы разберем наиболее интересные примеры применения выведенных общих формул.

## § 64. МОДУЛЯЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ (КВАЗИСИНУСОИДАЛЬНАЯ МОДУЛЯЦИЯ)

Ниже мы будем широко применять дельта-функцию, которую мы на протяжении всей книги по возможности старались избегать [см. впрочем, формулы (1.13) и (21.04)]. Если корреляционная функция  $R(\tau)$  имеет вид

$$R(\tau) = \sum_k P_k \cos \omega_k \tau, \quad (64.01)$$

то интеграл (63.23) приводит к выражению

$$S(\omega) = \pi \sum_k P_k [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)], \quad (64.02)$$

показывающему, что вся интенсивность данного процесса сосредоточена в дискретных частотах  $\omega = \pm \omega_k$ . Например, при отсутствии модуляции ( $x(t) \equiv 0$ ) мы имеем:

$$X(t) = \cos(\omega_0 t - \Theta_0) \quad (64.03)$$

и, производя усреднение по случайной фазе  $\Theta_0$ , равномерно распределенной в интервале  $0 \leq \Theta_0 < 2\pi$ , мы получим

$$R(\tau) = \overline{X(t_1) X(t_2)} = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad (64.04)$$

откуда

$$S(\omega) = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (64.05)$$

так что в отсутствие модуляции, как уже указывалось, интенсивность сосредоточена при  $\omega = \pm \omega_0$ .

Наиболее простые результаты дают выведенные в § 63 формулы в случае линейной АМ при отсутствии ЧМ и ФМ ( $m \neq 0$ ,  $n = p = 0$ ), когда

$$F(\omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{m^2}{4} s(\omega - \omega_0), \quad (64.06)$$

т. е. спектр состоит из линии  $\omega = \omega_0$ , соответствующей немодулированному колебанию, и спектра  $s(\omega)$ , перенесенного к несущей частоте  $\omega_0$ .

Если спектр модулирующего процесса сосредоточен в весьма узкой полосе частот вблизи частоты  $\omega_1$ , то можно написать

$$s(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] \quad (64.07)$$

и корреляционная функция  $r(\tau)$  равна

$$r(\tau) = \cos \omega_1 \tau. \quad (64.08)$$

В этом случае происходит модуляция с помощью колебаний определенной частоты  $\omega_1$ , но с неопределенной амплитудой и фазой. Такую модуляцию мы будем называть квазисинусоидальной, поскольку она отличается от обычной синусоидальной модуляции (см. ниже).

Для квазисинусоидальной АМ формула (64.06) принимает вид

$$F(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[ \delta(\omega - \omega_0) + \frac{m^2}{4} \delta(\omega - \omega_0 - \omega_1) + \frac{m^2}{4} \delta(\omega - \omega_0 + \omega_1) \right], \quad (64.09)$$

причем спектральную интенсивность, соответствующую формулам (64.06) и (64.09), нетрудно вывести из элементарных соображений.

Для квазисинусоидальной ФМ ( $p \neq 0$ ,  $m = n = 0$ ) функция  $F(\omega)$  равна

$$F(\omega) = \frac{1}{4} e^{-p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)\tau + p^2 \cos \omega_1 \tau} d\tau. \quad (64.10)$$

Функция  $e^{p^2 \cos \omega_1 \tau}$ , будучи периодической (с периодом  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ ), может быть разложена в ряд Фурье

$$e^{p^2 \cos \omega_1 \tau} = I_0(p^2) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(p^2) \cos k\omega_1 \tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(p^2) e^{ik\omega_1 \tau}, \quad (64.11)$$

где  $I_k$  — модифицированная функция Бесселя — определяется формулой

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \varphi} \cos k\varphi d\varphi = \frac{\omega_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} e^{x \cos \omega_1 \tau} \cos \omega_1 \tau d\tau. \quad (64.12)$$



Отсюда получаем

$$F(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-p^2} \left\{ I_0(p^2) \delta(\omega - \omega_0) + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(p^2) [\delta(\omega - \omega_0 + k\omega_1) + \delta(\omega - \omega_0 - k\omega_1)] \right\}, \quad (64.13)$$

т. е. при квазисинусоидальной ФМ спектр получается дискретным, как и при обычной синусоидальной ФМ, но интенсивность, приходящаяся на каждую частоту, выражается через коэффициент ФМ несколько необычным образом.

Чтобы вывести формулу (64.13) элементарно, поступим следующим образом. Пусть

$$x(t) = a \cos(\omega_1 t - \vartheta), \quad (64.14)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  постоянные; тогда

$$X(t) = \cos[\omega_0 t - pa \cos(\omega_1 t - \vartheta) - \Theta_0] = J_0(pa) \cos(\omega_0 t - \Theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(pa) \left\{ \cos[(\omega_0 + k\omega_1)t - k\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) - \Theta_0] + \cos[(\omega_0 - k\omega_1)t + k\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) - \Theta_0] \right\}. \quad (64.15)$$

Эта формула хорошо известна в теории частотной и фазовой модуляции; она легко выводится из свойств функций Бесселя. Мы видим, что, например, частота  $\omega = \omega_0 - k\omega_1$  имеет (среднюю по фазе) интенсивность  $\frac{1}{2} J_k^2(pa)$ .

Амплитуда (огibaющая)  $a$  имеет распределение Релея

$$p(a) = a e^{-\frac{a^2}{2}}, \quad (64.16)$$

поэтому после усреднения по  $a$  интенсивность, соответствующая частоте  $\omega_0 - k\omega_1$ , равна

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} a e^{-\frac{a^2}{2}} J_k^2(pa) da = \frac{1}{2} e^{-p^2} I_k(p^2), \quad (64.17)$$

причем последнее выражение совпадает с тем, что дает формула (64.13). Интеграл (64.17) является частным слу-

чаем второго экспоненциального интеграла Вебера (см. Ватсон стр. 433).

При чистой ЧМ ( $n \neq 0, m = p = 0$ ) имеем:

$$F(\omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i(\omega - \omega_0)\tau - \frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau) \right\} d\tau, \quad (64.18)$$

и при монохроматическом модулирующем процессе

$$h(\tau) = 2 \frac{1 - \cos \omega_1 \tau}{\omega_1^2}. \quad (64.19)$$

Сравнение формул (64.10) и (64.18) показывает, что квазисинусоидальная ЧМ с коэффициентом  $n$  полностью эквивалентна квазисинусоидальной ФМ с коэффициентом

$$p = n \frac{\omega_0}{\omega_1}. \quad (64.20)$$

Это соотношение известно в теории синусоидальной модуляции.

Рассмотренные выше соотношения дают, в сущности, проверку полученных в § 63 общих формул. В следующих параграфах мы исследуем другие примеры применения этих формул.

### § 65. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В этом параграфе мы рассмотрим модуляцию с помощью нормального процесса, спектр  $s(\nu)$  которого подобен спектру, изображенному на рис. 5. Если определить время корреляции  $\delta\tau$  и ширину спектра  $\delta\omega$  для модулирующего процесса с помощью соотношений

$$\delta\tau = \int_0^{\infty} r(\tau) d\tau, \quad \delta\omega = \frac{\pi}{s(0)}, \quad (65.01)$$

введенных еще в § 3 и упрощающихся в силу того, что здесь  $r(0) = 1$ , то  $\delta\omega$  и  $\delta\tau$  будут связаны соотношением

$$\delta\omega \delta\tau = \frac{\pi}{2}. \quad (65.02)$$

В § 63 вычисление спектра модулированных колебаний сведено к квадратурам. Однако вычисление соответствующих

интегралов сопряжено с трудностями, поскольку функция  $r(\tau)$  и определяемые через нее функции  $g(\tau)$  и  $h(\tau)$  обычно сложны. Между тем, при малых  $\tau$  эти функции приближенно равны

$$r(\tau) = 1, \quad g(\tau) = \tau, \quad h(\tau) = \tau^2 \quad (|\tau| \ll \delta\tau), \quad (65.03)$$

а при больших  $\tau$

$$r(\tau) = 0, \quad g(\tau) = \delta\tau, \quad h(\tau) = 2\tau\delta\tau \quad (\tau \gg \delta\tau). \quad (65.04)$$

Использование приближенных выражений (65.03) эквивалентно предположению о бесконечно малой ширине спектра модулирующих колебаний

$$s(\omega) = 2\pi\delta(\omega), \quad r(\tau) = 1. \quad (65.05)$$

Формула (63.10) при этом дает

$$F(\omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - imn\omega_0\tau)^2 + m^2] \exp\left\{-i(\omega - \omega_0)\tau - \frac{1}{2}n^2\omega_0^2\tau^2\right\} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n\omega_0} \left[1 - \frac{m(\omega - \omega_0)}{n\omega_0}\right] \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2n^2\omega_0^2}\right\}, \quad (65.06)$$

а формула (63.12)

$$F(\omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i[\omega - \omega_0(1 - 2mn)]\tau - \frac{1}{2}n^2\omega_0^2\tau^2 + 2m^2\right\} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n\omega_0} \exp\left\{2m^2 - \frac{[\omega - \omega_0(1 - 2mn)]^2}{2n^2\omega_0^2}\right\}. \quad (65.07)$$

В обоих случаях оказывается, что на спектральную интенсивность наличие или отсутствие ФМ не влияет. Это — явление, характерное для «квазистатической» модуляции, определяемой формулами (65.05). Действительно, «бесконечно медленное» изменение фазы не должно влиять на спектральную интенсивность. При этих же условиях шири-

ну спектра, равную  $n\omega_0$ , определяет только ЧМ, и действие АМ сказывается лишь в смещении максимума функции  $F(\omega)$  от частоты  $\omega_0$  к частоте

$$\omega'_0 = \omega_0(1 - 2mn), \quad (65.08)$$

но не изменяет ширины спектра. Для экспоненциальной модуляции формула (65.08) является точной, а для линейной — приближенной (она справедлива при  $m \ll 1$ ).

Выражения (65.06) и (65.07) нетрудно получить из элементарных соображений. Для простоты разберем ЧМ без АМ ( $n \neq 0, m = 0$ ). Каждому значению  $x$ , изменяющемуся во времени достаточно медленно, соответствуют частоты

$$\omega = \pm \omega_0^f(1 - nx), \quad (65.09)$$

интенсивность каждой из которых равна  $1/4$ . Поэтому интенсивность спектра при квазистатической модуляции дается формулой

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} S(\omega) d\omega &= \frac{1}{4} [p(x') dx' + p(x'') dx''], \\ x' &= -\frac{\omega - \omega_0}{n\omega_0}, \quad x'' = -\frac{\omega + \omega_0}{n\omega_0}, \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (65.10)$$

откуда

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n\omega_0} \left[ e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2n^2\omega_0^2}} + e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{2n^2\omega_0^2}} \right], \quad (65.11)$$

что совпадает с результатами, полученными выше, при  $m = 0$ .

Как показывает более точный анализ исходных выражений (63.10), (63.12) и (63.25), формулы (65.06) и (65.07) справедливы при условии, что параметр

$$q = n\omega_0 \delta\tau = \frac{\pi}{2} \frac{n\omega_0}{\delta\omega} \quad (65.12)$$

велик по сравнению с единицей. Тогда ширина получающегося спектра

$$\Delta\omega \sim n\omega_0 \sim q\delta\omega \quad (65.13)$$

оказывается гораздо больше  $\delta\omega$  — ширины спектра модулирующих флюктуаций.

В противоположном случае, когда  $q \ll 1$ , в интегралы (63.25) можно подставлять приближенные выражения (65.04) и, например, для линейной АМ мы получаем

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ [(1 - imn\omega_0\delta\tau)^2 + m^2 p^2] e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-i(\omega - \omega_0 + n^2\omega_0^2\delta\tau)\tau} d\tau \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} e^{-p^2} \operatorname{Re} \frac{(1 - imq)^2 + m^2 p^2}{n\omega_0 q - i(\omega - \omega_0)}. \quad (65.14)
 \end{aligned}$$

При дополнительном условии  $m q \ll 1$  функция  $F(\omega)$  принимает вид

$$F(\omega) = \frac{(1 + m^2 p^2) e^{-p^2}}{4n\omega_0 q} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{n\omega_0 q}\right)^2}, \quad (65.15)$$

откуда следует, что в предельном случае  $q \ll 1$  АМ и ФМ не влияют на форму спектра, и ширина получающегося спектра

$$\Delta\omega \sim n\omega_0 q = \frac{\pi}{2} q^2 \delta\omega \quad (65.16)$$

мала по сравнению с  $\delta\omega$ .

## § 66. ЗАВИСИМОСТЬ ШИРИНЫ СПЕКТРА МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ШИРИНЫ СПЕКТРА МОДУЛИРУЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Вычислим зависимость  $\Delta\omega$  от  $\delta\omega$  при частотной модуляции ( $n \neq 0$ ,  $m = p = 0$ ). Ширину спектра  $\delta\omega$  модулирующих колебаний мы определили формулой (65.01), а ширина  $\Delta\omega$  модулированных колебаний (точнее — полуширина спектра) определяется с помощью соотношения

$$2F(\omega_0)\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \quad (66.01)$$

или

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{4F(\omega_0)}. \quad (66.02)$$

Действительно, при  $m = p = 0$  функция

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i(\omega - \omega_0)\tau - \frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 h(\tau)} d\tau \quad (66.03)$$

симметрична относительно точки  $\omega = \omega_0$ , где она принимает максимальное значение, поэтому определение (66.02) аналогично определению (65.01). Вычисление интеграла (66.03) затруднительно даже при  $\omega = \omega_0$ , поэтому естественно заменить корреляционную функцию  $r(\tau)$  ступенчатой функцией

$$\left. \begin{aligned} r(\tau) &= 1 \text{ при } |\tau| < \delta\tau, \\ r(\tau) &= 0 \text{ при } |\tau| > \delta\tau, \end{aligned} \right\} \quad (66.04)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} h(\tau) &= \tau^2 \quad \text{при } |\tau| < \delta\tau, \\ h(\tau) &= 2\tau\delta\tau - (\delta\tau)^2 \quad \text{при } |\tau| > \delta\tau. \end{aligned} \right\} \quad (66.05)$$

Эту замену следует рассматривать как *грубую аппроксимацию* корреляционных функций  $r(\tau)$ , соответствующих спектрам того типа, который изображен на рис. 5; в точном виде такая корреляционная функция существовать не может. Сделав такую замену, получим

$$\begin{aligned} F(\omega_0) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\delta\tau} e^{-\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 \tau^2} d\tau + e^{\frac{1}{2} n^2 \omega_0^2 (\delta\tau)^2} \int_{\delta\tau}^{\infty} e^{-n^2 \omega_0^2 \delta\tau} d\tau \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n\omega_0} \left[ P(q) + \frac{1}{q} P'(q) \right], \end{aligned} \quad (66.06)$$

где

$$P(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^q e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (66.07)$$

На рис. 57 (кривая 1) дана зависимость величины

$$\frac{\Delta\omega}{n\omega_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{P(q) + \frac{1}{q} P'(q)} \quad (66.08)$$

от параметра  $q$ . В частности, из рис. 57 видно, при каких значениях  $q$  реализуется предельный случай (65.13), а при каких — предельный случай (65.16).

На рис. 57 (кривая 2) представлена та же зависимость для корреляционной функции

$$r(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{\delta\tau}}, \quad (66.09)$$

соответствующей спектральной интенсивности

$$s(\omega) = \frac{2\delta\tau}{1 + \omega^2(\delta\tau)^2}. \quad (66.10)$$

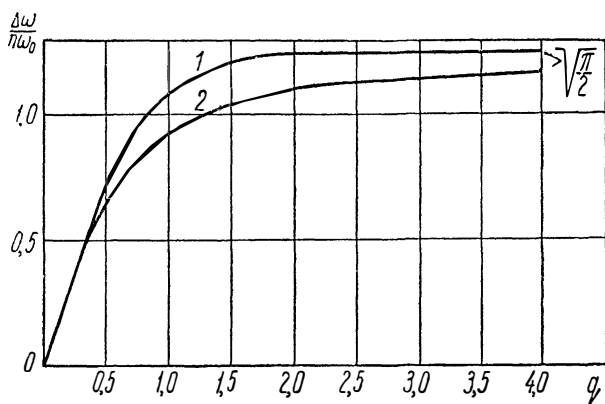


Рис. 57. Ширина спектра модулированных колебаний при частотной флюктуационной модуляции: 1 — по формуле (66.08), 2 — по формуле (66.13).

Такая интенсивность получается при пропускании «белого шума» через аperiodический контур с временем затухания  $\delta\tau$ .

В данном случае

$$h(\tau) = 2(\delta\tau)^2 (\vartheta - 1 + e^{-\vartheta}), \quad \vartheta = \frac{\tau}{\delta\tau} > 0 \quad (66.11)$$

и

$$F(\omega_0) = 2\delta\tau e^{q^2} \int_0^{\infty} e^{-q^2(\vartheta + e^{-\vartheta})} d\vartheta = 2\delta\tau e^{q^2} (q^2)^{-q^2} \int_0^{q^2} t^{q^2-1} e^{-t} dt. \quad (66.12)$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\omega}{\pi\omega_0} = \frac{\pi}{2q} \frac{e^{-q^2}(q^2)^{q^2}}{(q^2-1, q^2)!}, \quad (66.13)$$

где функция

$$(x, y)! = \int_0^y t^x e^{-t} dt \quad (66.14)$$

есть «неполный факториал», первоначально введенный при табулировании распределения  $\chi^2$  (см., например, формулы § 38 и 45). Для построения кривой 2 достаточны графики функции  $(x, y)!$ , приведенные в книге Янке и Эмде.

Кривые 1 и 2 при малых и больших  $q$  совпадают (как следует из общих рассуждений § 65), а при конечных  $q$

имеют одинаковый характер изменения. Они позволяют оценить ширину спектра флюктуационной модуляции, если известна ширина спектра модулирующих флюктуаций.

Данная глава написана на основании работы Л. А. Вайнштейна, выполненной в 1947 г. по предложению М. А. Леонтовича. Эквивалентные математические результаты получены независимо рядом других авторов в связи с самыми различными техническими и физическими задачами. В следующей главе мы применим результаты данной главы к анализу помех, обусловленных хаотическими отражениями.



## ГЛАВА XI ХАОТИЧЕСКИЕ ОТРАЖЕНИЯ

### § 67. ПОМЕХИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ХАОТИЧЕСКИМИ ОТРАЖЕНИЯМИ

В радиолокации представляют интерес помехи, получающиеся в результате отражения (или рассеяния) электромагнитных волн от капель дождя или тумана, растительности и других местных предметов — многочисленных и беспорядочно расположенных. Статистическая трактовка такого рода помех возможна и необходима вследствие их массовости: отдельная капля дождя, например, дает рассеянное поле, малое по сравнению с полем полезного сигнала, отраженного от радиолокационной «цели», и лишь в результате наложения полей от многих рассеивающих объектов получается помеха, серьезно влияющая на работу радиолокационной станции.

Ввиду беспорядочного расположения и движения отдельных рассеивателей, помехи, обусловленные хаотическими отражениями от многочисленных местных предметов, следует рассматривать в приемнике радиолокационной станции как *случайный процесс*. Этот случайный процесс неизбежно будет *нормальным*, поскольку он является суперпозицией большого числа независимых (или почти независимых) слагаемых, обусловленных полями от отдельных рассеивателей (или групп таких рассеивателей).

При теоретическом исследовании хаотических отражений мы не причисляем к ним помех от больших местных предметов, например зданий, холмов и т. п., поскольку по отношению к таким помехам статистическая постановка задачи не имеет смысла, и вместо этого нужно говорить о разделении сигналов от двух или нескольких различных объектов, о необходимой для этого разрешающей способности и т. д.

При теоретическом исследовании оптимального приемника радиолокационных сигналов на фоне хаотических отражений мы встречаемся со следующей трудностью: случайный процесс, обусловленный хаотическими отражениями, является нестационарным, а это усложняет его корреляционные свойства, делает невозможным спектральное рассмотрение и т. д. В самом деле, при облучении облака рассеивателей последовательностью  $L$  импульсов (рис. 58,а) мы принимаем случайный процесс, охватывающий лишь часть  $L$  периодов повторения и вовсе отсут-

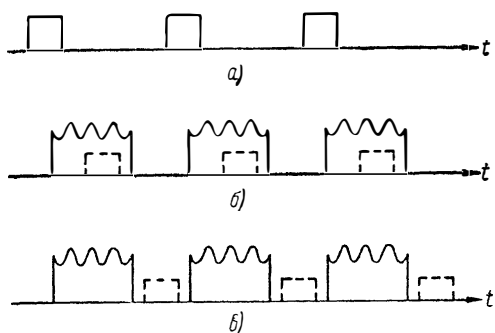


Рис. 58. Радиолокационные сигналы на фоне хаотических отражений.

ствующий в промежутки времени до и после этих  $L$  периодов (рис. 58,б). Нестационарность данного случайного процесса вызвана двумя причинами: 1) конечной протяженностью части пространства, занятой рассеивателями (или неоднородностью их расположения); 2) конечной длительностью зондирующего радиолокационного сигнала (или, что то же, его нестационарностью — неоднородностью во времени).

Однако отмеченную трудность легко преодолеть. В самом деле, проблема выделения полезного сигнала на фоне хаотических отражений возникает тогда, когда этот сигнал приходит одновременно с помехой (как пунктирные импульсы на рис. 58,б). Эта проблема по существу не подвергается изменению, если мы представим себе, что случайный процесс с теми же вероятностными свойствами «аналитически продолжается» на весь период повторения (без каких-либо пустых промежутков времени) и далее на весь бесконечный интервал времени —  $-\infty < t < \infty$ . При

этом мы по-прежнему считаем полезный сигнал присутствующим лишь в соответствующих частях исходных  $L$  периодов повторения и ставим вопрос об его оптимальном выделении на фоне стационарного случайного процесса, определенного выше. Заметим, что при анализе того же вопроса для импульсов, приходящих в моменты времени, когда помех нет (рис. 58,в) или когда они имеют иную интенсивность или иные корреляционные свойства (рассеиватели в другой части пространства), нужно эти помехи рассматривать как *другой* стационарный случайный процесс.

Что физически означает описанное выше «аналитическое продолжение» помех, приводящее к стационарным случайным процессам? Наблюдаемая на опыте помеха (рис. 58,б) обусловлена пространственной областью  $a$  конечных размеров; обозначим эту помеху через  $n_a(t)$ . Дополним эту область  $a$  мысленно другой, воображаемой областью  $b$ , также заполненной рассеивателями; пусть последняя простирается от минимальных до максимальных расстояний, на которых радиолокационная станция ведет наблюдение, причем с такой плотностью частиц (вообще говоря, переменной), что при облучении бесконечной периодической последовательностью импульсов (или иных зондирующих радиолокационных сигналов) помеха  $n_{a+b}(t)$  от суммарной области является стационарным случайным процессом. Поскольку данная нам помеха равна

$$n_a(t) = n_{a+b}(t) - n_b(t), \quad (67.01)$$

где помеха  $n_b(t)$  от «дополнительной» области  $b$  на радиолокационное обнаружение в пределах области  $a$  не влияет, то вместо рассмотрения помехи  $n_a(t)$  мы переходим к рассмотрению помехи  $n_{a+b}(t)$ .

Существенно, что процесс  $n_{a+b}(t)$ , получается в результате периодически повторяющегося облучения области  $a+b$ . Это значит, что при вычислении корреляционной функции и спектральной интенсивности случайного процесса  $n_{a+b}(t)$  мы должны считать, что область  $a+b$  облучается в течение  $L$  периодов повторения, а все время, т. е. мы должны «аналитически продолжать» облучающую волну (но не принимаемый полезный сигнал!) на весь бесконечный интервал времени  $-\infty < t < \infty$ .

Из физических соображений автокорреляционную функцию  $R_n(\tau)$  для стационарного случайного процесса  $n(t)$ , соответ-

ствующего хаотическим отражениям, можно написать в виде

$$R_n(\tau) = R_p(\tau)r(\tau), \quad (67.02)$$

где  $R_p(\tau)$  есть периодическая функция  $\tau$  с периодом повторения  $T$

$$R_p(\tau \pm T) = R_p(\tau), \quad (67.03)$$

а  $r(\tau)$  есть медленно меняющаяся функция, удовлетворяющая условию

$$r(0) = 1. \quad (67.04)$$

Смысл формулы (67.02) очень прост. Предположим сначала, что все рассеивающие частицы неподвижны, тогда при периодичности излучаемого сигнала процесс  $n(t)$  также будет периодическим (хотя в пределах каждого периода повторения  $T$  он случаен). Автокорреляционная функция такого процесса  $R_p(\tau)$  также будет периодической функцией  $\tau$ , как это показано в формуле (67.03). Действительно, помеху  $n(t)$  в этом случае можно разложить в ряд Фурье

$$n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \cos(k\omega_1 t - \vartheta_k), \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad (67.05)$$

т. е. представить в виде наложения монохроматических процессов вида (6.01), но со случайными значениями  $e_k$  и  $\vartheta_k$ . Рассматривая монохроматический процесс как предельный случай квазимонохроматического, мы получим автокорреляционную функцию для процесса (67.05) в виде суммы выражений типа (6.10), т. е. придем к функции

$$R_p(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \cos k\omega_1 \tau, \quad (67.06)$$

где положительные коэффициенты  $P_k$  равны

$$P_k = \frac{1}{2} \overline{e_k^2}. \quad (67.07)$$

На самом деле частицы, вообще говоря, перемещаются. Если считать, что частицы движутся лишь хаотически и не обладают какой-либо средней скоростью, то через промежуток времени  $T$  имеет место несколько иное (случайно изменившееся) расположение частиц, благодаря чему

функция корреляции медленно уменьшается при  $|\tau| \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство как раз учитывается множителем  $r(\tau)$  в формуле (67.02).

Если радиолокационный сигнал представляет собой последовательность когерентных прямоугольных импульсов продолжительностью  $T_0 \ll T$ , то функция (67.06) дает периодическую последовательность треугольных «радиоимпульсов корреляции», один из которых изображен на рис. 21. Функцию  $r(\tau)$  обычно можно считать постоянной на протяжении отрезков времени порядка  $T_0$ , так что  $r(\tau)$  является как бы междупериодным коэффициентом корреляции, характеризующим статистическую связь между значениями  $n(t)$  в моменты  $t, t \pm T, t \pm 2T$  и т. д.

Вычислим спектральную интенсивность помехи  $n(t)$ , имеющей корреляционную функцию (67.02). Мы имеем:

$$S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} R_p(\tau) r(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \cos k\omega_1\tau r(\tau) d\tau = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} P_k \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\omega - k\omega_1)\tau} + e^{i(\omega + k\omega_1)\tau}] r(\tau) d\tau. \quad (67.08)$$

Если ввести обозначение

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} r(\tau) d\tau, \quad (67.09)$$

то формулу (67.08) можно записать в виде

$$S_n(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} P_k [s(\omega - k\omega_1) + s(\omega + k\omega_1)]. \quad (67.10)$$

Таким образом, благодаря хаотическому движению частиц линейчатый спектр периодического сигнала, сосредоточенный в частотах  $\omega = \pm k\omega_1$ , переходит в непрерывный спектр, так как каждая линия «расплывается» вполне определенным образом, зависящим от вида функции (67.09).

Отметим, что при облучении облака рассеивающих частиц последовательностью некогерентных импульсов (ср. § 21) автокорреляционная функция хаотических отражений равна

$$\left. \begin{aligned} R_n(\tau) &= R_p(\tau) \quad \text{при} \quad -T_0 < \tau < T_0, \\ R_n(\tau) &= 0 \quad \text{при} \quad |\tau| > T_0, \end{aligned} \right\} \quad (67.11)$$

где  $T_0$ —длительность импульса. В самом деле, при  $|\tau| < T_0$  автокорреляционная функция при облучении рассеивающего объема когерентными и некогерентными импульсами одна и та же, поскольку при таких значениях  $\tau$  проявляется лишь статистическая связь значений случайного процесса  $n(t)$  от одного и того же импульса. Поэтому при таких  $\tau$  можно применять формулу (67.02), заменяя в ней множитель  $r(\tau)$  на единицу. При больших  $\tau$  (например, при  $\tau \approx \pm T, \pm 2T$  и т. д.) мы, очевидно, имеем  $R_n(\tau) = 0$ , поскольку даже при неподвижных рассеивателях корреляция между отраженными импульсами отсутствует (так как фаза излучаемых импульсов случайна и при приеме не используется). Окончательно функция  $R_n(\tau)$  сводится к одному треугольному корреляционному импульсу с высокочастотным заполнением (см. рис. 21), а спектральная интенсивность помех определяется формулой (21.01).

Ниже мы детализируем физический смысл выписанных в этом параграфе формул, в частности покажем, что функция  $s(\omega)$  просто связана с распределением рассеивающих частиц по скоростям. Будет также дано обобщение выведенных выше формул, в частности учтено среднее движение частиц относительно передающей и приемной антенн, приводящее к смещению частоты принимаемых волн (эффект Доплера). При этом следует отметить, что теория оптимального приемника радиолокационных сигналов при наличии хаотических отражений, развитая в данной книге, целиком основывается на выражении (67.02) для корреляционной функции помех.

Основным отличием помех, обусловленных хаотическими отражениями, от собственных шумов приемника является наличие сильной корреляционной связи, просиграющей, по крайней мере, на несколько периодов повторения: эта связь определяется множителем  $r(\tau)$  в формуле (67.02). Если время корреляции  $\Delta\tau$  (т. е. эффективная ширина функции  $r(\tau)$ ) равно

$$\Delta\tau \sim L_0 T, \quad (67.12)$$

то согласно соотношению (3.28) ширина спектральной функции  $s(\omega)$ , т. е. ширина каждой спектральной линии в формуле (67.10), будет (по порядку величины) равна

$$\Delta\omega \sim \frac{\omega_1}{L_0}. \quad (67.13)$$

При  $L_0 \gg 1$  мы имеем помеху, не успевающую заметно измениться за время  $T$  и эффективно компенсируемую черес-

периодным вычитанием; ширина каждой „линии“ в спектре (67.10) мала по сравнению с расстройением между ними.

Если же  $L_0 \lesssim 1$ , то мы имеем „быстро меняющуюся“ помеху, которая через промежуток времени  $T$  будет уже существенно иной. В этом случае  $\Delta\omega \gtrsim \omega_1$ , т. е. спектральная интенсивность (67.10) соответствует сплошному спектру, в котором сигнальные линии  $\omega = \pm k\omega_1$  взаимно перекрываются.

Полное отсутствие корреляции между различными периодами повторения будет иметь место при некогерентности импульсов [см. выше формулу (67.11)]. Однако в последнем случае хаотические отражения уже не дают нормального случайного процесса: вследствие некогерентности зондирующих сигналов фазы помехи в различных периодах повторения будут независимы, междупериодная корреляция исчезает, но амплитуды будут иметь ту же статистическую связь, что и при когерентности сигналов. В этом — важное отличие хаотических отражений при некогерентных сигналах от помех, не обладающих междупериодной корреляцией по естественным причинам, например от собственных шумов приемника или от рассмотренной выше быстро меняющейся помехи.

В гл. VII мы рассмотрели радиолокационный сигнал от мерцающей цели, получающийся в результате сложения полей от многих «светящихся точек», сочетающих регулярное поступательное движение со случайными колебаниями. Та же модель применима и для описания помехи, обусловленной хаотическими отражениями, с тем лишь отличием, что размеры пространственной области, занятой рассеивателями, обычно значительно превосходят размеры радиолокационной цели; поэтому помеха растянута во времени настолько, что ее целесообразно упрощать, как мы это делали выше, стационарному случайному процессу. Однако при исследовании междупериодных статистических связей пачка когерентных сигналов от мерцающей цели и помеха, обусловленная их хаотическими отражениями, входят во все теоретические соотношения вполне симметрично, как это мы видели в § 43 и 47—49.

В теории обнаружения некогерентной пачки на фоне коррелированных помех мы для простоты ограничивались нормальными помехами, являющимися в различных периодах повторения не только некоррелированными, но и статистически независимыми. Таким образом, изложенная в гл. VI и VII теория оптимального приемника для некоге-

рентной пачки сигналов охватывает собственные шумы приемника и «быстро меняющуюся» помеху от хаотических отражений (аналогичную сигналу от быстро мерцающей цели). Хаотические отражения, обладающие сильной междупериодной корреляцией по амплитуде и независимыми фазами, насколько нам известно, еще не рассматривались. Исследование приема некогерентных сигналов на фоне таких хаотических отражений должно, очевидно, базироваться на применении формул § 60 к помехе, в то время как в § 44 и 45 они применялись только к полезным сигналам.

### § 68. ЯВЛЕНИЕ ДОППЛЕРА

При рассеянии электромагнитных волн на движущемся теле ее частота изменяется благодаря явлению Допплера. Поскольку в учебниках физики явление Допплера рассматривается обычно для волн, излучаемых (а не рассеиваемых) движущимся телом, мы рассмотрим здесь для полноты явление Допплера в радиолокации. При этом мы будем пользоваться основными положениями теории относительности и лишь потом рассмотрим более элементарный вывод.

Пусть в системе координат  $x, y, z$  наблюдается некоторое отражающее тело  $K$ , движущееся с постоянной скоростью  $v$ . Совместим с телом  $K$  систему координат  $x', y', z'$ ; не ограничивая себя в общности, мы можем считать, что ось  $x$  направлена параллельно скорости тела и параллельно оси  $x'$ , а оси  $y$  и  $y'$ ,  $z$  и  $z'$  также параллельны. Преобразование Лоренца связывает между собой координаты  $x, y, z$  и время  $t$  в неподвижной системе с координатами  $x', y', z'$  и временем  $t'$  в системе, движущейся вместе с телом  $K$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (68.01)$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (68.02)$$

При этом предполагается, что в момент начала отсчета времени ( $t = t' = 0$ ) начала координатных систем  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  совпадают. Обратное преобразование Лоренца имеет вид

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (68.03)$$



Пусть передающая антенна  $A$ , жестко связанная с системой  $x, y, z$ , облучает монохроматической электромагнитной волной тело  $K$ . На достаточно большом расстоянии от антенны эту волну можно рассматривать как плоскую. Если ось  $y$  выбрать так, чтобы направление распространения этой волны лежало в плоскости  $x, y$  (рис. 59), то фаза волны будет равна

$$\Phi = k(x \cos \varphi + y \sin \varphi) - \omega t \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right). \quad (68.04)$$

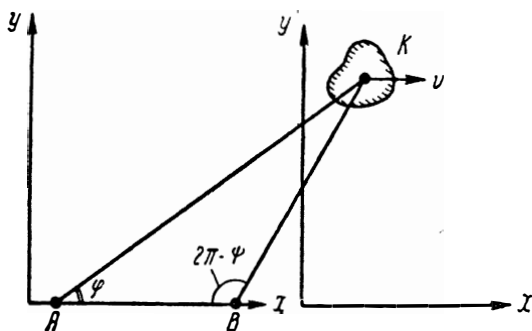


Рис. 59. К расчету явления Допплера.

Эта величина остается инвариантной при преобразовании Лоренца, поэтому в системе  $x', y', z', t'$  будем иметь

$$\Phi = k'(\cos \varphi' + y' \sin \varphi') - \omega' t'. \quad (68.05)$$

Приравняв выражения (68.04) и (68.05) и пользуясь формулами (68.03), получаем

$$k' \cos \varphi' = k \frac{\cos \varphi - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k' \sin \varphi' = k \sin \varphi \quad (68.06)$$

и

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (68.07)$$

Последнее соотношение дает нам частоту волны в движущейся системе координат. Исключая из соотношений (68.06)  $k'$  и  $\varphi'$ , получаем

$$k' = \frac{\omega'}{c}, \quad \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \beta}{1 - \beta \cos \varphi}, \quad \sin \varphi' = \frac{\sin \varphi \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \varphi}. \quad (68.08)$$

Падающая волна с фазой (68.05) рассеивается на теле  $K$ , неподвижном в системе координат  $x', y', z'$ . Если рассматривать рассеянную волну, распространяющуюся в плоскости  $x', y'$  под углом  $\psi'$  к оси  $x'$ , то в достаточном удалении от тела  $K$  она является плоской волной с фазой

$$\Psi = k'(x' \cos \psi' + y' \sin \psi') - \omega' t' \quad \left(k' = \frac{\omega'}{c'}\right). \quad (68.09)$$

В системе координат  $x, y, z$  эта фаза представляется в виде

$$\Psi = k_*(x \cos \psi + y \sin \psi) - \omega_* t. \quad (68.10)$$

Сравнивая эти выражения и применяя преобразования Лоренца (68.01), получаем

$$k_* \cos \psi = k' \frac{\cos \psi' + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k_* \sin \psi = k' \sin \psi' \quad (68.11)$$

и

$$\omega_* = \omega' \frac{1 + \beta \cos \psi'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (68.12)$$

Соотношения (68.11) дают

$$\left. \begin{aligned} k_* &= \frac{\omega_*}{c}, \quad \cos \psi = \frac{\cos \psi' + \beta}{1 + \beta \cos \psi'}, \quad \sin \psi = \frac{\sin \psi' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \psi'} \\ \cos \psi' &= \frac{\cos \psi - \beta}{1 - \beta \cos \psi}, \end{aligned} \right\} \quad (68.13)$$

поэтому формулу (68.12) можно переписать в виде

$$\omega_* = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \psi}. \quad (68.14)$$

Используя формулу (68.07), окончательно получаем выражение для частоты волны, приходящей к приемной антенне

$$\omega_* = \omega \frac{1 - \beta \cos \varphi}{1 - \beta \cos \psi}. \quad (68.15)$$

Если передающая антенна  $A$  совмещена с приемной антенной  $B$ , то  $\psi = \pi + \varphi$  и

$$\omega_* = \omega \frac{1 - \beta \cos \varphi}{1 + \beta \cos \varphi}. \quad (68.16)$$

Мы видим, что в этом случае изменение частоты определяется радиальной составляющей скорости, поскольку (ср. рис. 59)

$$\beta \cos \varphi = \frac{v \cos \varphi}{c} = \frac{v_r}{c}. \quad (68.17)$$

При  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  мы имеем  $\omega_* = \omega$ , т. е. частота не изменяется.

При  $\beta \ll 1$  формулу (68.16) можно переписать в более простом виде

$$\omega_* \approx \omega (1 - 2\beta \cos \varphi) \approx \frac{\omega}{1 + 2\beta \cos \varphi}. \quad (68.18)$$

Дадим теперь элементарный, хотя и нестрогий вывод формулы (68.16) при  $\varphi = 0$ . Для этого рассмотрим отражение плоской волны

$$E_y^0 = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad (68.19)$$

распространяющейся в направлении оси  $x$ , от плоского идеально проводящего зеркала, перпендикулярного оси  $x$  и движущегося со скоростью  $v$  вдоль нее, так что в момент  $t$  зеркало имеет абсциссу

$$x = vt. \quad (68.20)$$

Волну, отраженную от зеркала, мы будем искать в виде

$$E_y' = -E_0 \cos \omega_* \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (68.21)$$

с неизвестной частотой  $\omega_*$ . Поскольку на зеркале должно выполняться граничное условие

$$E_y^0 + E_y' = 0 \text{ при } x = vt, \quad (68.22)$$

мы приходим к соотношению

$$\cos \omega (1 - \beta)t = \cos \omega_* (1 + \beta)t, \quad (68.23)$$

которое может удовлетворяться при любых  $t$ , если только частота  $\omega_*$  отраженной волны равна

$$\omega_* = \omega \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad (68.24)$$

что полностью согласуется с формулой (68.16). Последнюю формулу можно получить и при  $\varphi = \pi$ , заставляя зеркало двигаться в отрицательном направлении оси  $x$  и, сле-

довательно, заменяя в формуле (68.20)  $v$  на  $-v$ , а в формуле (68.24)  $\beta$  на  $-\beta$ . Наконец, при движении зеркала перпендикулярно к оси  $x$ , когда оно остается в одном и том же положении на оси  $x$ , изменения частоты при отражении происходить не должно, в полном соответствии с формулой (68.16).

Явление Доплера для немонохроматических волн рассмотрено в приложении IV.

### § 69. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ПОМЕХИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ХАОТИЧЕСКИМИ ОТРАЖЕНИЯМИ

Пусть хаотически расположенные частицы (рассеиватели) облучаются волной, переносящей случайную функцию  $m(t)$ , спектральная интенсивность которой есть  $S_m(\omega)$ . Рассеиватель с номером  $\alpha$  создает отраженный сигнал, соответствующий случайному процессу  $n_\alpha(t)$  со спектральной интенсивностью  $S_{n_\alpha}(\omega)$ . Совокупность всех таких сигналов и создает помеху работе радиолокатора. Если обозначить через  $\eta_\alpha$  величину

$$\eta_\alpha = 2\beta_\alpha \cos \varphi_\alpha = \frac{2v_{r\alpha}}{c}, \quad (69.01)$$

где  $v_{r\alpha}$  — радиальная скорость  $\alpha$ -го рассеивателя, то спектральная интенсивность  $S_{n_\alpha}(\omega)$  будет равна

$$S_{n_\alpha}(\omega) = \Gamma_\alpha S_m[\omega(1 + \eta_\alpha)], \quad (69.02)$$

где  $\Gamma_\alpha$  — постоянный коэффициент, зависящий от отражательной способности данной частицы, ее ориентации и расстояния до нее, а  $S_m(\omega)$  — спектральная интенсивность излучаемого сигнала.

При полезном сигнале, занимающем достаточно узкую полосу частот

$$\Delta\omega \ll \omega_0 \quad (\omega_0 \text{ — несущая частота}), \quad (69.03)$$

и при значениях  $\eta_\alpha$ , удовлетворяющих условию

$$|\eta_\alpha| \ll 1, \quad (69.04)$$

формулу (69.02) можно переписать так:

$$S_{n_\alpha}(\omega) = \Gamma_\alpha S_m(\omega + \zeta_\alpha), \quad (69.05)$$

где  $\zeta_\alpha = \omega_0 \eta_\alpha$  и мы пренебрегли произведением малых величин  $\eta_\alpha \Delta\omega$ . Формула (69.05) показывает, что при отражении от  $\alpha$ -й частицы спектр смещается из-за явления Доплера на  $\zeta_\alpha$ , не изменяя своей формы. При тех же условиях коэффициент  $\Gamma_\alpha$  в формуле (69.05) можно считать не зависящим от частоты  $\omega$ . Заметим, что на практике условия (69.03) и (69.04) можно всегда считать выполненными.

Вследствие беспорядочного расположения частиц в пространстве отраженные от них сигналы складываются некогерентно, так что полная спектральная интенсивность помехи равна

$$S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega + \zeta) W(\zeta) d\zeta, \quad (69.06)$$

где  $W(\zeta) d\zeta$  дает нам интенсивность отражений от рассеивателей, обуславливающих смещение частоты в интервале  $(\zeta, \zeta + d\zeta)$ . Функция  $W$  определяет распределение частиц по радиальным скоростям: ее часто можно считать „колоколообразной“ функцией (подобной функции распределения Максвелла, определяющей распределение молекул по скоростям), максимум которой соответствует некоторой средней скорости движения частиц „в целом“. Если „разброс“ значений  $\zeta$  вокруг наиболее вероятного значения  $\bar{\zeta}$  достаточно мал по сравнению с шириной полосы  $\Delta\omega$ , то в формуле (69.05) множитель  $S_m(\omega + \zeta)$  можно вынести за знак интеграла, положив в нем  $\zeta = \bar{\zeta}$ , и мы получим более простую формулу

$$S_n(\omega) = S_m(\omega + \bar{\zeta}), \quad (69.07)$$

переходящую при  $\bar{\zeta} = 0$  в выражение

$$S_n(\omega) = S_m(\omega). \quad (69.08)$$

Здесь и в дальнейшем мы для простоты нормируем  $S_m(\omega)$  и  $W(\zeta)$  так, что выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\zeta) d\zeta = 1. \quad (69.09)$$

Если далее для функции  $S_m(\omega)$  подставить выражение (12.14), соответствующее некогерентной последовательно-

сти импульсов произвольной формы, то формула (69.07) примет вид

$$S_n(\omega) = \sigma |M(\omega + \bar{\zeta})|^2, \quad (69.10)$$

а формула (69.08) даст выражение

$$S_n(\omega) = \sigma |M(\omega)|^2, \quad (69.11)$$

которое было использовано в § 21. Оно соответствует неподвижным случайно расположенным частицам, в то время как формула (69.07) соответствует частицам, движущимся как твердое тело, а формула (69.06) — частицам, беспорядочно движущимся друг относительно друга.

Выведем выражение для корреляционной функции, соответствующей спектральной интенсивности (69.06) и периодической функции  $m(t)$ , которую можно считать предельной формой случайного процесса. Предположим сначала функцию  $W(\zeta)$  четной, т. е.

$$W(-\zeta) = W(\zeta). \quad (69.12)$$

Тогда

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_n(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_m(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta\tau} W(\zeta) d\zeta. \quad (69.13)$$

Если ввести обозначения

$$R_m(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_m(\omega) d\omega, \quad (69.14)$$

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta\tau} W(\zeta) d\zeta, \quad (69.15)$$

то окончательно получаем

$$R_n(\tau) = R_m(\tau) r(\tau), \quad (69.16)$$

где  $R_m(\tau)$  есть периодическая функция  $\tau$ , обусловленная отражением периодически повторяющегося сигнала от совершенно неподвижной совокупности частиц, а  $r(\tau)$  — коэффициент корреляции, обусловленный хаотическим движением частиц, причем  $r(0) = 1$  в силу условия (69.09).

Если условие (69.12) не выполняется, то функция  $r(\tau)$  не является четной и формула (69.16) нуждается в уточ-

нении. В этом случае нужно учесть, что формула (69.05) справедлива лишь при  $\omega > 0$ , а при  $\omega < 0$  спектральную интенсивность нужно вычислять с помощью соотношения

$$S_n(-\omega) = S_n(\omega). \quad (69.17)$$

Автокорреляционная функция поэтому равна

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_n(\omega) d\omega = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} S_n(\omega) d\omega = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\zeta) d\zeta \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} S_m(\omega + \zeta) d\omega = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta\tau} W(\zeta) d\zeta \int_{-\zeta}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_m(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (69.18)$$

Учитывая условие (69.03), можно заменить во внутреннем интеграле нижний предел  $-\zeta$  на 0 и ввести вместо функции (69.14) новую комплексную функцию

$$R_m(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} S_m(\omega) d\omega, \quad (69.19)$$

не являющуюся уже функцией корреляции. Обозначим через  $\bar{\zeta}$  смещение частоты, обусловленное средним движением частиц

$$\bar{\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta W(\zeta) d\zeta \quad (69.20)$$

и положим

$$W(\zeta) = W_0(\zeta - \bar{\zeta}) \quad (69.21)$$

и

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta\tau} W_0(\zeta) d\zeta, \quad r(0) = 1, \quad (69.22)$$

так что новая комплексная функция  $r(\tau)$  обусловлена распределением скоростей частиц в системе координат, движущейся со средней скоростью частиц. Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta\tau} W(\zeta) d\zeta = r(\tau) e^{-i\bar{\zeta}\tau}, \quad (69.23)$$

мы можем записать формулу (69.18) в виде

$$R_n(\tau) = \text{Re} \{ R_m(\tau) r(\tau) e^{-i\bar{\tau}\zeta} \}. \quad (69.24)$$

Если движением частиц в целом можно пренебречь ( $\bar{\zeta} = 0$ ) и если к тому же функция  $W_0(\zeta)$  является четной, то функция  $r(\tau)$  становится четной и вещественной, и мы получаем простую формулу

$$R_n(\tau) = R_p(\tau) r(\tau), \quad (69.25)$$

эквивалентную формулам (67.02) и (69.16). Первый множитель

$$R_p(\tau) = \text{Re} R_m(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_m(\omega) d\omega \quad (69.26)$$

является периодической функцией  $\tau$ ; второй множитель дает дополнительное спадание корреляционной функции  $R_n(\tau)$  во времени, обусловленное беспорядочным движением (разбросом скоростей) частиц. Если распределение частиц по скоростям—функция  $W_0(\zeta)$ —имеет колоколообразную форму с шириной  $\Delta\zeta$  (ср. конец § 3), то множитель  $r(\tau)$  заметно спадает при  $\tau$ , равных или больших времени корреляции

$$\Delta\tau \sim \frac{1}{\Delta\zeta}. \quad (69.27)$$

В зависимости от соотношения между  $\Delta\tau$  и периодом повторения  $T$  характер помехи будет различным (ср. конец § 67).

Если перейти к дискретным выборкам—по  $H$  выборок в каждом из  $L$  периодов повторения, то функция корреляции помехи, обусловленной хаотическими отражениями, будет согласно формуле (69.24) равна

$$\overline{n_{g^x} n_{h\lambda}} = \text{Re} \{ R_{gh} r_{x\lambda} e^{i(x-\lambda)\Delta\phi} \}, \quad (69.28)$$

где

$$R_{gh} = R_m((h-g)\Delta t), \quad g, h = 1, \dots, H \quad (69.29)$$

есть комплексная функция внутрипериодной корреляции,

$$r_{x\lambda} = r((\lambda-x)T), \quad r_{xx} = 1, \quad x, \lambda = 1, \dots, L \quad (69.30)$$



— комплексный коэффициент междупериодной корреляции, который можно считать постоянным на протяжении времени внутривнутрипериодной корреляции, а

$$\Delta\psi = \bar{\zeta}T \quad (69.31)$$

— приращение фазы, обусловленное упорядоченным движением частиц как целого. Поскольку функции (69.19) и (69.22) удовлетворяют соотношениям

$$R_m(-\tau) = R_m^*(\tau), \quad r(-\tau) = r^*(\tau), \quad (69.32)$$

то

$$R_{hg} = R_{gh}^*, \quad r_{\lambda x} = r_{x\lambda}^* \quad (69.33)$$

и матрицы  $\|R_{gh}\|$  и  $\|r_{x\lambda}\|$  являются эрмитовыми.

## § 70. РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН НА БЛУЖДАЮЩИХ ЧАСТИЦАХ

Рассеяние радиоволн на хаотически движущихся частицах можно исследовать с более общей точки зрения. К сожалению, этот более общий подход эффективен лишь для монохроматического излучения, так что его приходится использовать наряду с формулами § 69.

Представим себе, что монохроматическая электромагнитная волна частоты  $\omega_0$  рассеивается на беспорядочно движущихся частицах (рассеивателях). Рассеянная волна, поступающая в приемную антенну  $B$ , дает помеху

$$n(t) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \cos(\omega_0 t - \Theta_{\alpha}), \quad (70.01)$$

где коэффициент  $\gamma_{\alpha}$  определяет амплитуду волны, переизлучаемой в направлении  $B$  частицей с номером  $\alpha$ , а  $\Theta_{\alpha}$  есть фаза этой волны, зависящей от расстояния между частицей и передающей антенной  $A$ , от расстояния между частицей и приемной антенной  $B$ , а также от рассеивающих свойств частицы. Суммирование производится по всем частицам, попавшим в «рассеивающий объем»  $V$ , образованный пересечением главных лучей антенн  $A$  и  $B$  (рис. 60).

Выберем в рассеивающем объеме некоторый «центр»  $O$  и обозначим через  $\vartheta$  угол  $AOB$  (так что при совмещении приемной антенны с передающей мы получаем  $\vartheta = 0$ ). Обозначая через  $P_{\alpha}$  центр  $\alpha$ -го рассеивателя, введем углы

$$\chi_{\alpha} = \angle AOP_{\alpha}, \quad \chi'_{\alpha} = \angle BOP_{\alpha}. \quad (70.02)$$

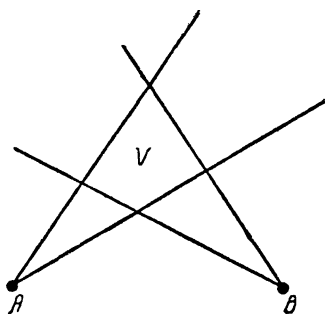


Рис. 60. Рассеивающий объем.

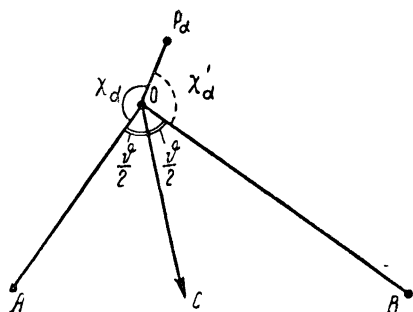


Рис. 61. К расчету рассеяния на блуждающих частицах.

Если обозначить через  $\rho_\alpha$  радиус-вектор  $OP_\alpha$  (см. рис. 61), то при условиях

$$AO \gg \rho_\alpha, \quad AO \gg k\rho_\alpha^2, \quad BO \gg \rho_\alpha, \quad BO \gg k\rho_\alpha^2 \quad (70.03)$$

расстояния точки  $P_\alpha$  до антенн  $A$  и  $B$  по теореме косинусов можно записать в виде

$$AP_\alpha = AO - \rho_\alpha \cos \chi_\alpha, \quad BP_\alpha = BO - \rho_\alpha \cos \chi'_\alpha \quad (70.04)$$

и фаза  $\Theta_\alpha$  в формуле (70.01) равна

$$\Theta_\alpha = k(AO + BO) - k\rho_\alpha(\cos \chi_\alpha + \cos \chi'_\alpha) + \delta_\alpha \quad \left(k = \frac{\omega_a}{c}\right), \quad (70.05)$$

где слагаемое  $\delta_\alpha$  определяется уже самим рассеивателем, а не его положением. При движении рассеивателя расстояния  $\rho_\alpha$  и углы  $\chi_\alpha$  и  $\chi'_\alpha$  меняются, поэтому фаза  $\Theta_\alpha$  зависит от  $t$ . Обозначая постоянную (не зависящую от  $t$ ) часть фазы через  $\Theta_\alpha^0$ , можно переписать формулу (70.05) в виде

$$\Theta_\alpha = \Theta_\alpha^0 - 2k\rho_\alpha \cos \frac{\chi'_\alpha - \chi_\alpha}{2} \cos \frac{\chi'_\alpha + \chi_\alpha}{2}. \quad (70.06)$$

Из рис. 61 имеем

$$\begin{aligned} \chi'_\alpha + \chi_\alpha &= 2\pi - \vartheta, \quad \angle COP_\alpha = \frac{\vartheta}{2} + \chi'_\alpha = \\ &= 2\pi - \frac{\vartheta}{2} - \chi_\alpha = \pi + \frac{\chi'_\alpha - \chi_\alpha}{2}, \end{aligned} \quad (70.07)$$

так что формулу (70.06) можно переписать так:

$$\Theta_{\alpha} = \Theta_{\alpha}^0 - 2k\xi_{\alpha} \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad (70.08)$$

где

$$\xi_{\alpha} = -\rho_{\alpha} \cos \frac{\chi_{\alpha}' - \chi_{\alpha}}{2} = \rho_{\alpha} \cos \angle COP_{\alpha} \quad (70.09)$$

есть проекция радиуса вектора  $OP_{\alpha}$  на линию  $OC$ —биссектрису угла  $AOB$ .

Вычислим теперь корреляционную функцию случайного процесса  $n(t)$

$$\begin{aligned} \overline{n(t)n(t-\tau)} &= \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \overline{\cos [\omega_0 t - \Theta_{\alpha}(t)] \cos [\omega_0(t-\tau) - \Theta_{\beta}(t-\tau)]} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \overline{\cos [\omega_0 \tau - \Theta_{\alpha}(t) + \Theta_{\beta}(t-\tau)]} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \overline{\cos [2\omega_0 t - \omega_0 \tau - \Theta_{\alpha}(t) - \Theta_{\beta}(t-\tau)]}. \quad (70.10) \end{aligned}$$

Необходимость статистического подхода к функции  $n(t)$  обусловлена, во-первых, беспорядочным расположением рассеивателей в любой момент времени (скажем, в момент  $t$ ) и, во-вторых, их случайным движением — „блужданием“ — с течением времени (скажем, в промежуток от  $t-\tau$  до  $t$ ). По формуле (70.08) имеем

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha}(t) &= \Theta_{\alpha}(t-\tau) - 2k \cos \frac{\vartheta}{2} [\xi_{\alpha}(t) - \xi_{\alpha}(t-\tau)] = \\ &= \Theta_{\alpha}(t-\tau) - 2k \cos \frac{\vartheta}{2} \int_{t-\tau}^t v_{\alpha}(s) ds, \quad (70.11) \end{aligned}$$

где  $v_{\alpha}$  — составляющая скорости  $\alpha$ -го рассеивателя в направлении биссектрисы  $OC$ . Предполагая полную беспорядочность расположения рассеивателей в момент  $t$ , мы получим

$$\left. \begin{aligned} \overline{\cos [\omega_0 \tau - \Theta_{\alpha}(t) + \Theta_{\beta}(t-\tau)]} &= 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \\ \overline{\cos [2\omega_0 t - \omega_0 \tau - \Theta_{\alpha}(t) - \Theta_{\beta}(t-\tau)]} &= 0 \\ &\text{при любых } \alpha \text{ и } \beta. \end{aligned} \right\} \quad (70.12)$$

Первое из написанных соотношений при  $\alpha = \beta$  несправедливо, поскольку в этом случае по формуле (70.11) в квадратной скобке будет стоять разность

$$\Theta_{\alpha}(t) - \Theta_{\alpha}(t - \tau) = -2k \cos \frac{\vartheta}{2} \int_{t-\tau}^t v_{\alpha}(s) ds, \quad (70.13)$$

так что случайно распределенные фазы  $\Theta_{\alpha}(t)$  и  $\Theta_{\beta}(t)$  сокращаются, и статистическое среднее не равно нулю. Поэтому формула (70.10) принимает вид

$$\overline{n(t) n(t - \tau)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}^2 \cos \left[ \omega_0 \tau + 2k \cos \frac{\vartheta}{2} \int_{t-\tau}^t v_{\alpha}(s) ds. \right] \quad (70.14)$$

Сделаем далее третье упрощающее предположение: будем считать, что скорость  $v_{\alpha}(t)$  есть стационарная случайная функция времени, свойства которой одинаковы для всех частиц в данном рассеивающем объеме. Тогда в формуле (70.14) можно заменить

$$\int_{t-\tau}^t v_{\alpha}(s) ds \text{ на } \int_0^{\tau} v(t) dt, \quad (70.15)$$

и формула (70.14) упрощается следующим образом:

$$R_n(\tau) = \overline{n(t) n(t - \tau)} = \frac{\sum \gamma_{\alpha}^2}{2} \overline{\cos \left[ \omega_0 \tau + 2k \cos \frac{\vartheta}{2} \int_0^{\tau} v(t) dt \right]}. \quad (70.16)$$

Мы видим, что вычисление корреляционной функции помех математически эквивалентно вычислению корреляционной функции источника синусоидальных колебаний, модулируемого по частоте некоторым случайным процессом. Роль модулирующей функции играет случайная скорость частицы  $v(t)$ , которую можно представить в виде

$$v(t) = \bar{v} + \Delta v(t), \quad (70.17)$$

где не зависящая от  $t$  скорость  $\bar{v}$  есть средняя скорость частиц — скорость перемещения их как целого, а  $\Delta v$  есть случайная скорость частиц, среднее значение которой равно нулю.

Подставляя выражение (70.17) в формулу (70.16), получаем

$$R_n(\tau) = \frac{\sum \gamma_\alpha^2}{2} \cos \left[ \omega_* \tau + 2k \cos \frac{\vartheta}{2} \int_0^\tau \Delta v(t) dt \right], \quad (70.18)$$

где

$$\omega_* = \omega_0 + 2k \cos \frac{\vartheta}{2} \bar{v} = \omega_0 \left( 1 + 2 \frac{\bar{v}}{c} \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (70.19)$$

есть частота приходящего сигнала, измененная благодаря явлению Допплера. Действительно, если считать облако движущимся как твердое тело  $K$  на рис. 59 (т. е. положить  $\Delta v \equiv 0$ ), то, применяя обозначения рис. 59, будем иметь

$$\pi - \psi = \varphi + \vartheta, \quad \bar{v} = -v \sin \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad (70.20)$$

так что формула (70.19) принимает вид

$$\omega_* = \omega_0 [1 + 2\beta (\cos \psi - \cos \varphi)], \quad (70.21)$$

что при  $\beta \ll 1$  полностью согласуется с формулой (68.15).

В более общем случае величина

$$\zeta(t) = -2k \cos \frac{\vartheta}{2} v(t) = -2\omega_0 \frac{v(t)}{c} \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (70.22)$$

определяет смещение частоты, вызванное движением частицы со скоростью  $v(t)$  в направлении биссектрисы  $OC$  (рис. 61). Поэтому формулу (70.16) можно переписать в виде

$$R_n(\tau) = \frac{\sum \gamma_\alpha^2}{2} \cos \left[ \omega_0 \tau - \int_0^\tau \zeta(t) dt \right]. \quad (70.23)$$

В случае, когда случайная функция  $\zeta(t)$  меняется достаточно медленно, последнее выражение позволяет вывести формулу (69.24). В самом деле, пусть  $\zeta(t)$  заметно изменяется лишь за промежутки времени порядка  $\delta\tau$  или большие ( $\delta\tau$  есть время корреляции для скорости частиц, ср. далее § 71). Тогда при условии

$$\tau \ll \delta\tau \quad (70.24)$$

МОЖНО НАПИСАТЬ

$$\int_0^{\tau} \zeta(t) dt = \zeta \tau, \quad (70.25)$$

где  $\zeta = \zeta(0)$  — начальное значение смещения частоты. Обозначим через  $W(\zeta) d\zeta$  вероятность того, что смещение частоты попадает в интервал  $(\zeta, \zeta + d\zeta)$ ; тогда

$$\overline{\cos(\omega_0 - \zeta) \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 - \zeta) \tau \cdot W(\zeta) d\zeta \quad (70.26)$$

и корреляционная функция (70.23) равна

$$R_n(\tau) = R_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 - \zeta) \tau W(\zeta) d\zeta, \quad R_0 = \frac{\sum \gamma_a^2}{2} \quad (70.27)$$

или

$$R_n(\tau) = \operatorname{Re} \left\{ R_0 e^{i\omega_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta \tau} W(\zeta) d\zeta \right\}. \quad (70.28)$$

Эта формула согласуется с выражением (69.24), если в последнем взять монохроматический зондирующий сигнал, для которого в силу формулы (69.19) можно положить

$$R_m(\tau) = R_0 e^{i\omega_0 \tau} \quad (70.29)$$

и, кроме того,

$$r(\tau) e^{-i\bar{\omega} \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta \tau} W(\zeta) d\zeta, \quad (70.30)$$

как в формуле (69.23).

Сравнение результатов этого и предыдущего параграфов показывает, что формулу (69.24) нельзя считать универсально правильной, поскольку вытекающее из нее выражение (70.26) справедливо лишь при условии (70.24), т. е. при достаточно медленном изменении скорости частиц во времени. В § 71 мы выведем более общие формулы для функции корреляции и интенсивности спектра, пригодные для того случая, когда не выполняются условия (70.24).

В заключение отметим, что исходная формула (70.01) строго справедлива лишь для изотропных рассеивателей

(например, рассеяние на сферических каплях дождя или тумана). При другой форме рассеивающих частиц, благодаря их вращению и деформации в реальных условиях, амплитуда рассеянной волны зависит от времени, поэтому  $\gamma_\alpha$  в формуле (70.01) нужно считать случайной функцией времени, а в формуле (70.10) вместо  $\gamma_\alpha \gamma_\beta$  писать  $\overline{\gamma_\alpha(t) \gamma_\beta(t - \tau)}$ . Формула (70.14) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} & \overline{n(t) n(t - \tau)} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \overline{\gamma_\alpha(t) \gamma_\alpha(t - \tau) \cos \left[ \omega_0 \tau + 2k \cos \frac{\theta}{2} \int_{t-\tau}^t v_\alpha(s) ds \right]}. \end{aligned} \quad (70.31)$$

Отсюда видно, что дополнительный учет вращения и деформации рассеивателей приводит к такому же выражению для корреляционной функции, что и в случае генератора синусоидальных колебаний, модулированного одновременно по частоте и амплитуде.

В предыдущем анализе не учтено то обстоятельство, что из рассеивающего объема  $V$  (рис. 60) выходят некоторые частицы и в объем  $V$  входят другие. Этим обстоятельством можно пренебречь, если объем  $V$  достаточно велик, а движение частиц — достаточно медленное.

### § 71. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФЛЮКТУАЦИОННОЙ МОДУЛЯЦИИ К ХАОТИЧЕСКИМ ОТРАЖЕНИЯМ

В предыдущем параграфе для корреляционной функции помех, обусловленных отражением от хаотически движущихся частиц, мы получили выражение (70.23). Считая  $\zeta(t)$  стационарной случайной функцией с некоторым средним значением  $\bar{\zeta}$  и обозначая

$$(\Delta \zeta)^2 = \overline{(\zeta - \bar{\zeta})^2}, \quad (71.01)$$

можно ввести новую случайную функцию  $x(t)$  с помощью соотношения

$$x(t) = \frac{\zeta(t) - \bar{\zeta}}{\Delta \zeta}, \quad (71.02)$$

тогда мы будем иметь

$$\zeta(t) = \bar{\zeta} + \Delta \zeta \cdot x(t), \quad (71.03)$$

причем  $x(t)$  будет удовлетворять соотношениям (62.01).

Формула (70.23) принимает вид

$$R_n(\tau) = \frac{\sum \gamma_a^2}{2} \cos \left[ \omega_* \tau - \Delta \zeta \cdot \int_0^\tau x(t) dt \right] \quad (71.04)$$

$$\omega_* = \omega_0 - \bar{\zeta}.$$

С другой стороны, в предыдущей главе мы вывели формулу (63.03), которую при отсутствии амплитудной и фазовой модуляции можно переписать в виде

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \cos \left[ \omega_0 \tau - n \omega_0 \int_0^\tau x(t) dt \right], \quad (71.05)$$

поскольку в силу стационарности  $x(t)$  при образовании среднего можно заменить

$$\Theta_1 - \Theta_2 = n \omega_0 \int_{t_2}^{t_1} x(t) dt \text{ на } n \omega_0 \int_0^\tau x(t) dt.$$

Отсюда видно, что формула (71.04) отличается от формулы (71.05) только обозначениями и наличием множителя  $\sum \gamma_a^2$ ; последний определяет интенсивность помехи.

Если сделать предположение, что случайные процессы  $\zeta(t)$  и  $x(t)$  являются не только стационарными (как это только предполагалось ранее), но и *нормальными*, то можно воспользоваться первой формулой (63.09), с помощью которой выражение (71.04) преобразуется следующим образом:

$$R_n(\tau) = \frac{\sum \gamma_a^2}{2} e^{-\frac{1}{2}(\Delta \zeta)^2 h(\tau)} \cos \omega_* \tau, \quad (71.06)$$

где  $\omega_*$  есть частота с учетом эффекта Допплера от движения частиц „в целом“, а функция  $h(\tau)$  согласно формуле (62.17) равна

$$h(\tau) = \int_0^\tau \int_0^\tau r(s_1 - s_2) ds_1 ds_2, \quad r(\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)}. \quad (71.07)$$

Заметим, что функция  $r(\tau)$  в данной формуле имеет иной смысл, чем во всех формулах этой главы.

В отличие от формулы (70.26) выражение (71.06) применимо при любых соотношениях между  $\tau$  и  $\delta\tau$ , где  $\delta\tau$



есть время корреляции случайного процесса  $x(t)$  (см. выше § 70). При условии (70.24), однако, мы в силу формулы (65.03) имеем

$$R_n(\tau) = \frac{\sum \gamma_\alpha^2}{2} e^{-\frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2\tau^2} \cos \omega_* \tau. \quad (71.08)$$

Если выполняется противоположное условие

$$\tau \gg \delta\tau, \quad (71.09)$$

то в силу формулы (65.04) мы получаем

$$R_n(\tau) = \frac{\sum \gamma_\alpha^2}{2} e^{-(\Delta\zeta)^2\tau\delta\tau} \cos \omega_* \tau. \quad (71.10)$$

Иначе говоря, входящая в формулы (69.24) и (69.28) функция  $r(\tau)$  имеет следующие законы убывания:

$$r(\tau) = e^{-\frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2\tau^2} \quad \text{при } \tau \ll \delta\tau \quad (71.11)$$

и

$$r(\tau) = e^{-(\Delta\zeta)^2\tau\delta\tau} \quad \text{при } \tau \gg \delta\tau. \quad (71.12)$$

Закон (71.11) легко понять: поскольку процесс  $\zeta(t)$  считается нормальным, то закон распределения мгновенных скоростей является максвелловым

$$W(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta\zeta} \exp \left\{ -\frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{2(\Delta\zeta)^2} \right\} \quad (71.13)$$

и формула (70.30) приводит к выражению (71.11). Оба предельных случая мы в сущности уже рассмотрели в § 65, но при этом в основном обращали внимание на спектральные интенсивности, а не на корреляционные функции.

В § 48 мы показали, что законы (71.11) и (71.12) приводят к совершенно различным схемам оптимального обнаружения пакки сигналов на фоне хаотических отражений. При этом существенно, какую формулу нужно брать для функции  $r(\tau)$  при  $r=T$ ,  $r=2T$  и т. д., где  $T$  — период повторения. Из чисто теоретических соображений, как мы видим, возможны как предельные выражения (71.11) и (71.12), так и более сложное выражение

$$r(\tau) = e^{-\frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2 h(\tau)}, \quad (71.14)$$

справедливое при  $\tau \sim \delta\tau$ .

Содержание данной главы в значительной степени базируется на работах Г. С. Горелика.

## ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРИЕМНИКИ

Задача об обнаружении сигнала на фоне случайных помех является статистической задачей о выборе одной из двух взаимно исключающих гипотез. Пусть входная функция  $f(t)$  может либо состоять из сигнала  $m(t)$  и помехи  $n(t)$

$$f(t) = m(t) + n(t) \quad (I.01)$$

(гипотезу, связанную с этим событием, мы будем обозначать через  $H_1$ ), либо сводиться к чистой помехе

$$f(t) = n(t) \quad (I.02)$$

(гипотезу, связанную с этим событием, мы будем обозначать через  $H_0$ ).

Задача заключается в том, чтобы указать правило решения, которое бы «наилучшим» образом позволило на основании функции  $f(t)$  решить, какая из двух гипотез  $H_1$  или  $H_0$  верна. Очевидно, что такое решение будет тем «лучше», чем больше свойств сигнала и помехи может быть использовано при построении правила решения.

Пусть случайная функция  $f(t)$  характеризуется распределением вероятности  $P_1(f)$  при справедливости гипотезы  $H_1$  и распределением  $P_0(f)$  при справедливости гипотезы  $H_0$ . Если мы вместо непрерывной функции  $f(t)$  рассмотрим  $N$  выборок  $f_1, \dots, f_N$ , то функции  $P_1(f)$  и  $P_0(f)$  являются  $N$ -мерными распределениями вероятностей, так что более подробно следует писать

$$P_1(f) = P_1(f_1, \dots, f_N) \quad P_0(f) = P_0(f_1, \dots, f_N), \quad (I.03)$$

причем к непрерывной функции нетрудно перейти, полагая  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$  (ср. § 26).

Для простоты предположим, что распределения (I.03) имеют плотности вероятности  $p_1(f)$  и  $p_0(f)$ , так что

$$\begin{aligned} p_1(f) df &= p_1(f_1, \dots, f_N) df_1 \dots df_N \text{ и} \\ p_0(f) df &= p_0(f_1, \dots, f_N) df_1 \dots df_N \end{aligned} \quad (I.04)$$

— вероятности того, что  $f_1, \dots, f_N$  находятся в соответствующих интервалах при справедливости гипотез  $H_1$  и  $H_0$ . В этих формулах каждая входная функция  $f(t)$  пред-

ставляется точкой в  $H$ -мерном пространстве с координатами  $f_1, \dots, f_H$ , а  $df = df_1, \dots, df_H$  есть элемент объема в этом пространстве. Мы будем также предполагать, что известны априорные вероятности событий, соответствующие гипотезам  $H_1$  и  $H_0$ , а именно  $P(1)$  и  $P(0)$ , так что

$$P(1) + P(0) = 1. \quad (I.05)$$

Выбор правила решения заключается в разбиении пространства  $f_1, \dots, f_H$  на две области  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  такие, что при попадании точки в область  $\Gamma_1$  выносятся решение о верности гипотезы  $H_1$ , а при попадании в область  $\Gamma_0$ —решение о том, что верна гипотеза  $H_0$ . Подобное разбиение схематически изображено на рис. 62 для случая  $H=2$ . В связи с этим и возникает вопрос об оптимальном правиле решения или оптимальном разбиении пространства  $f_1, \dots, f_H$  на области  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$ .

В гл. V мы рассматривали оптимальные приемники обнаружения, образующие апостериорную вероятность и сравнивающие ее с некоторым порогом. При этом качество решения характеризуется вероятностями правильных решений  $D$  (вероятность правильного обнаружения, т. е. вероятность принять гипотезу  $H_1$ , когда она верна) и  $F_0$  (вероятность правильного необнаружения, т. е. вероятность принять гипотезу  $H_0$ , когда она верна) и вероятностями ошибочных решений  $D_0$  (вероятность пропуска сигнала, т. е. вероятность принять гипотезу  $H_0$ , когда верна гипотеза  $H_1$ ) и  $F$  (вероятность ложной тревоги, т. е. вероятность принять гипотезу  $H_1$ , когда верна гипотеза  $H_0$ ). В силу определений имеют место очевидные соотношения

$$\left. \begin{aligned} D &= \int_{\Gamma_1} p_1(f) df, & F &= \int_{\Gamma_1} p_0(f) df, \\ D_0 &= 1 - D, & F_0 &= 1 - F. \end{aligned} \right\} \quad (I.06)$$

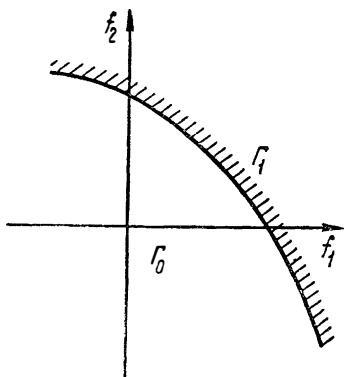


Рис. 62. Области  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  соответствующие правилу решения.

В теории статистических решающих функций вводится понятие *цены* различных ситуаций и соответствующих решений. В простейшей проблеме обнаружения вводят четыре цены, которые обозначаются через  $C_D$ ,  $C_{D_0}$ ,  $C_F$  и  $C_{F_0}$ , причем  $C_D$  есть цена правильного обнаружения,  $C_{D_0}$  — цена пропуска сигнала,  $C_F$  — цена ложной тревоги и  $C_{F_0}$  — цена правильного необнаружения.

Будем считать, что цены удовлетворяют условиям

$$C_{D_0} > C_D \text{ и } C_F > C_{F_0}, \quad (I.07)$$

т. е. цена любого неправильного решения больше цены соответствующего правильного решения. Если наблюдатель принимает решения по какому-то правилу и платит какую-то цену в зависимости от того, какая из четырех возможностей реализовалась, то функция потерь (называемая также функцией риска)

$$R = P(1)DC_D + P(1)D_0C_{D_0} + P(0)FC_F + P(0)F_0C_{F_0} \quad (I.08)$$

определяет, очевидно, среднюю плату, причем чем меньше  $R$ , тем, очевидно, «лучше» правило решения.

Учитывая соотношения (I.06), имеем

$$R = \int_{\Gamma_1} [-P(1)(C_{D_0} - C_D)p_1(f) + P(0)(C_F - C_{F_0})p_0(f)]dF_0 + P(1)C_{D_0} + P(0)C_{F_0}. \quad (I.09)$$

Оптимальным правилом решения назовем (вместе с Вальдом) такое правило, при котором величина  $R$  минимальна.

Вторая строчка формулы (I.09) от правила решения (от областей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$ ) не зависит, поэтому минимум  $R$  достигается при минимуме интеграла, входящего в формулу (I.09). Первое слагаемое в подынтегральном выражении формулы (I.09) в силу неравенства (I.07) отрицательно или равно нулю, а второе — положительно или равно нулю. Если мы выберем область  $\Gamma_1$  так, чтобы выполнялось условие

$$P(1)(C_{D_0} - C_D)p_1(f) \geq P(0)(C_F - C_{F_0})p_0(f) \quad (I.10)$$

или

$$\frac{p_1(f)}{p_0(f)} \geq \frac{P(0)}{P(1)} \cdot \frac{C_F - C_{F_0}}{C_{D_0} - C_D}, \quad (I.11)$$

то, очевидно, величина  $R$  будет иметь минимальное значение.

В самом деле, исключение из области  $\Gamma_1$  любой ее части, в которой удовлетворяется условие (I.10), приводит к увеличению интеграла в формуле (I.09) и, следовательно, к увеличению  $R$ ; наоборот, включение в область  $\Gamma_1$  любого элемента объема, в котором справедливо неравенство, противоположное (I.10), также ведет к увеличению  $R$ .

Вводя обозначения

$$\Lambda = \frac{P_1(f)}{P_0(f)} \quad (\text{I.12})$$

и

$$\Lambda_* = \frac{P(0)}{P(1)} \cdot \frac{C_F - C_{F_0}}{C_{D_0} - C_D}, \quad (\text{I.13})$$

получим правило решения в виде

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \Lambda \geq \Lambda_*, \text{ то верна гипотеза } H_1, \\ \text{если } \Lambda < \Lambda_*, \text{ то верна гипотеза } H_0, \end{array} \right\} \quad (\text{I.14})$$

где для определенности случай  $\Lambda = \Lambda_*$  мы отнесли к гипотезе  $H_1$ . То же правило мы получили в гл. V из иных соображений.

При

$$C_D = C_{F_0} = 0, \quad C_{D_0} = C_F = 1 \quad (\text{I.15})$$

величина (I.08) равна полной вероятности ошибки

$$V = P(1) \cdot (1 - D) + P(0)F, \quad (\text{I.16})$$

а правило решения (I.14) обеспечивает минимум полной вероятности ошибки или максимум полной вероятности правильного решения

$$W = 1 - V = P(1)D + P(0)(1 - F), \quad (\text{I.17})$$

если порог  $\Lambda_*$  выбирается равным

$$\Lambda_* = \frac{P(0)}{P(1)}. \quad (\text{I.18})$$

Порог (I.18) может быть получен и при условии, менее жестком, чем условия (I.15), а именно при

$$C_F - C_{F_0} = C_{D_0} - C_D. \quad (\text{I.19})$$

Наблюдателя, принимающего решения по данному правилу, в литературе принято называть идеальным наблюда-

телем Зигерта. Мы видим, что при построении оптимального приемника, эквивалентного этому наблюдателю, необходимо знать априорные вероятности  $P(1)$  и  $P(0)$ , что в ряде случаев связано с определенными трудностями (ср. § 30).

Наблюдатель Неймана-Пирсона не использует априорных вероятностей  $P(1)$  и  $P(0)$ . Согласно критерию Неймана-Пирсона оптимальное правило решения должно давать максимум вероятности правильного обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги. Нетрудно показать, что наблюдатель Неймана-Пирсона должен принимать решения по правилу (I.14), где, однако, порог  $\Lambda_*$  определяется не формулой (I.13), в правой части которой стоят неизвестные нам параметры, а непосредственно вероятностью ложной тревоги

$$\Lambda_* = \Lambda_*(F) \quad (I.20)$$

по второй формуле (I.06).

В теории статистических решений рассматривается также последовательный анализ поступающих данных. При этом задаются вероятности  $D_0$  и  $F$  (или  $D$  и  $F$ ), время наблюдения не фиксируется, а остается случайной переменной, причем вводится также цена единицы времени. Вальд показал, что оптимальное правило решения, дающее минимум функции риска, зависящей в данном случае и от времени наблюдения, достигается при следующем правиле решения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \Lambda \geq \Lambda^*, \text{ то считаем гипотезу } H_1 \text{ верной,} \\ \text{если } \Lambda^* > \Lambda > \Lambda_*, \text{ то имеем неопределен-} \\ \text{ность,} \\ \text{если } \Lambda \leq \Lambda_*, \text{ то считаем верной гипотезу } H_0, \end{array} \right\} \quad (I.21)$$

где пороги решения  $\Lambda^*$  и  $\Lambda_*$  определяются формулами

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda^* = \frac{1-D}{1-F}, \\ \Lambda_* = \frac{D}{F}. \end{array} \right\} \quad (I.22)$$

Наблюдение происходит до тех пор, пока  $\Lambda$  не перейдет первый раз любой из порогов  $\Lambda^*$  или  $\Lambda_*$ .

**ОБ ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ/ПОМЕХА  
ПРИ НЕОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАБОТКЕ  
ВХОДНЫХ ДАННЫХ**

Обычно отношением сигнал/помеха при работе с прямоугольными радиоимпульсами называют параметр

$$\rho' = \frac{\text{средняя мощность сигнала (в импульсе)}}{\text{средняя мощность помехи}}. \quad (\text{II.01})$$

Если импульсы имеют постоянную (нефлюктуирующую) амплитуду и строго прямоугольную форму, то «средняя мощность сигнала» получается в результате усреднения по высокочастотной фазе. Если амплитуда является случайной величиной, то дополнительно производится усреднение и по амплитуде.

В § 16 и на протяжении всей книги мы определяли  $\rho$  (отношение сигнал/помеха) следующим образом:

$$\rho = \frac{\text{пиковая мощность сигнала}}{\text{средняя мощность помех}} \quad (\text{на выходе фильтра}). \quad (\text{II.02})$$

Этот параметр вычислялся как для оптимальных линейных фильтров, так и для неоптимальных (ср. гл. III). Вместо термина «мощность» мы применяли термин «интенсивность», но при образовании отношения это дела не меняет.

Если высокочастотный сигнал имеет постоянную амплитуду и фильтрация сохраняет прямоугольную форму импульса, то в силу того, что пиковая мощность синусоидального сигнала вдвое больше его средней мощности, мы в результате сравнения формул (II.01) и (II.02) получаем

$$\rho' = \frac{1}{2} \rho. \quad (\text{II.03})$$

Для прямоугольных видеоимпульсов (ср. § 18), очевидно,  $\rho' = \rho$ .

Если сигнал имеет случайную амплитуду  $G$ , распределенную по закону Релея

$$p_m(G) = G e^{-\frac{G^2}{2}}, \quad (\text{II.04})$$

то

$$\bar{G}^2 = 2, \quad (\text{II.05})$$

и это соотношение нужно иметь в виду при образовании параметра  $\rho'$ . Что же касается параметра  $\rho$ , то он согласно § 34 определяется формулой (II.02) при  $G=1$ , поэтому для сигнала с флуктуирующей амплитудой мы имеем:

$$\rho' = \rho. \quad (\text{II.06})$$

Как мы видели в § 45, при оптимальной фильтрации иногда целесообразно вместо параметра  $\rho$  вводить параметр  $\rho'$  по формуле (II.03) для постоянной цели и по формуле (II.06) для мерцающей цели, поскольку это облегчает сравнение характеристик обнаружения соответствующих приемников.

В различных местах книги мы неоднократно отмечали, что основные результаты теории оптимальных приемников остаются в силе в том случае, когда линейная фильтрация (внутрипериодная обработка входных данных) производится неоптимальным образом. Это значит, что получаемые из коэффициента правдоподобия оптимальные способы междупериодной обработки входных данных будут оптимальными при любой (но линейной) внутрипериодной обработке и что вычисленные характеристики приемника (вероятности  $F$  и  $D$ ) также применимы. Нужно только иметь в виду, что неоптимальность линейной фильтрации снижает эффективное отношение сигнал/помеха, т. е. дело обстоит так, как если бы уровень помех несколько повысился. Примером неоптимального фильтра может служить высокочастотное звено приемника, сохраняющего прямоугольную форму импульсов, для которых и вводится определение (II.01).

Сделанное выше утверждение (почти очевидное с физической точки зрения) следовало бы, в сущности, доказать применительно к каждому наиболее важному результату второй части данной книги. Однако это сделало бы изложение слишком громоздким, и мы были вынуждены ограничиться лишь краткими замечаниями. Можно надеяться, что читатель, усвоивший основное содержание данной книги, сможет сам провести необходимое доказательство в каждом частном случае.



### О ПАРАДОКСАХ В ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ

В статье Д. Слепяна „Некоторые комментарии к обнаружению гауссовых сигналов в гауссовых шумах“\* доказываемся следующая математическая теорема, которую мы здесь сформулируем, пользуясь обозначениями данной книги\*\*. Пусть рассматривается обнаружение стационарного случайного процесса  $m(t)$  (сигнала) на фоне стационарного случайного процесса  $n(t)$  (помехи), т. е. решается вопрос о том, содержит ли входной процесс  $f(t)$ , известный в интервале  $0 \leq t \leq T$ , сигнал  $m(t)$  или не содержит [ $f(t) = m(t) + n(t)$  или  $f(t) = n(t)$ ]. Предполагается, что оба процесса  $m(t)$  и  $n(t)$  являются нормальными (гауссовыми) процессами с равными нулю средними значениями и известными спектральными интенсивностями  $S_{m+n}(\omega)$  и  $S_n(\omega)$ , не равными тождественно друг другу. Если интенсивность  $S_{m+n}(\omega)$  является рациональной функцией  $\omega$  или тождественно исчезает вне некоторой конечной полосы частот, а интенсивность  $S_n(\omega)$  также является рациональной функцией или тождественно исчезает вне конечной полосы частот и если при рациональных функциях  $S_{m+n}(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  выполняется соотношение

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{S_{m+n}(\omega)}{S_n(\omega)} \neq 1, \quad (\text{III.01})$$

то существует правило решения, использующее входной процесс  $f(t)$  при  $0 \leq t \leq T$  и обеспечивающее вероятность ложной тревоги  $F < \epsilon$  и вероятность правильного обнаружения  $D > 1 - \epsilon$ , где  $\epsilon > 0$  — любое наперед заданное число. Эта теорема справедлива для произвольно малого  $T > 0$ .

Отсылая читателя за деталями доказательства и литературными ссылками к цитированной статье, дадим лишь идею доказательства. Если удовлетворяются соотношения  $S_{m+n}(\omega) \equiv 0$  и  $S_n(\omega) \equiv 0$  при  $\omega > \omega_0$  и  $\omega < -\omega_0$ , (III.02),

то случайные функции  $m(t) + n(t)$  и  $n(t)$  являются сингулярными (ср. § 13). Можно доказать, что для определе-

\* D. Slepian. IRE Transactions on Information Theory, 1958, IT-4, № 2, p. 65—68.

\*\* Ряд положений, высказанных в данной статье (особенно математических), встречается и в других, более ранних работах. Однако принципиальная важность этих положений выяснена в данной статье особенно четко.

ния этих функций во всем бесконечном интервале  $-\infty < t < \infty$  и точного вычисления их корреляционных функций и спектральных интенсивностей достаточно знать их поведение в любом конечном интервале  $0 \leq t \leq T$ , а спектральные интенсивности позволяют, разумеется, произвести обнаружение вполне достоверным образом (с вероятностями  $F=0$  и  $D=1$ ).

Если спектральные интенсивности  $S_{m+n}(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  являются рациональными функциями  $\omega$ , удовлетворяющими при  $\omega \rightarrow \pm\infty$  асимптотическим соотношениям

$$S_{m+n}(\omega) \sim \frac{a}{\omega^{2l}}, \quad S_n(\omega) \sim \frac{b}{\omega^{2(l+p)}} \quad (l=1, 2, \dots; \quad p=0, 1, 2, \dots), \quad (\text{III.03})$$

причем при  $p=0$  в силу соотношения (III.01) постоянная  $a$  должна отличаться от постоянной  $b$ , то обнаружение можно производить по величине

$$y_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left[ z \left( \frac{j+1}{k} T \right) - z \left( \frac{j}{k} T \right) \right]^2, \quad z(t) = \frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}} f(t). \quad (\text{III.04})$$

Оказывается, что величина  $y_k$  при достаточно большом  $k$  с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличается от  $(2\pi)^2 a T$  (при  $f(t) = m(t) + n(t)$ ),  $(2\pi)^2 b T$  (при  $f(t) = n(t)$  и  $p=0$ ) или нуля (при  $f(t) = n(t)$  и  $p \geq 1$ ), что и позволяет доказать теорему для рациональных функций  $S_{m+n}(\omega)$  и  $S_n(\omega)$ . Та же величина (III.04) позволяет произвести однозначное различение случайного процесса  $m(t) + n(t)$  с рациональной спектральной интенсивностью  $S_{m+n}(\omega) \sim \frac{a}{\omega^{2l}}$  от случайного процесса  $n(t)$  со спектральной интенсивностью  $S_n(\omega)$ , равной нулю при  $|\omega| > \omega_0$ .

Формулировка рассмотренной выше теоремы может быть значительно расширена. В частности, вместо простых разностей производных  $\frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}} f(t)$  в формуле (III.04) можно брать разности  $l$ -го порядка для самой функции  $f(t)$ ; в последнем случае используются лишь выборки функции в моменты  $t_j = \frac{j}{k} T$  ( $j=0, 1, \dots, k-1$ ). Далее можно считать, что теорема справедлива для любой пары сингулярных процессов  $m(t) + n(t)$  и  $n(t)$ , т. е. вместо соотно-

шений (III.03) требуется лишь достаточно быстрое исчезание функций  $S_{m+n}(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  на бесконечности (см. § 13). Рациональность функций  $S_{m+n}(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  также несущественна, важно лишь, чтобы они были ограничены при вещественных  $\omega$  и удовлетворяли асимптотическим соотношениям (III.03) и (III.01). Рассматриваемые случайные процессы не обязательно должны быть нормальными, по крайней мере, если они сингулярны.

Поскольку обнаружение по коэффициенту правдоподобия является оптимальным (ср. гл. V и приложение I), то при условиях, сформулированных выше, правило решения (35.10) должно приводить к таким же значениям  $F < \epsilon$  и  $D > 1 - \epsilon$  или даже лучшим. Однако непосредственное вычисление вероятностей  $F$  и  $D$  затруднительно.

Парадоксальность данной теоремы с физической и технической точки зрения заключается в том, что она позволяет производить уверенное обнаружение сколь угодно слабого случайного сигнала  $m(t)$  на фоне сколь угодно сильной помехи  $n(t)$  за сколь угодно короткий промежуток времени  $T$ . На основании этой теоремы Д. Слепьян приходит к выводу, что существующая математическая теория обнаружения сигналов на фоне помех неадекватна задачам обнаружения, представляющим интерес для техники, и должна быть дополнена, по крайней мере, в двух отношениях: 1) следует отказаться от утверждения, что нам *точно* известны спектральные интенсивности всех случайных процессов, фигурирующих в задаче; 2) следует отказаться от утверждения, что мы *точно* знаем входной процесс  $f(t)$  в непрерывном временном интервале  $0 \leq t \leq T$  или в дискретные моменты времени  $t_j$ , сколь угодно часто расположенные на оси времени.

Если эти дополнения действительно необходимы, то следовало бы, во-первых, отказаться от обычной статистической теории обнаружения, изложенной в данной книге, и, во-вторых, приступить к построению новой теории, которая неизбежно будет более сложной. На самом деле данная теорема не приводит к столь радикальным выводам, и все возникающие парадоксы могут быть легко разъяснены в рамках существующей теории.

При анализе данной теоремы мы будем для простоты предполагать, что процессы  $m(t)$  и  $n(t)$  некоррелированы, так что

$$S_{m+n}(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega) \quad (\text{III.05})$$

и условие (III.01) имеет вид

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{S_m(\omega)}{S_n(\omega)} \neq 0. \quad (\text{III.06})$$

Таким образом, данная теорема справедлива либо тогда, когда процесс  $n(t)$  или оба процесса  $m(t)$  и  $n(t)$  сингулярны, либо тогда, когда регулярный процесс  $m(t)$  является не менее широкополосным, чем помеха  $n(t)$ , т. е. когда при достаточно высоких частотах спектральная интенсивность полезного сигнала сравнима со спектральной интенсивностью помехи или превосходит последнюю. Если же считать, что спектр помехи шире спектра сигнала, то теорема несправедлива, все парадоксы исчезают и теория обнаружения приводит к выводам, согласующимся со здравым смыслом и инженерной практикой.

Понятие стационарного случайного процесса возникло в математике в результате обобщения таких явлений, как шумы в электрических цепях и другие флюктуационные процессы, и затем применялось к полезным сигналам, носящим случайный характер (телеграфные сигналы, телефонный разговор, радиопередача и т. д.). Однако математическое понятие стационарного случайного процесса оказывается более широким, чем это кажется на первый взгляд. При исследовании прогнозирования стационарных случайных процессов в гл. II мы встретились с тем обстоятельством, что лишь для регулярных случайных процессов теория прогнозирования приводит к результатам, осмысленным с практической точки зрения. Что же касается сингулярного случайного процесса, то он не имеет своего прообраза ни в случайных полезных сигналах, ни в помехах. Действительно, сингулярный процесс, в котором «прошлое» однозначно определяет все «будущее», не несет в себе никакой новой информации и вместе с тем не создает помехи для обнаружения, например, сколь угодно слабого сигнала  $m(t)$  конечной длительности, поскольку сингулярный процесс  $n(t)$  можно однозначно экстраполировать в конечный интервал времени, где может появиться сигнал  $m(t)$ , вычесть из входного процесса  $f(t)$  и тем самым с полной достоверностью выделить  $m(t)$  или констатировать его отсутствие. Поэтому та часть сформулированной выше теоремы, которая относится к обнаружению стационарного случайного процесса  $m(t)$  (регулярного или сингулярного) на фоне помехи  $n(t)$ , являющейся сингулярным случайным процессом, является с теоретической точки

зрения вполне естественной и вместе с тем ни к каким практическим выводам привести не может.

Однако случайные процессы с рациональными спектральными интенсивностями являются регулярными (см. гл. II) и относящаяся к ним часть теоремы нуждается в более подробном анализе. Из формулы (III.03) видно, что в данном случае обнаружение производится по величине  $y_k$ , в которую входят разности  $z(t_{j+1}) - z(t_j)$  при малых разностях аргументов  $t_{j+1} - t_j = \frac{T}{k}$  (поскольку  $k$  предполагается достаточно большим). При образовании этих разностей (а также при вычислении производной  $z(t) = \frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}} f(t)$  при  $t = t_j$ ), как известно, исчезают знаки, так что, измеряя  $f(t)$  с некоторой (случайной) погрешностью и производя вычисления с конечным числом знаков, соответствующим этой погрешности, мы находим  $y_k$  со случайной ошибкой, неограниченно растущей при  $k \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство не позволяет практически использовать возможности, заложенные в сформулированной выше теореме, и как будто заставляет ввести в теорию обнаружения дополнительное положение о *неточном* знании входного процесса  $f(t)$ .

В действительности несистематические ошибки при измерении значений  $f(t)$  носят характер дополнительного белого шума, накладывающегося на данный процесс, поскольку они случайны и статистически независимы. Ошибки, возникающие при округлении значений  $f(t)$  в числовых расчетах с фиксированным числом знаков, также можно рассматривать как белый шум. Эти «измерительные» и «математические» белые шумы являются нормальными (гауссовыми), и их можно просто включить в помеху  $n(t)$ , маскирующую наличие полезного сигнала  $m(t)$ . Точно также мы «выносим» собственные шумы приемника, обрабатывающего и дополнительно искажающего данный нам процесс  $f(t)$ , включая собственные шумы в общую помеху  $n(t)$ .

Высказанные выше соображения показывают, что в помехе  $n(t)$  всегда имеется некоторая примесь белых шумов, которые могут быть обусловлены, с одной стороны, физическими причинами (шумящие сопротивления, дробовой эффект и т. д., ср. § 61), а с другой стороны, позволяют учесть ошибки при воспроизведении, измерении и обработ-

ке входных данных. Спектральная интенсивность  $S_0$  этих белых шумов в основной части спектра помех может быть весьма малой, однако при достаточно высоких частотах она имеет основное значение, так что

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} S_n(\omega) = S_0 \quad (\text{III.07})$$

и условие (III.06) не может выполняться, поскольку при конечной интенсивности полезного сигнала

$$\overline{m^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega) d\omega \quad (\text{III.08})$$

функция  $S_m(\omega) \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Образовывая величину  $y_k$  при  $k \rightarrow \infty$ , мы будем получать основной вклад от белых шумов, некоррелированных от выборки к выборке, а все остальные слагаемые в функции  $f(t)$ , более медленно меняющиеся во времени, сойдут на нет в результате вычитания. Таким образом, теорема перестает быть верной и все связанные с ней парадоксы исчезают.

В § 13 мы указали, что примесь белого шума к сингулярному случайному процессу приводит к регулярному процессу. Из вышеизложенного следует, что учет неизбежной (хотя, может быть, и весьма малой) примеси белого шума избавляет также теорию обнаружения от парадоксов.

При обнаружении сигнала  $m(t)$  известной формы на фоне стационарного случайного процесса — помехи  $n(t)$  возникают аналогичные парадоксы. Если для простоты считать, что наблюдение входного процесса  $f(t)$  производится при  $-\infty < t < \infty$ , то результат оптимальной линейной обработки можно характеризовать параметром

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega \quad (\text{III.09})$$

— отношением сигнал/помеха на выходе оптимального фильтра [ср. формулы (16.15) и (31.25)]. Здесь  $M(\omega)$  — спектральная амплитуда сигнала  $m(t)$ ,  $S_n(\omega)$  — спектральная интенсивность помех. Если сигнал  $m(t)$  является, например, прямоугольным импульсом, то функция  $|M(\omega)|^2$  при  $\omega \rightarrow \pm\infty$  убывает, как  $\frac{1}{\omega^2}$  [ср. формулы (20.03) и (20.06)]. Для сингулярной „помехи“  $n(t)$  функция  $S_n(\omega)$

при  $\omega \rightarrow \pm\infty$  убывает гораздо быстрее, поэтому интеграл (III.09) расходится и дает  $\rho = \infty$ , что соответствует вполне достоверному обнаружению сколь угодно слабого сигнала. Такое же обнаружение можно произвести не только с помощью оптимального фильтра, а путем экстраполяции помехи (см. выше) и другими способами.

Значение  $\rho = \infty$  может получиться и тогда, когда помеха  $n(t)$  является регулярным случайным процессом. Если, например, при  $\omega \rightarrow \pm\infty$  функции  $M(\omega)$  и  $S_n(\omega)$  удовлетворяют асимптотическим соотношениям

$$|M(\omega)|^2 \sim \frac{a}{|\omega|^{2l}}, \quad S_n(\omega) \sim \frac{b}{|\omega|^{2(l+p)}} \left( l > \frac{1}{2}, p \geq -\frac{1}{2} \right), \quad (\text{III.10})$$

аналогичным соотношениям (III.03), то по формуле (III.09) мы получаем  $\rho = \infty$ .

Другой пример такого типа был рассмотрен в § 21. Если помехи обусловлены хаотическими отражениями от многочисленных местных предметов, то согласно формуле (21.05)

$$S_n(\omega) = \sigma |M(\omega)|^2 \quad \text{и} \quad \rho = \infty, \quad (\text{III.11})$$

так что можно обеспечить  $F < \varepsilon$  и  $D > 1 - \varepsilon$  при сколь угодно слабом сигнале, как в сформулированной выше теореме.

Мы приходим к парадоксальным результатам потому, что не учитываем белых шумов, всегда накладывающихся в той или иной степени на входной процесс (см. выше). Обозначая через  $S_0$  спектральную интенсивность белого шума, мы, например, вместо формулы (III.11) должны написать выражение

$$S_n(\omega) = S_0 + \sigma |M(\omega)|^2, \quad (\text{III.12})$$

и тогда параметр  $\rho$  будет конечным (см. § 21). В общем случае, полагая

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} S_n(\omega) = S_0, \quad (\text{III.13})$$

мы по формуле (III.09) получим конечное значение  $\rho$ , если энергия сигнала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} m^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |M(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{III.14})$$

конечна.

Заметим в заключение, что вместо постоянной спектральной интенсивности  $S_0$  белых шумов можно ввести функцию  $S_0(\omega)$ , постоянную в достаточно широком интервале частот и достаточно медленно убывающую при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Учет „быстрого“ нормального шума, имеющего спектральную интенсивность  $S_0(\omega)$ , приводит статистическую теорию обнаружения в соответствие с действительностью и, в частности, избавляет ее от парадоксальных следствий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ IV

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ВСЛЕДСТВИЕ ЯВЛЕНИЯ ДОППЛЕРА

В § 68 мы рассмотрели изменение частоты монохроматической волны при ее отражении от движущегося тела. Согласно формуле (68.15) частота отраженной волны  $\omega_*$  связана с частотой падающей волны  $\omega$  соотношением

$$\omega_* = \chi\omega, \quad (\text{IV } 01)$$

где множитель

$$\chi = \frac{1 - \beta \cos \varphi}{1 - \beta \cos \psi} \quad (\text{IV } 02)$$

зависит от скорости движения тела относительно передающей и приемной антенн. Для покоящегося тела  $\chi = 1$ , при нерелятивистских скоростях тела (когда  $\beta \ll 1$ ) множитель  $\chi$  близок к единице, однако даже весьма малые изменения частоты легко проявляются на опыте, если колебание наблюдается в течение достаточно долгого времени.

Пусть мы имеем немонохроматическую волну, создающую при отражении от неподвижного тела на входе приемника сигнал

$$m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} M(\omega) d\omega, \quad (\text{IV } 03)$$

который с помощью интеграла Фурье можно представить как наложение монохроматических колебаний. Если тело движется, то благодаря явлению Допплера каждое из этих монохроматических колебаний изменяет частоту со-



ласно формуле (IV.01), и в приемник поступает измененный сигнал

$$m_*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_* t} M\left(\frac{\omega_*}{\chi}\right) d\omega_* = \frac{\chi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\chi t} M(\omega) d\omega, \quad (\text{IV.04})$$

где функция  $M(\omega)$  та же, что и в формуле (IV.03). Таким образом, при точном рассмотрении оказывается, что спектральная амплитуда  $M(\omega)$  сигнала растягивается на шкале частот (если  $\chi > 1$ ); для достаточно узкополосного сигнала это растяжение приблизительно эквивалентно смещению спектра  $M(\omega)$  как целого на отрезок  $(1 - \chi)\omega_0$  по оси частот (ср. § 36). Сами сигналы  $m_*(t)$  и  $m(t)$  связаны формулой

$$m_*(t) = \chi m(\chi t), \quad (\text{IV.05})$$

где множитель  $\chi$ , определяющий изменение амплитуды сигнала, не представляет практического интереса и вместе с тем не является вполне точным (поскольку преобразование амплитуд монохроматических полей при переходе к движущейся системе координат и обратно не рассматривалось), поэтому мы его опустим.

Если сигнал  $m(t)$  от неподвижного тела имеет вид

$$m(t) = e(t) \cos [\omega_0 t - \psi(t) - \theta], \quad (\text{IV.06})$$

то сигнал  $m_*(t)$  от движущегося тела запишется следующим образом

$$m_*(t) = e(\chi t) \cos [\omega_0 \chi t - \psi(\chi t) - \theta]. \quad (\text{IV.07})$$

Следовательно, несущая частота  $\omega_0$  при отражении от движущегося тела заменяется на частоту  $\chi\omega_0$ , в соответствии с формулой (IV.01). Это смещение несущей частоты мы учитывали в теории обнаружения когерентной пачки сигналов. Однако наряду со смещением несущей частоты явление Допплера приводит к изменению формы сигнала или, точнее, огибающей  $e(t)$  и дополнительной фазы  $\psi(t)$ , которые заменяются на  $e(\chi t)$  и  $\psi(\chi t)$  соответственно. В частности, если радиолокационный сигнал представляет собой прямоугольный импульс (отрезок синусоиды), то при отражении от движущегося тела длительность импульса сокращается в той же пропорции, что и период высокочастотных колебаний.

Указанные выше изменения формы сигнала мы на протяжении данной книги не учитывали, хотя в некоторых случаях они могут быть существенными.

## О «СВЕТЯЩИХСЯ ТОЧКАХ»

Если электромагнитная волна падает на тело, имеющее сложную форму и большие размеры (значительно превосходящие длину волны), то главный вклад в рассеянное поле обуславливается «светящимися точками» (несколько размытыми) или, лучше, «светящимися пятнами», занимающими относительно небольшую часть облученной поверхности тела; их расположение сильно зависит от ориентации тела. Наглядное представление о светящихся точках дает освещенное ярким солнцем море при слабом волнении, благодаря которому отражающая поверхность приобретает сложную форму. Вследствие изменения этой формы во времени светящиеся точки перемещаются — как непрерывно, так и «перепрыгивая» с волны на волну. Такие же перемещения светящихся точек происходят при движении наблюдателя.

Происхождение светящихся точек легко понять с точки зрения геометрической оптики, согласно которой падающая на тело волна есть пучок лучей (параллельных — для плоской волны, расходящихся — для сферической), каждый из которых отражается от соответствующей площадки на поверхности тела по известному закону отражения, давая начало отраженному лучу. Лишь некоторые из отраженных лучей попадают в точку наблюдения; светящаяся точка есть точка на поверхности тела, из которой выходит каждый такой луч. Число лучей, попадающих в точку наблюдения, и, следовательно, число светящихся точек, вообще говоря, тем больше, чем сложнее форма тела: так, например, на простейшем из тел — шаре — будет только одна светящаяся точка.

Представление о светящихся точках сохраняется и в том случае, когда геометрическая оптика должна быть заменена или дополнена диффракционной теорией. Действительно, согласно последней рассеянное поле представляется в виде полей, создаваемых различными «диффракционными лучами», приходящими от тела, каждый из которых начинается в некоторой светящейся точке на поверхности тела.

Читатель, интересующийся этими вопросами, может найти подробности, например, в книге Дж. Р. Менцера «Диффракция и рассеяние радиоволн» («Советское радио», 1958), где приведена также обширная библиография.

## ЛИТЕРАТУРА \*

Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956.

Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. John Wiley, New York, 1949.

Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Пер. с англ. под ред. Г. С. Горелика. «Советское радио», 1955.

Бунимович В. И. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. «Советское радио», 1951.

Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сборник переводов под ред. Н. А. Железнова. Изд-во иностранной литературы, 1953 (статьи С. Райса, Ф. Вудворда и И. Дэвиса).

Пороговые сигналы. Пер. с англ. под ред. А. П. Сиверса. «Советское радио», 1952.

Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957.

Davenport W. B. Jr. and W. L. Root. An introduction to the theory of random signals and noise. McGraw-Hill. New York—Toronto London, 1958.

Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. Изд-во иностранной литературы, 1948.

Теория информации и ее приложения. Сборник переводов под ред. А. А. Харкевича. Изд-во иностранной литературы, 1958.

Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд-во иностранной литературы, 1949.

### К первой части

Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. «Успехи математических наук», 7, № 5, 3—168, 1952 (к гл. I, II и IV).

Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва—Ленинград, 1952 (к гл. I—II).

Лэйнинг Дж. Х. и Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Пер. с англ. под ред. В. С. Пугачева. Изд-во иностранной литературы, 1958.

---

\* Приведенная в списке литература ни в коей мере не претендует на полноту. Однако по библиографии, имеющейся в цитированных здесь книгах и статьях, читатель может получить исчерпывающую информацию о всех других работах в данной области.

Wiener N. und Hopf E. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Berlin, 1936 (к гл. II).

Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Математический сборник, 14 (56), № 1—2, 3—50, 1954 (к гл. II).

George S. and Zampagos A. Гребенчатые фильтры в импульсных радиолокационных станциях. Proc. IRE, 42, № 7, 1159—1165, 1954. «Вопросы радиолокационной техники», 2 (26), 58—69, 1955 (к § 20).

George S. F. Эффективность корреляционных детекторов. Proc. of the Nat. Electronics Conference, vol. X, 1954, 109—118 (к § 18 и 20).

Urkwitz H. Фильтр для обнаружения слабых радиолокационных сигналов на фоне местных предметов. Journ. Appl. Phys. 24, August, 1953. (к § 21).

### Ко второй части

Middleton D. Статистические критерии обнаружения радиопульсов в шумах. Journ. Appl. Phys. 24, № 4, 371, 379, 1953 (к гл. V—VI).

Middleton D. Статистическая теория обнаружения сигналов. Trans. IRE, PGIT—3, 26, March 1954 (к гл. V).

Davies I. L. Об определении наличия сигналов в шуме. Proc. IEE, p. III, 99, № 58, March 1952 (к гл. V).

Peterson W. W., Birdsall T. G. and Fox W. C. Теория обнаружения сигналов. Trans. IRE, PGIT-4, 171—212, September 1954 (к гл. V и VI).

D. Van Meter and Middleton D. Современная статистическая трактовка приема в теории связи. Trans. IRE, PGIT-4, 119—154, September 1954 (к гл. V, а также к приложению I).

W. Siebert. Radar detection philosophy. Trans. IRE, IT-2, 204—221, September 1956. «Вопросы радиолокационной техники», 5 (41) стр. 3—35, 1957 (к гл. V).

Wald A. Statistical decision functions. John Wiley, New York, 1950 (к § 30, а также к приложению I).

Наволоцкая С. А. Таблицы функции распределения Райса (к § 33).

Бунимович В. И. Приближенное выражение вероятности правильного обнаружения при оптимальном приеме сигнала с неизвестной фазой. «Радиотехника и электроника», 1958, т. III, № 4, 552 (к § 33).

Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной  $\Gamma$ -функции и функции вероятности  $\chi^2$ . Изд-во Академии наук СССР, Москва — Ленинград, 1950 (к § 38, а также к § 45).

Rachares J. Таблица порогов для проблем радиолокационного обнаружения. Trans. IRE, IT-4, 38—45, March 1958 (к § 38, а также к § 45).

Поляк Ю. В. и Кельзон В. С. К теории обнаружения периодических импульсных сигналов в гауссовом шуме при некогерентном накоплении. «Радиотехника и электроника», 1958, 3, № 6, 764—769 (к § 38).

Schwartz M. Влияние флюктуаций сигнала на обнаружение импульсов в шуме. Trans. IRE, IT-2, 66—71, June 1956 (к § 45).

Kaplan E. L. Теория обнаружения и ее практические применения. Bell System Technical Journal, 34, № 2, 402—431, March 1955 (к § 46).

Reich E., Swerling P. Обнаружение синусоидального колебания в гауссовом шуме. Journ. Appl. Phys. 24, № 3, 289—296, 1953 (к § 35 и к гл. VI).

Swerling P. Максимальная точность определения угловых координат импульсной радиолокационной станцией. Proc. IRE, 44, № 9, 1146—1155, 1956. «Вопросы радиолокационной техники», 2 (38), 3—21, 1957 (к гл. VIII).

Добрушин Р. Л. Одна статистическая задача теории обнаружения сигнала на фоне шума в многоканальной системе, приводящая к устойчивым законам распределения. Теория вероятности и ее применения. III, № 2, 173—184, 1958 (к § 57).

Benner A. and Drenick R. Проблема оптимального обнаружения импульсных сигналов в шуме. RCA Review 16, № 3, 461—479, 1955. «Вопросы радиолокационной техники», 5 (35), 3—16, 1956 (к § 57).

Зубаков В. Д. Оптимальное обнаружение при коррелированных помехах. «Радиотехника и электроника», т. 3, № 12, 1441—1450 (к гл. V).

Зубаков В. Д. Обнаружение сигнала на фоне нормальных шумов и хаотических отражений. «Радиотехника и электроника», т. 4, 1959, № 1 (к гл. VI).

Зубаков В. Д. Обнаружение двух когерентных сигналов на фоне коррелированных помех. «Радиотехника и электроника», т. 4, 1959, № 4 (к гл. VI).

Вайнштейн Л. А. Радиолокационное обнаружение «мерцающего объекта на фоне коррелированных помех. Ч. I. Когерентная пачка сигналов: «Радиотехника и электроника», 4, № 5, 735—744, 1959. Ч. II. Некогерентная пачка сигналов. «Радиотехника и электроника», 4, № 7, 1071—1078, 1959 (к §§ 44—49).

### К третьей части

Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1946 (к гл. IX).

Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. Изд-во иностранной литературы, 1947 (к гл. IX).

Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1933, гл. 1 (к § 59).

Гоноровский И. С. Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях. Связьиздат, М., 1954 (к гл. X).

Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применения к радиотехнике. «Советское радио», 1957 (к гл. X).

Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949, стр. 110 и 120 (к § 66).

Горелик Г. С. К теории рассеяния радиоволн на блуждающих неоднородностях. «Радиотехника и электроника», 1, № 6. 695—703, 1956 (к гл. XI).

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие . . . . .	3
Ч А С Т Ь П Е Р В А Я	
<b>Статистическая теория оптимальных линейных фильтров</b>	
Г л а в а I. Основные понятия теории фильтрации случайных процессов . . . . .	7
§ 1. Постановка задачи . . . . .	7
§ 2. Интегральное уравнение оптимального линейного фильтра . . . . .	14
§ 3. Корреляционные функции и спектральные интенсивности	24
§ 4. Частотные характеристики линейных фильтров и соответствующие им операторы . . . . .	31
§ 5. Обобщение интегрального уравнения оптимального фильтра . . . . .	38
§ 6. Фильтрация квазимонохроматических сигналов с помощью фильтра I типа . . . . .	44
§ 7. Об основных положениях статистической теории фильтрации . . . . .	51
Г л а в а II. Фильтрация и прогнозирование стационарных случайных процессов . . . . .	54
§ 8. Интегральное уравнение оптимального линейного фильтра II типа . . . . .	54
§ 9. Определение частотной характеристики оптимального фильтра II типа . . . . .	61
§ 10. Исследование функций $S_f^+(\omega)$ и $S_f^-(\omega)$ . . . . .	68
§ 11. Построение оптимального фильтра II типа . . . . .	73
§ 12. Физическая интерпретация теории фильтрации и прогнозирования . . . . .	79
§ 13. Прогнозирование сингулярных случайных процессов	88
§ 14. Общие соображения о фильтрации . . . . .	94
§ 15. Выделение квазимонохроматических сигналов фильтрами II типа . . . . .	97
Г л а в а III. Выделение сигналов известной формы на фоне случайных помех . . . . .	101
§ 16. Фильтры для сигналов известной формы . . . . .	101
§ 17. Согласованный фильтр или коррелятор . . . . .	108
§ 18. Коррелятор в видеоканале радиолокационной станции	115
§ 19. Теорема Котельникова и сопряженная теорема . . . . .	122

§ 20. Гребенчатый фильтр и согласованный фильтр (коррелятор) для последовательности радиоимпульсов . . . . .	127
§ 21. Фильтр Урковица . . . . .	138
§ 22. О фильтрах, выделяющих сигналы известной формы . . . . .	146
<b>Глава IV. Случайные последовательности . . . . .</b>	<b>148</b>
§ 23. Фильтрация стационарных случайных последовательностей . . . . .	148
§ 24. Теорема Хинчина для последовательностей. Некоторые вопросы фильтрации последовательностей . . . . .	153
§ 25. Фильтр для выделения последовательностей известной формы . . . . .	157
§ 26. Фильтрация последовательностей и процессов. I . . . . .	159
§ 27. Фильтрация последовательностей и процессов. II . . . . .	165

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### Статистическая теория оптимальных приемников

<b>Глава V. Прием как статистическая задача . . . . .</b>	<b>170</b>
§ 28. Вероятностный характер приема . . . . .	170
§ 29. Апостериорные вероятности и коэффициенты правдоподобия . . . . .	173
§ 30. Априорные вероятности. Решающие схемы . . . . .	181
§ 31. Простое обнаружение сигнала на фоне коррелированных нормальных помех . . . . .	186
§ 32. Сложное обнаружение сигнала с неизвестной амплитудой . . . . .	195
§ 33. Обнаружение сигнала с неизвестной фазой . . . . .	198
§ 34. Обнаружение сигнала с неизвестными фазой и амплитудой . . . . .	209
§ 35. Обнаружение случайного процесса (полезного сигнала) на фоне другого случайного процесса (помехи) при заданных корреляционных свойствах обоих процессов . . . . .	214
<b>Глава VI. Обнаружение пачки сигналов . . . . .</b>	<b>222</b>
§ 36. Когерентная и некогерентная пачки сигналов. О коррелированных помехах в радиолокации . . . . .	222
§ 37. Обнаружение некогерентной пачки сигналов на фоне нормальных помех . . . . .	229
§ 38. Характеристики приемника, обнаруживающего некогерентную пачку . . . . .	233
§ 39. Обнаружение когерентной пачки на фоне нормальных коррелированных помех . . . . .	246
§ 40. Оптимальное обнаружение когерентной пачки при различных скоростях цели . . . . .	249
§ 41. Обнаружение когерентной пачки сигналов за два периода повторения при известном и неизвестном смещениях частоты . . . . .	253
§ 42. Вероятности $F$ и $D$ при череспериодном вычитании . . . . .	258
<b>Глава VII. Радиолокационное обнаружение „мерцающей цели“ . . . . .</b>	<b>267</b>
§ 43. Флюктуации полезного сигнала . . . . .	267
§ 44. Коэффициент правдоподобия для некогерентной пачки . . . . .	271
§ 45. Характеристики приемника, производящего квадратичное суммирование . . . . .	275

§ 46. Различные аппроксимации в задачах об обнаружении некогерентной пачки . . . . .	283
§ 47. Коэффициент правдоподобия для когерентной пачки . . . . .	294
§ 48. Оптимальный приемник в частных случаях . . . . .	299
§ 49. Характеристики приемника, образующего череспериодную разность . . . . .	304
<b>Глава VIII. Измерение параметров полезного сигнала при наличии помех . . . . .</b>	<b>309</b>
§ 50. Измерение параметра по максимуму апостериорной вероятности . . . . .	309
§ 51. Выделение случайного сигнала на фоне случайных помех . . . . .	316
§ 52. Измерение параметра сигнала при слабых и сильных помехах . . . . .	319
§ 53. Простое измерение времени прихода сигнала при слабых помехах . . . . .	329
§ 54. Сложное измерение времени прихода сигнала при слабых помехах . . . . .	337
§ 55. Измерение момента прихода сигнала при произвольных помехах . . . . .	341
§ 56. Задача о различении $M$ ортогональных сигналов . . . . .	346
§ 57. Обнаружение сигнала с дискретным параметром и измерение этого параметра . . . . .	355

### ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

#### Вспомогательные вопросы

<b>Глава IX. Случайные величины и случайные процессы нормального типа . . . . .</b>	<b>364</b>
§ 58. Характеристические функции нормальных (гауссовых) случайных величин . . . . .	364
§ 59. Многомерные распределения Гаусса . . . . .	368
§ 60. Распределение вероятностей для огибающих . . . . .	373
§ 61. Тепловые и дробовые шумы как примеры нормальных случайных процессов . . . . .	376
<b>Глава X. Теория флюктуационной модуляции . . . . .</b>	<b>381</b>
§ 62. Модуляция синусоидального колебания нормальным процессом по амплитуде, частоте и фазе . . . . .	381
§ 63. Корреляционная функция и спектр модулированных колебаний . . . . .	385
§ 64. Модуляция с помощью монохроматических колебаний (квазисинусоидальная модуляция) . . . . .	389
§ 65. Предельные случаи спектральных распределений . . . . .	392
§ 66. Зависимость ширины спектра модулированных колебаний от ширины спектра модулирующих колебаний . . . . .	395
<b>Глава XI. Хаотические отражения . . . . .</b>	<b>399</b>
§ 67. Помехи, обусловленные хаотическими отражениями . . . . .	399
§ 68. Явление Допплера . . . . .	406
§ 69. Функция корреляции помехи, обусловленной хаотическими отражениями . . . . .	410



§ 70. Рассеяние радиоволн на блуждающих частицах . . . . .	415
§ 71. Применение теории флюктуационной модуляции к хаотическим отражениям . . . . .	421
<i>Приложение I. Теория статистических решений и оптимальные приемники . . . . .</i>	<i>424</i>
<i>Приложение II. Об отношении сигнал/помеха при неоптимальной линейной обработке входных данных . . . . .</i>	<i>429</i>
<i>Приложение III. О парадоксах в теории обнаружения . . . . .</i>	<i>431</i>
<i>Приложение IV. Преобразование немонохроматических сигналов вследствие явления Допплера . . . . .</i>	<i>438</i>
<i>Приложение V. О „светящихся точках“ . . . . .</i>	<i>440</i>
<i>Литература . . . . .</i>	<i>441</i>

Л. А. ВАЙНШТЕЙН, В. Д. ЗУБАКОВ  
ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ  
СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

Редактор *Н. Д. Иванушко*  
Технич. редактор *А. А. Свешников*  
Обложка художника *В. В. Волкова*

---

Сдано в набор 29.VI.1959  
Подписано к печати 30.I.1950.  
Формат бумаги 84×108/32 Объем 22,96 печ. л.  
Уч.-изд. л. 22,042

Г-62158 Заказ 483

Цена в перепл. № 5 12 р. 50 к.,  
в перепл. № 7—13 р.

---

Типография Госэнергоиздата,  
Москва, Шлюзовая наб., 10.

### ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
89	13 сверху	$V(\omega)$	$V(\omega)$
190	4 сверху	$K_{\rho}$	$k_{\rho}$
203	2 сверху	$E_n$	$E_n$
423	15 сверху	максвелловы	максвелловым
426	ф-ла (1.09)	$\dots - C_{F_0} p_0(f) dF_0 +$ $+ P(1) C_{D_0} + P(0) C_f.$	$\dots - C_{F_0} p_0(f) df +$ $+ P(1) C_{D_0} + P(0) C_F.$

