я. с. ицхоки

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА Переходных процессов в сложных линейных цепях



Издательство «Советское радио» Москва — 1969 Ицхоки Я. С. Приближенный метод анализа переходных процессов в сложных линейных цепях. М., Изд-во «Советское радио», 1969, 176 стр., т. 21.000 экз., ц. 43 коп.

В работе излагается сравнительно простой и достаточно универсальный метод приближенного анализа переходных процессов в сложных линейных диссипативных цепях с постоянными параметрами. Упрощение анализа достигается благодаря понижению порядка дифференциального уравнения, описывающего анализируемый процесс, и введению в полученное решение надлежащего запаздывания. При этом метод оказывается применимым не только для анализа монотонно изменяющегося переходного процесса, но также и для процесса, содержащего затухающие колебания. Универсальные графики и предельно простые формулы позволяют быстро оценить погрешность приближения.

Метод иллюстрируется рядом типичных примеров из области импульсной техники. В частности, рассматриваются переходные характеристики идеализированного транзистора, транзисторной ключевой схемы, многокаскадного усилителя, усилителя с коррекцией, многозвенной линии задержки и др.

Книга предназначена для инженеров, аспирантов и студентов.

4 табл., 41 рис., библ. 30 назъ.

Появление этой работы было вызвано методическими затруднениями в изложении курса импульсной техники после внедрения в нее транзисторных устройств. Последнее привело к повышению на два порядка и более анализируемых дифференциальных уравнений. Так как известные приближенные методы анализа либо чересчур громоздки, либо малоуниверсальны, то была предпринята попытка изыскания более удобного метода приближенного анализа переходных процессов, встречающихся в задачах импульсной техники.

Автор поставил перед собой методическую задачу: дать по возможности простое и наглядное обоснование рекомендуемого метода анализа, исходя из широко известных спектральных представлений и операционного анализа (хотя это можно сделать также и из других фундаментальных представлений). Можно думать, что ограниченность применения известных методов анализа объясняется также недостаточной их методической разработкой. Поэтому было обращено особое внимание на методическую сторону изложения. Это, в частности, нашло отражение в обосновании и формулировке простых условий применимости метода, в детальном изложении рецептуры его использования и в изыскании возможно более простых способов оценки погрешности приближения. Существенное внимание уделено иллюстрации применений метода анализа.

Излагаемый в данной работе метод анализа успешно использовался в учебном процессе. Можно надеяться, что метод найдет применение также и в инженерной практике. Преследуя прикладные цели, автор исключил из основного текста сравнительно громоздкий анализ

3

условий существования приближенного решения, который дан в приложении; в основной текст включены лишь результаты такого анализа. По этой же причине в работу не включены громоздкие выкладки, связанные с оценкой погрешности приближения, хотя основные идеи такого анализа и полученные результаты освещены достаточно полно.

Распределение материала книги преследует цель более удобного ее использования читателями широкого круга. В § 1 излагаются основные положения метода. Полезно хотя бы бегло ознакомиться с этим несложным материалом. В небольшом § 2 изложена рецептура метода анализа. Именно этот материал в первую очередь необходим для практических применений. В § 4 дается обоснование рекомендуемых способов оценки погрешности приближения. Читатель, не интересующийся таким обоснованием, может ограничиться изучением пп. 12-18 § 1. В § 3 приводятся примеры применения приближенного метода анализа. Этот материал имеет не только иллюстративное и методическое значение, поскольку в нем даны решения задач, интересных для импульсной техники. Здесь, в частности, выводятся переходные характеристики транзисторов и транзисторной ключевой схемы при смешанной нагрузке, переходные характеристики многокаскадных усилителей, корректированного усилителя, многозвенной линии задержки и др.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А. А. Куликовскому, О. Н. Литвиненко и И. М. Синдееву за полезные советы, учтенные при подготовке рукописи к изданию, а также К. К. Рыжовой, Р. И. Шавриной и Т. Д. Пщелко за тщательно выполненные вычислительные работы значительного объема, которые были нужны для анализа погрешностей приближения и для иллюстрации применений данного метода анализа. Особую благодарность автор выражает С. Я. Шацу и Н. И. Овчинникову, проявившим большой интерес и внимание к данной работе на всех стадиях ее формирования, что способствовало методической отработке рукописи.

Введение

При анализе переходных процессов в сложных линейных цепях приходится находить решения дифференциальных уравнений высоких порядков. Независимо от трудностей получения такого решения громоздкий результат строгого анализа плохо обозрим и неудобен для технических расчетов. Это определило повышенный интерес к приближенным методам анализа переходных процессов.

На практике часто прибегают к упрощению анализируемой схемы путем представления ее приближенными «укороченными» эквивалентными схемами низкой н высокой частоты, используемыми для раздельного анализа соответственно «медленного» и «быстрого» этапов переходного процесса. Упрощение решаемой задачи (в самой ее формулировке) здесь достигается ценой пренебрежения влиянием «второстепенных» параметров цепи на анализируемую часть переходного процесса. В ряде случаев такой прием приводит к удачным решениям [1]. Но при анализе сложных цепей не всегда ясна допустимость упрощения схемы. Кроме того, при таком подходе полностью пренебрегают влиянием некоторых элементов схемы на анализируемую часть переходного процесса, что часто нежелательно, а иногда и недопустимо. Наконец, могут возникнуть трудности при необходимости «сшивания» различных этапов переходного процесса.

В некоторых случаях прибегают к анализу переходных процессов методом асимптотических решений, описывающих процесс в окрестности некоторого момента t (обычно в окрестности t=0 или $t=\infty$). Однако при необходимости обозрения процесса в достаточно широкой области времени этот метод становится чрезмерно громоздким.

К наиболее известным методам приближенного анализа переходных процессов относится метод моментов [2, 3]. В работе А. Г. Майера и Е. А. Леонтович [4] еще в 1934 г. было показано, что «центр тяжести» и «продолжительность» сигнала f(t) оцениваются путем использования интегральных моментов квадрата функции f(t). В 1948 г. метод моментов использовался В. Элмором [5, 6] для анализа параметров переходных процессов в многокаскадных широкополосных усилителях. Впоследствии этот метод был развит в работах Л. А. Мееровича и Г. П. Тартаковского [7, 8]. В работах С. Я. Шаца [9, 10 и др.], а также в работах Б. Н. Файзулаева [11, 12] применяются хотя и с разных позиций, но близкие аппроксиматические методы анализа переходных процессов. Ряд методов анализа описан в книгах Г. К. Гаврилова [13] и О. Б. Лурье [14].

Каждый из упомянутых методов (кроме метода моментов, являющегося в принципе универсальным) предназначен для решения задач определенного узкого типа. Так, например, аппроксиматический метод применим для анализа процессов, содержащих одну резко выделяю-щуюся «медленную» и ряд «быстрых» составляющих процесса; напротив, интересный метод «эталонных функций» [13] эффективен при близости корней характеристического уравнения системы. Все указанные выше методы применяются при анализе только монотонно изменяющихся процессов. Правда, в работе [8] показано, что путем представления немонотонного процесса суммой экспоненциальных функций можно расширить применение метода моментов для анализа и немонотонных процессов. Однако, если процесс выражается суммой более двух экспоненциальных функций, возникают мето-дические трудности в нахождении приближенного решения, и метод практически неприменим для анализа существенно колебательных процессов. Значительные методические трудности при анализе колебательных процессов возникают и при использовании метода, изложенного в работе [14].

В ряде задач импульсной техники приходится оперировать также и с немонотонно изменяющимися процессами, содержащими затухающие колебательные составляющие (не всегда «паразитного» происхождения), причем в некоторых случаях амплитуда колебаний весьма велика. В связи с этим полезно разработать достаточно простой и универсальный метод приближенного анализа переходных процессов, содержащих, в частности, и затухающие колебания значительной амплитуды.

Как показал опыт решения многих задач импульсной техники, анализ переходных процессов в сложных диссипативных линейных цепях довольно широкого класса можно существенно упростить путем понижения порядка («укорочения») исходного дифференциального уравнения и введения надлежащего запаздывания в найденное упрощенное решение. «Укороченное» решение получается и при использовании других известных методов, но рецептура «укорочения» и определения эквивалентного запаздывания, применяемая в данной работе, отличается от используемых в других работах и является более универсальной, ввиду чего она свободна от ограничений, существенных, например, для *аппроксиматических методов*, используемых в работах [9—12].

По характеру решаемой задачи (приближение операционных изображений аппроксимируемого и аппроксимирующего сигналов) используемый в данной работе метод ближе всего к методу разложения операционных изображений сигналов в ряды Маклорена, развитому в работах В. А. Боднера [15] и Ю. А. Рязанова [15а] применительно к синтезу систем автоматического регулирования. Но различный характер анализируемых сигналов, различное целевое назначение методов (что обусловливает различные требования к простоте решешения, к точности аппроксимации и к оценке погрешности приближения) и применение в описываемом методе запаздывания, что обусловлено особенностью анализируемых сигналов, - все это определило различие как в рецептуре нахождения аппроксимирующей функции, так и в методике оценки погрешности приближения.

В простейших случаях, когда переходный процесс изменяется монотонно (а также при выполнении некоторых других условий), описываемый метод приводит к тому же результату, который вытекает из метода моментов [9, 10]. В этом смысле применяемый в работе способ близок к методу моментов. Но он приложим также и к анализу колебательных процессов. В этом случае применяется надлежащий порядок приближения, для выбора которого формулируются некоторые положения (правила), позволяющие просто и надежно установить нужный порядок приближения. Особенно существенно то, что при этом не требуется предварительного установления характера анализируемого процесса — его монотонности (что не просто сделать по данным исходного дифференциального уравнения). Это тем более важно, что, как показывается в работе, в некоторых случаях при анализе даже монотонных процессов получаемый по методу моментов результат первого приближения оказывается неудовлетворительным. Следовательно, фактор монотонности процесса, являющийся отправным в методе моментов [5, 6], не может служить надежным и удобным признаком для выбора нужного порядка приближения. От метода моментов описываемый способ отличается также постановкой задачи приближения (здесь не применяются интегральные моменты, хотя их и можно было использовать для обоснования метода) и методикой оценки погрешности приближения.

При разработке данного метода анализа не ставилась задача оптимизации получаемого решения. Это, с одной стороны, вынуждалось трудностью формулировки достаточно универсального критерия качества приближения, который удовлетворял бы различным требованиям практики, так как они зависят от характера решаемой задачи. С другой стороны, применение известных критериев приближения (например, критерия по минимуму среднеквадратичного искажения) приводит применительно к рассматриваемым задачам «с запаздыванием» к столь сложной процедуре нахождения приближенного решения, что обесценивается само применение приближенного анализа*. Ввиду этих обстоятельств, поскольку считалось, что *требование простоты отыскания*

^{*} Однако контрольное сравнение оптимизированных и неоптимизированных приближенных решений, которое удалось осуществить средствами вычислительной техники, было произведено. Это сравнение убедило в практической нецелесообразности применения трудно конструируемого приближенного решения, оптимизированного по критерию минимума среднеквадратичного искажения (см. § 1, п. 17).

приближенного решения является одним из важнейших, особое внимание уделено формулировке простых правил для выбора нужного порядка приближения и разработке удобных для практических расчетов способов приближенной оценки погрешности аппроксимации.

Анализ линейных дифференциальных уравнений в работе поризводится на базе операционного метода. Преобразованные по Лапласу изображения временных функций обозначаются теми же символами, что и сами функции времени, но снабжаются специальным значком, как, например:

$$\widehat{h} = \widehat{h}(p) = \int_{0}^{\infty} h(t) e^{-pt} dt \rightarrow h(t) = h.$$

Каждый параграф, а также приложения имеют свою порядковую нумерацию формул, рисунков и таблиц.

1. Основные положения

Постановка задачи

1. При анализе переходных процессов в сложных линейных цепях приходится оперировать с дифференциальными уравнениями высоких порядков, которым, в частности, соответствуют нормированные $(a_0=1)$ операционные уравнения вида *

$$\widehat{h}(p) = \frac{1}{p(1+a_1p+\ldots+a_np^n)} = \frac{1}{pA_n(p)} \stackrel{\cdot}{\rightarrow} h(t). \quad (1.1)$$

В дальнейшем имеются в виду широко применяемые в импульсной технике диссипативные цепи с постоянными параметрами, напряжения и токи в которых при $t \rightarrow \infty$ стремятся к постоянным значениям. В этом случае все коэффициенты a_i ($i=1, 2, ..., n \neq 0$) — постоянные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0.$$
 (1.1a)

Соблюдение этих неравенств необходимо для выполнения условий диссипативности цепи, но при $n \ge 3$ недостаточно. Более общие условия диссипативности определяются *теоремой Гурвица*, из которой вытекает, что при $n \ge 3$ коэффициенты a_i , начиная с i=3, должны кроме неравенств (1.1а) удовлетворять также неравенствам

 $a_i < a_{i, \text{Kp}}(i \ge 3).$ (1.16)

^{*} Более общий случай операционного изображения в виде рациональной дроби рассматривается в пп. 19—25.

Критические значения $a_{i, \text{кр}}$ выводятся из уравнений $D_i = 0$, где D_i — определители, фигурирующие в условиях Гурвица [16]. В частности, при n=3 и 4

$$a_{3,kp} = a_1 a_2; \quad a_{4,kp} = \frac{a_3^2}{a_1^2} \left(\frac{a_1 a_2}{a_3} - 1 \right).$$
 (1.1B)

Искомая функция h = h(t) отличается характерным «запаздыванием» (рис. 1.1), обусловленным тем, что n-1 первых производных функции h в момент t=0 равны нулю. Часто функция h в окрестности t=0 маловы-



Рис. 1.1. Аппроксимация сигнала h запаздывающей функцией $h_{2}=h_{3m}$.

разительна: приходится суммировать немало членов функционального ряда, выражающего h, чтобы убедиться в приближенном равенстве $h(t) \cong 0$ при $t \cong 0$ (см., например, функции (П.2.6), (П.2.11), (П.2.16) приложения 2).

2. Функция h неудобна не только из-за сложности нахождения решения уравнения (1.1), но также из-за трудности последующего оперирования с ней и, в частности, из-за трудности нахождения корня трансцендентного уравнения

$$h(t) = h_0,$$
 (1.2)

определяющего момент t_0 достижения заданного уровня h_0 (рис. 1.1). Нахождение такого момента (при $0,1h_{\max} \ll h_0 \ll 0,9h_{\max}$) обычно является целью анализа, производимого в задачах импульсной техники.

Для упрощения анализа желательно заменить функцию *h* более простой *«эквивалентной»* функцией *h*_э= $=h_{\partial}(t)$, достаточно хорошо аппроксимирующей функцию h; такое соответствие двух функций и их изображений обозначим условно в виде

$$h_{\mathfrak{d}}(t) \sim h(t); \ \widehat{h}_{\mathfrak{d}}(p) \propto \widehat{h}(p).$$

Из рассмотрения характера функции h (рис. 1.1) вытекает целесообразность использования з а паздывающей на некоторое время t_3 функции

$$h_{\mathfrak{d}} = f_{\mathfrak{d}}(t - t_{\mathfrak{d}}) \cdot 1(t - t_{\mathfrak{d}}),$$
 (1.3)

которая при $t \leq t_3$ равна нулю, а при $t > t_3$ мало отличается от функции h.

Применительно к задачам импульсной техники критерий степени приближения функций h_э~h связан с величиной допустимой «временной» погрешности Δt (рис. 1.1) в определении корня уравнения (1.2). Из практических соображений здесь обычно допустима сравнительно большая относительная погрешность | $\Delta t/t_0$ | (до 20%' и даже выше). Более важным являются максимальное упрощение функции (1.3), облегчающее решение трансцендентного уравнения (1.2), и разработка простой и стандартной рецептуры отыскания функции ha.

3. Будем искать аппроксимирующую функцию (1.3) в классе функций $h_a = \dot{h}_{am}$, операционное изображение которых

$$\hat{h}_{3m} = \hat{h}_{3m}(p) = \frac{e^{-pt_{3m}}}{p(1+b_1p+\dots+b_mp^m)} = \frac{e^{-pt_{3m}}}{pB_m(p)},$$
(1.4)

где степень m полинома $B_{mi}(p)$ (m=0, 1, 2, ...) возможно ниже степени n полинома $A_n(p)$ в исходном уравнении (1.1).

Условимся считать, что аппроксимирующая функция h_{3m} представляет приближенное решение m-го по-рядка приближения (приближение m-го порядка); порядок приближения фиксируется индексом т.

Решение уравнения (1.4) выражается функцией (1.3), где $t_3 = t_{3m}$ и $\int_3(t) = f_{3m}(t)$ — оригинал изображения

$$\hat{f}_{3m} = \hat{f}_{3m}(p) = \frac{1}{p(1+b_1p+\cdots+b_mp^m)} = \frac{1}{pB_m(p)}.$$
 (1.5)

12

Раскладывая в выражении (1.4) в ряд множитель

$$e^{-pt_{3m}} = \left(1 + p \frac{t_{3m}}{1!} + p^2 \frac{t_{3m}^2}{2!} + p^3 \frac{t_{3m}^3}{3!} + \dots\right)^{-1}$$

и перемножая образуемые в знаменателе полиномы, получим

$$\widehat{h}_{3m} = \frac{1}{pC_{\infty}(p)} = \frac{1}{p(1+c_1p+c_2p^2+\ldots)} \stackrel{!}{\to} h_{3m}, \quad (1.6)$$

где коэффициенты бесконечного степенного полинома $C_{\infty}(p)$

$$c_{1} = b_{1} + t_{3m},$$

$$c_{2} = b_{2} + \frac{b_{1}t_{3m}}{1!} + \frac{t_{3m}^{2}}{2!},$$

$$c_{m} = b_{m} + \frac{b_{m-1}t_{3m}}{1!} + \dots + \frac{b_{1}t_{3m}^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t_{3m}^{m}}{m!},$$

$$c_{m+1} = t_{3m} \left[\frac{b_{m}}{1!} + \frac{b_{m-1}t_{3m}}{2!} + \dots + \frac{b_{1}t_{3m}^{m-1}}{m!} + \dots + \frac{t_{3m}^{m}}{(m+1)!} \right],$$

$$c_{m+2} = t_{3m}^{2} \left[\frac{b_{m}}{2!} + \frac{b_{m-1}t_{3m}}{3!} + \dots + \frac{b_{1}t_{3m}^{m-1}}{m!} + \dots + \frac{b_{1}t_{3m}^{m-1}}{(m+1)!} + \frac{t_{3m}^{m}}{(m+2)!} \right],$$

$$(1.7)$$

Выбор и обоснование приемлемого решения

4. Поставленная задача заключается в определении m+1 неизвестных параметров: запаздывания t_{3m} и m коэффициентов b_j (j=1, 2, ..., m) «укороченного» уравнения (1.5). Заметим, что, принимая аппроксимирующее изображение (1.4), мы тем самым уже определили нулевой коэффициент полинома $B_m(p)$: приняли его в соответствии с функцией (1.1) равным 1 $(b_0=c_0=$

 $=a_0=1$). Это сделано из условия совпадения функций $h_{3m}(t)$ и h(t) при $t=\infty$ [17]:

$$h_{3m}(\infty) = \lim_{p \to 0} [p\hat{h}_{3m}(p)] = \lim_{p \to 0} [p\hat{h}(p)] = h(\infty).$$
(1.8)

Интуитивно напрашивается мысль: приравнять первые m+1 коэффициентов c_i изображения (1.6) соответственно первым m+1 коэффициентам a_i изображения (1.1), что даст затем возможность найти m+1 неизвестных параметров изображения (1.4) из первых m+1уравнений системы (1.7). Однако допустимость такого простого правила должна быть доказана (этот вопрос обсуждается в приложении 1), а его приемлемость должна быть обоснована хотя бы качественно.

При определении параметров изображения (1.4) желательно минимизировать ошибки аппроксимации. Применительно ко многим задачам импульсной техники явилось бы приемлемым минимизировать ошибку определения междецильного времени * (активной длительности t_{Φ} фронта сигнала) или, еще лучше, среднюю величину относительной ошибки $|\Delta t/t_0|$ в междецильном интервале ($t_{0,1}, t_{0,9}$). Можно ограничиться более удобной в аналитическом отношении минимизацией средней величины $|\Delta t|$ в области $0 < t < \infty$. Этому требованию удовлетворяет критерий минимума абсолютной интегральной оценки

$$I = \int_{0}^{\infty} |h(t) - h_{3m}(t)| dt.$$
 (1.9)

Заметим, что если выполняется равенство коэффициентов $a_1 = c_1$ полиномов $A_n(p)$ и $C_{\infty}(p)$, то независимо от соотношения остальных коэффициентов этих полиномов интегральная оценка 1-го порядка, т. е. величина

$$I_{1} = \int_{0}^{\infty} \left[h(t) - h_{3m}(t) \right] dt, \qquad (1.10)$$

^{*} Под междецильным временем подразумевается интервал времени между моментами $t_{0,1}$ и $t_{0,9}$ достижения сигналом h(t) (па фронте сигнала) соответственно значений 0,1 h_{max} и 0,9 h_{max} .

равна нулю [3]. Интеграл (1.10) определяет суммарную величину (в алгебраическом смысле) площади искажения, заключенной между графиками функций h(t) и $h_{3m}(t)$. Однако равенство $I_1=0$ в общем случае не обеспечивает минимума интеграла (1.9), и оно само по себе не может служить критерием качества аппроксимации.

Определение интеграла (1.9) по данным изображений функций сопряжено с принципиальными трудностями. В принципе проще осуществить минимизацию интегральной оценки I₂ 2-го порядка [3, 18], поскольку из теоремы Релея (равенства Парсеваля) следует, что I₂ выражается непосредственно через изображения функций:

$$I_{2} = \int_{0}^{\infty} [h(t) - h_{3m}(t)]^{2} dt = \int_{0}^{\infty} |\hat{h}(j\omega) - \hat{h}_{3m}(j\omega)|^{2} \frac{d\omega}{\pi}, \quad (1.11)$$

где $h(j\omega)$ и $h_{3m}(j\omega)$ — спектральные функции сигналов, получаемые из функций (1.1) и (1.4) или (1.6) при подстановке $p = j\omega$.

Величина I_2 является функцией искомых и известных параметров изображений (1.4) и (1.1), т. е. $I_2 = I_2$ (t_{3m} , $b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n$). Оптимальные значения искомых параметров, минимизирующие величину I_2 , в принципе находятся из решения системы уравнений

$$\frac{\partial I_2}{\partial t_{3m}} = 0; \ \frac{\partial I_2}{\partial b_1} = 0; \dots \frac{\partial I_2}{\partial b_m} = 0.$$
(1.12)

Однако такой путь встречает большие математические трудности. Хотя и известны приемы вычислений интеграла I_2 [18], но в большинстве случаев это сопряжено с громоздкими расчетами. Но даже когда при простейших сигналах интеграл I_2 выражается сравнительно просто, уравнения (1.12) при наличии запазды вающей функции h_{3m} оказываются трансцендентными. Для иллюстрации укажем, что при простейшем уравнении (1.1) вида $\hat{h} = [p(1+p)^2]^{-1}$ система уравнений (1.12) сводится к двум уравнениям относительно $t_{31} = x$ и $b_1 = y$:

$$\frac{e^x}{4} = \frac{x(1+y)+3y+1}{(1+y)^3}; \quad x = \frac{1+3y-2y^2}{y^2-1}.$$

Таким образом, даже если критерий минимума I_2 удовлетворяет требованиям практики, применять его практически нецелесообразно: проще получить строгое решение, чем таким путем найти $h_{3m} \sim h$.

5. Ввиду отмеченных принципиальных трудностей уже в самой формулировке задачи приближения $h_{3m} \sim h$ и методических затруднений в решении сформулированной задачи приходится прибегать к эвристическому подходу в постановке и решении такой задачи, основанному на качественных представлениях. Здесь удобно обратиться к рассмотрению спектральной функции сигнала

$$\hat{h}(j\mathbf{\omega}) = [j\omega (1 + ja_1\omega - a_2\omega^2 - \frac{g}{2}ja_3\omega^3 + a_4\omega^4 + ...)]^{-1}.$$
(1.13)

Представим комплексную функцию (1.13) через совокупность модульной функции $H(\omega)$ и фазовой функции $\varphi(\omega)$:

$$\widehat{h}(j\omega) = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega (P+jQ)} = H(\omega) e^{-j[\pi/2 + \varphi(\omega)]}, \qquad (1.14)$$

где

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega \sqrt{P^2 + Q^2}}; \ \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}, \qquad (1.15)$$

причем согласно формуле (1.13)

$$P = 1 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + \dots, \qquad (1.16)$$

$$Q = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - a_7 \omega^7 + \dots$$
 (1.16a)

Используя последние два равенства, представим сумму $P^2 + Q^2$, определяющую модульную функцию, и tg φ (для $\varphi < \pi/2$), определяющий фазовую функцию, с помощью рядов *:

$$P^{2} + Q^{2} = M_{0} + M_{2}\omega^{2} + M_{4}\omega^{4} + \dots, \qquad (1.17)$$

$$tg \varphi = M_1 \omega + M_3 \omega^3 + M_5 \omega^5 + ...,$$
 (1.17a)

где

$$M_{0} = a_{0} = 1;$$

$$M_{2} = M_{2}(a_{1}, a_{2}) = a_{1}^{2} - 2a_{2};$$

$$M_{4} = M_{4}(a_{1}, a_{2}, a_{3}, a_{4}) = a_{2}^{2} - 2a_{1}a_{3} + 2a_{4};$$
(1.18)

* Если $\phi > \pi/2$, то tg ϕ раскладывается в ряд по степеням $\omega - \omega_0$, где $\omega_0 - частота$, при которой $\phi = \pi/2$.

Аналогично выражается спектральная функция аппроксимирующего сигнала h_{3m} ; используя изображение (1.6), найдем:

$$\widehat{h}_{\mathfrak{s}\mathfrak{m}}(j\omega) = H_{\mathfrak{m}}(\omega) \, \mathrm{e}^{-j[\pi/2 + \varphi_{\mathfrak{m}}(\omega)]} \,, \qquad (1.19)$$

где

$$H_m(\omega) = \frac{1}{\omega \sqrt{P_m^2 + Q_m^2}}; \ \varphi_m(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_m}{P_{\omega m}}; \quad (1.20)$$

$$P_m^2 + Q_m^2 = N_0 + N_2 \omega^2 + N_4 \omega^4 + \dots; \qquad (1.21)$$

$$tg \,\varphi_m = N_1 \omega + N_3 \omega^3 + N_5 \omega^5 + ...; \qquad (1.21a)$$

$$N_{0} = c_{0} = 1;$$

$$N_{2} = N_{2}(c_{1},c_{2}) = c_{1}^{2} - 2c_{2};$$
(1.22)

$$\left. \begin{array}{c} N_{1} = N_{1} \left(c_{1} \right) = c_{1}; \\ N_{3} = N_{3} \left(c_{1}, c_{2}, c_{3} \right) = c_{1}c_{2} - c_{3}; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$
(1.22a)

6. Пусть h(t) — монотонно нарастающий сигнал. Тогда компоненты $H(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ спектральной функции сигнала также изменяются монотонно, как это примерно показано на рис. 1.2. Оптимальному в том или ином смысле приближению $h_{3m} \sim h$ соответствует надлежащее приближение как модульных функций $H_m \circ H$, так и фазовых функций φ_m φ, примерно показанное на рис. 1.2. Совпадение этих функций при ω→0 соответствует совпадению сигналов при *t*→∞. Чем в большей окрестности ω=0 сближаются компоненты спектральных функций, тем больше (в сторону меньших времен) рас-ширяется область сближения сигналов. При этом существенно сближение как модульных $(H_m \circ H)$, так и фазовых (фтоф) функций. Действительно, при условии полного совпадения фазовых функций ($\phi_m = \phi$) квадрат заштрихованной на рис. 1.2 площади пропор-2-2247 17

ционален, как это вытекает из формулы (1.11), интегральной оценке I_2 . При этом величина $dI_2 = K(H-H_m)^2 d\omega$ (K=const) не зависит от величин Hи H_m в отдельности, а определяется только их разностью. Иначе говоря, величина dI_2 не зависит от того, к какой области частот (высоких или низких) относится разность $H-H_m$. Однако если имеется фазовое



Рис. 1.2. Спектральные функции исходного (*h*) и аппроксимирующего (*h*_{3m}) сигналов.

Рис. 1.3. К интегральной оценке погрешности аппроксимации при $\Delta \phi \neq 0$: a) $H = H_m$; 6) $H = H_m = \text{const} \neq 0$.

расхождение $\Delta \phi = \phi - \phi_m$, то даже при $H = H_m$ величина $I_2 \neq 0$, причем (рис. 1.3,*a*).

$$dI_{2} = K | \dot{H} - \dot{H}_{m} |^{2} d\omega = 4KH^{2} \sin^{2}(\Delta \varphi/2) d\omega. \quad (1.23)$$

Следовательно, чем больше модуль H, тем сильнее разность фазовых функций влияет на величину I_2 . К такому же выводу можно прийти и в общем случае, когда векторы H и H_m различаются не только фазами ($\Delta \phi \neq 0$), но и модулями ($H \neq H_m$). Это иллюстрируется на рис. 1.3,6, где показаны две пары векторов H', H'_m и H'', H''_m , расходящиеся по фазе на один и 18 тот же угол $\Delta \varphi$; обе пары векторов отличаются одинаковой величиной разности модулей $(H' - H'_m = H'' - H''_m)$ при различной величине самих модулей $(H' < H''_m)$ при различной величине самих модулей $(H' < H''_m + H'_m < H''_m)$. Как видно из рис. 1.3,6, если $\Delta \varphi \neq 0$, то модули геометрической разности пар векторов не равны, т. е. $|H' - H'_m| < |H'' - H''_m|$.

Следовательно, при одинаковой разности фаз $\Delta \varphi$ и разности модулей $H--H_m$ вклад $dI_2 = K |\dot{H}-\dot{H}_m|^2 d\omega$ будет тем более значительным, чем больше модуль H. Поэтому для уменьшения величины I_2 важно, чтобы точность приближения как фазовых, так и модульных функций повышалась с возрастанием H (с уменьшением ω).

7. Рассмотрим более детально ряд (1.17), определяющий модульную функцию $H(\omega)$, и ряд (1.17а), определяющий фазовую функцию φ(ω). Замечаем, что последовательные члены этих рядов отличаются резко различной степенью их зависимости от частоты ω. Поэтому в достаточно малой окрестности $\omega = 0$ сумма $P^2 + b^2$ +Q² ≅ M₀ (влиянием остальных членов ряда (1.17) можно пренебречь), а tg φ≅φ≅0. При некотором небольшом расширении указанной области частот в первую очередь начнет заметно возрастать член $M_1\omega$, определяющий в этой области величину tg φ ≅ M₁ω, но еще можно считать $P^2 + Q^2 \cong M_0$, так как последующие чле-ны рядов зависят от ω^2 , ω^3 и т. д. При дальнейшем небольшом расширении области частот может оказаться необходимым полагать $P^2 + Q^2 \simeq M_0 + M_2 \omega^2$, но еще можно считать tg φ≅M₁ω. Затем, по мере расширения частотной области, на величины рядов (1.17) и (1.17а) начнет заметно влиять член $M_3\omega^3$, затем член *М*₄ω⁴ и́т.д.

Аналогичные выводы можно сделать и в отношении зависимости рядов (1.21) и (1.21а) от последовательных членов этих рядов.

Учитывая отмеченные свойства рядов (1.17), (1.17а), (1.21) и (1.21а), а также принимая во внимание изложенное в п. 6, можно прийти к качественному выводу о том, что по мере повышения порядка m приближения $h_{3m} \sim h$ целесообразно потребовать выполнения возрастающего числа равенств:

2*

при
$$m = 0 \rightarrow M_1 = N_1;$$

при $m = 1 \rightarrow M_1 = N_1, M_2 = N_2;$
при $m = 2 \rightarrow M_1 = N_1, M_2 = N_2, M_3 = N_3$

и т. д. Принимая теперь во внимание выражаемые равенствами (1.18), (1.18а), (1.22) и (1.22а) функциональные зависимости, написанные равенства следует переписать на такие:

при
$$m = 0 \rightarrow a_1 = c_1;$$

при $m = 1 \rightarrow a_1 = c_1, a_2 = c_2;$
при $m = 2 \rightarrow a_1 = c_1, a_2 = c_2, a_3 = c_3;$
(1.24)

8. В соответствии с равенствами (1.24) можно сформулировать простое правило аппроксимации сигнала (1.1): для определения запаздывания t_{3m} и коэффициентов b_1, \ldots, b_m изображения (1.4) аппроксимирующей функции h_{3m} следует коэффициенты c_1, \ldots, c_m , c_{m+1} изображения (1.6) приравнять соответственно коэффициентам $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}$ изображения (1.1). Следовательно, первые m+1 равенств системы (1.7) образуют систему из m+1 уравнений относительно m+1параметров изображения (1.4):

$$a_{1} = b_{1} + t_{3m};$$

$$a_{2} = b_{2} + b_{1}t_{3m} + t_{3m}^{2}/2!;$$

$$a_{m} = b_{m} + \frac{b_{m-1}t_{3m}}{1!} + \dots + \frac{b_{1}t_{3m}^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t_{3m}^{m}}{m!};$$

$$a_{m+1} = \frac{b_{m}t_{3m}}{1!} + \dots + \frac{b_{1}t_{3m}^{m}}{m!} + \frac{t_{3m}^{m+1}}{(m+1)!}.$$
(1.25)

Исключая из системы (1.25) все коэффициенты b_j , получим уравнение степени m+1 относительно запаздывания $t_3 = t_{3m}$:

$$F_{m+1}(t_3) = \frac{t_3^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{a_1 t_3^m}{m!} + \dots + (-1)^{m+1} a_{m+1} = 0.$$
(1.26)

В приложении 1 показано, что только один и притом наименьший вещественный (всегда положительный) корень $t_3 = t_{3m}$ уравнения (1.26) (если он существует) вы-

ражает запаздывание при приближении порядка *m*. Некоторые способы нахождения такого корня описываются в § 2. После определения запаздывания легко находятся все остальные искомые параметры, разрешаемые из системы (1.25) в явном виде:

9. Устанавливаемая равенствами (1.24) весьма простая рецептура определения коэффициентов с_i изображения (1.6) аппроксимирующей функции базируется (визложенной выше спектральной трактовке) на том, что с повышением номера *i* члена (при коэффициенте *a_i*) полинома, определяющего спектральную функцию (1.13), уменьшается влияние этого члена на характеристики спектральной функции. Применительно к монотонно изменяющимся сигналам (и даже применительно к колебательным сигналам с достаточно сильным затуханием колебаний) это положение проявляется весьма сильно.

Для иллюстрации роли стдельных членов указанного выше полинома на характеристики спектральной функции (1.13) рассмотрим графики $H(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ модульной и фазовой функций (рис. 1.4 и 1.5) сигнала h(t), выражающего переходную характеристику усилителя (в области фронта), состоящего из n=9 идентичных каскадов, каждый из которых характеризуется постоянной времени θ . Пунктирными линиями изображены модульные функции $H_{\sim s}(\omega)$ и фазовые функции $\varphi_{\sim s}(\omega)$, построенные с учетом в рядах (1.16) и (1.16а) ограниченного числа первых членов (при коэффициентах a_1, a_2, \ldots, a_s). Графики построены в диапазоне $0 \le \omega \le 2\omega_r$, где $\omega_r = 0.28/\theta$ — граничная частота усилителя (на уровне половинной мощности).

Из рис. 1.4 и 1.5 наглядно видно, что приближенные функции $H_{\sim 2}$ и $\varphi_{\sim 2}$ близки к функциям H и φ в области низких частот $\omega < \omega_{\mathbf{r}}$; фазовое рассогласование здесь не превосходит $\sim 14^\circ$. Это позволяет оценивать «площадь искажения», соответствующую этой части спектра, непосредственно из графиков модульных функций.

Функции H₃ и 9₃ близкик функциям H и 9 в более широком диапазоне частот и т. д. При этом значимость каждого последующего приближения (в интегральном смысле) уменьшается.

21

10. Изложенные в пп. 6—9 рассуждения относились к сигналам, характеризуемым монотонным убыванием модульной функции $H(\omega)$. Но если сигнал h(t) содержит слабо затухающие колебания значительной сравни-



Рис. 1.4. Модульная функция H (и ее различные приближения $H_{\sim s}$) переходной характеристики 9-каскадного реостатного усилителя.

тельно с $h(\infty)$ амплитуды, то модульная функция может изменяться и не монотонно. Предположительно можно было бы ожидать, что и в этом случае в принципе нет ограничений для применения равенств (1.24) и вытекающих из них формул (1.25)—(1.27), если только порядок приближения достаточно высок, так как при $m \longrightarrow n$ 22 должно иметь место $h_{3m} \rightarrow h^*$. Однако применение приближения $h_{3m} \sim h$ практически оправдывается при достаточно низком порядке приближения. К тому же можно убедиться в том, что не при любом заданном



Рис. 1.5. Фазовая функция φ (и ее различные приближения φ_{s}) переходной характеристики 9-каскадного реостатного усилителя.

порядке приближения m < n существует (физически реализуется) приближение $h_{3m} \sim h$, даже если предъяв-

^{*} При переходе от приближения порядка m=k к приближению порядка k+1 погрешность аппроксимации уменьшается скачкообразно. Но если ввести понятие о дробном порядке приближения $M=m+\zeta$, где $\zeta \leq 1$ (см. § 4, п. 10), то погрешность аппроксимации можно (при некоторых ограничениях) рассматривать как непрерывную функцию M.

ляются ограниченные требования к точности аппроксимации и если допустимо пренебречь некоторыми второстепенными деталями анализируемого процесса.

В связи с изложенным возникают вопросы:

— каковы условия реализуемости приближения порядка *m*?

— при каком порядке *m* получается приемлемый результат?

- какова погрешность аппроксимации?

Выбор порядка приближения

11. В некоторых случаях уже приближение нулевого порядка (m=0) удовлетворяет требованиям решаемой задачи (см. § 3, п. 27). Как показал опыт применения данного метода приближенного анализа, если сигнал h изменяется монотонно или если даже он изменяется монотонно, но колебательный компонент сигнала не «паразитного» происхождения выражен слабо и сам по себе не представляет технического интереса, то при аппроксимации такого сигнала обычно можно огра-ничиться приближением 1-го порядка. Такая аппроксимация удовлетворительно отображает фронтовую часть сигнала, что позволяет с технической точностью оценить, например, его активную длительность фронта. Если колебательный процесс выражен в сигнале более сильно и он оказывает существенное влияние на форму сигнала, то, естественно, функция 1-го порядка приближения не в со-стоянии отобразить нужные свойства этого сигнала. Наинизший пригодный в этом случае порядок приближения *m*=2, но иногда приходится прибегать и к приближению 3-го порядка. К приближению 2-го порядка приходится обращаться и при аппроксимации монотонного сигнала h(t), если при этом ставится задача хорошей аппрок-симации не только функции h(t), но и ее производной.

Приближения порядка $m \ge 4$ представляют ограниченный практический интерес, что обусловлено как быстрым возрастанием трудности нахождения аппроксимирующей функции, так и сложностью последующего оперирования с ней.

Иногда качественный характер искомого переходного процесса известен из рассмотрения свойств анализируемой цепи, что может предоставить данные для выбора

нужного порядка приближения. Но не всегда это удается установить достаточно просто и надежно (см. п. 21). По-этому желательно располагать удобной рецептурой определения нужного порядка приближения. В этом отношении первое и при том весьма простое указание дают уста-новленные в приложении 1 необходимые условия существования (реализуемости) приближения любого поряд-ка т. Эти условия выводятся из требования, чтобы все ка m. Эти условия выводятся из треоования, чтоем все коэффициенты b_j (j=1, 2, ..., m) изображения (1.4) аппроксимирующей функции были положительными. Иначе приближенное решение окажется недиссипативным.

Как показано в приложении 1, приближение 1-го порядка реализуется при условии, что

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} < \lambda_{1, KP} = \frac{1}{2}.$$
 (1.28)

В общем случае, при любом *m*≥1, необходимое условие реализуемости приближения * сводится к выполнению неравенства

$$\boldsymbol{\lambda}_{m} = \frac{a_{m+1}}{a_{1}^{m+1}} < \boldsymbol{\lambda}_{m, \mathbf{k} \mathbf{p}}, \qquad (1.28a)$$

где $\lambda_{m, \text{кр}}$ — критическое значение параметра λ_m . Формулы, выражающие $\lambda_{m, \text{кр}}$, приводятся в § 2. При $\lambda_m = \lambda_{m, \text{кр}}$ приближение порядка m = k вырождается в приближение порядка k-1 (если оно существует) или же выражает недиссипативный процесс. При $\lambda_m \longrightarrow \lambda_{m, \mathrm{KD}}$ погрешность аппроксимации возрастает (иногда очень значительно). Но погрешность аппроксимации зависит не только от отношения $\lambda_m/\lambda_{m,kp} = \xi_m$, и для правильного выбора порядка приближения желательно располагать простой, но достаточно надежной оценкой погрешности аппроксимации.

Погрешность аппроксимации

12. Проще всего оценивается погрешность приближения изображений $\hat{h}_{3m} \sim \hat{h}$ [15a], или, что то же, по-

^{*} При $m \leqslant 2$ условие (1.28а) является необходимым и достаточным. При $m \geqslant 3$ необходимо дополнительно выполнить условия диссипативности аппроксимирующей функции, вытекающие из теоре-мы Гурвица (см. приложение 1, п. 13).

грешность приближения спектральных функций сигналов (в частотной области). Больший интерес, особенно применительно к задачам импульсной техники, представляет погрешность приближения во временной области, дающей непосредственное представление о погрешности аппроксимации. Но определение такой погрешности сопряжено с большими трудностями.



Рис. 1.6. «Временная» погрешность аппроксимации (при $h=0,1h_{\max} \Delta t = |t_{0,1} - \tilde{t}_{0,1}|;$ при $h=0,9h_{\max} \Delta t = t_{0,9} - \tilde{t}_{0,9}).$

В некоторых случаях важна оценка «амплитудной» погрешности $\Delta h = h - h_{3m}$ (или относительной величины $|\Delta h/h|$). Иногда можно ограничиться оценкой погрешности определения по данным аппроксимирующей функции h_{3m} действительной величины «вы броса» сигнала $h_{\text{Bыбр}} = h_{\text{max}} - h(\infty)$, содержащего колебательный компонент. Согласно равенству (1.8) определение погрешности

$$\Delta h_{\text{Bbl}\,\delta p} = [h_{\text{max}} - h(\infty)] - [(h_{\text{3}m})_{\text{max}} - h_{\text{3}m}(\infty)]$$

сводится к определению «амплитудной» погрешности $\Delta h_{\max} = h_{\max} - (h_{3m})_{\max}$ в точке $h = h_{\max}$. Относительная величина этой погрешности

$$\delta_{\text{BbI} \delta p} = \frac{\Delta h_{\text{BbI} \delta p}}{h_{\text{BbI} \delta p}} = \frac{h_{\text{max}} - (h_{3m})_{\text{max}}}{h_{\text{max}} - h(\infty)} \cdot \tag{1.29}$$

Иногда практический интерес представляет относительная погрешность определения междецильного интервала времени (активной длительности фронта) сигнала h по данным аппроксимирующей функции h_{зт}, т. е. погрешность

$$\delta_{\Phi} = \left| \frac{\Delta t_{\Phi}}{t_{\Phi}} \right| = \frac{|t_{\Phi} - \tilde{t}_{\Phi}|}{t_{\Phi}}, \qquad (1.30)$$

где (рис. 1.6) $t_{\Phi} = t_{0,9} - t_{0,1}$, а $\tilde{t}_{\Phi} = \tilde{t}_{0,9} - \tilde{t}_{0,1}$.

Применительно ко многим задачам импульсной техники основной интерес представляет «временная» погрешность аппроксимации в смысле, указанном в п. 2 (рис. 1.1). Оценка такой погрешности важна при анализе временных процессов в устройствах, содержащих каскады временной задержки сигналов, в каскадах линейно изменяющегося напряжения, в логических схемах, в транзисторных импульсных устройствах (в частности, при определении момента входа и выхода транзистора из насыщения) и др.

Таким образом, в разных задачах нас может интересовать погрешность приближения разного характера. Тем не менее при решении вопроса о выборе надлежащего порядка приближения $h_{3m} \sim h$ целесообразно, из методических соображений, исходить из какого-нибудь одного вида погрешности аппроксимации. В этом смысле, принимая во внимание как практическую значимость погрешностей аппроксимации разного характера, так и соображения, приводимые в конце данного п. 12, целесообразно исходить из наибольшегов междецильном интервале $(t_{0,1}, t_{0,9})$ относительного значения «временной» погрешности аппроксимации:

$$\delta_{t, \text{Hand}} = \left| \frac{\Delta t}{t} \right|_{\text{Hand}} = \left| \frac{t - \tilde{t}}{t} \right|_{\text{Hand}}; \quad (1.31)$$

здесь t или \tilde{t} — моменты времени, в которые соответственно функции h(t) и $h_{3m}(\tilde{t})$ принимают некоторое значение $h = h_0$ (0,1 $h_{\max} \leq h_0 \leq 0,9 h_{\max}$), причем относительная погрешность $|\Delta t/t|$ при этом оказывается на и большей. Если это получается в нутри междецильного интервала, то погрешность $\delta_{t,\text{нам6}}$ сравнительно не велика. Бо́льшие значения $\delta_{t,\text{нам5}}$ обычно получаются на грани-

цах междецильного интервала: либо при $h=0,1 h_{\rm max}$ (что чаще всего обусловлено малой величиной $t_{0,1}$), либо при $h=0,9 h_{\rm max}$ (что обусловлено большой величиной $|\Delta t|$). Очень редко наибольшая «временная» погрешность получается при $h > h_{\rm max}$ (например, в показанный на рис. 1.6 момент t_0), так как здесь, даже при сравнительно большой величине $|\Delta t|$, относительное значение $|\Delta t/t|$ обычно не велико (если исключить из рассмотрения в этой области погрешности при уровнях h_0 , весьма близких к $h_{\rm max}$ или к $h_{\rm min}$). Поэтому практически можно ограничиться рассмотрением погрешности $\delta_{t, намб}$ только



Рис. 1.7. Наибольшая «временная» погрешность аппроксимации колебательного сигнала *h* функцией *h*₃₁ 1-го порядка приближения.

в пределах междецильного интервала, что в дальнейшем имеется в виду. Следует заметить, что применительно к большинству задач импульсной техники погрешности аппроксимации в не междецильного интервала практического значения не имеют.

Особо следует отметить случай, когда сигнал h(t) носит колебательный характер, причем $h_{\max} > h(\infty)$, и этот сигнал аппроксимируется функцией h_{31} 1-то порядка приближения (рис. 1.7). Здесь погрешность $\delta_{t,\text{нажб}}$ получается иногда на верхней границе междецильного интервала (при $h=0.9h_{\max}$). Если же $0.9h_{\max} > h(\infty)$, то в соответствии с принятым определением погрешность $\delta_{t,\text{намб}} = \infty$, так как $h_{31}(\infty) = h(\infty)$. Аналогичная ситуация 28 может возникнуть и при приближении $h_{32} \sim h$ (m=2), если в отличие от показанного на рис. 1.6 выполняется неравенство 0,9 $h_{\text{max}} > (h_{32})_{\text{max}}$.

Именно такой жесткий подход к оценке «временной» погрешности аппроксимации имеется в дальнейшем в виду. При таком подходе предотвращается использование аппроксимирующего сигнала h_{3m} недостаточно высокого порядка приближения и в том случае, когда практический интерес представляет не погрешность $\delta_{t, \text{наи6}}$, а погрешность определения величины «выброса» или «амплитудная» погрешность (в области $t > t_{3m}$ при не очень низких уровнях h_0). Что же касается погрешности δ_{ϕ} , то обычно она близка к погрешности $\delta_{t, \text{наи6}}$.

13. Применение приближенного метода анализа практически оправдывается лишь в том случае, если это приводит к у п р о щен и ю анализа *. Поэтому и задача оценки погрешности приближения $h_{3m} \sim h$ должна быть предельно проста. Это, как показано в § 4, достижимо при некотором ограничении аппроксимируемых сигналов. Такое ограничение касается предельных величин коэффициентов a_i полинома $A_n(p)$, определяющего изображение (1.1) сигнала h. Именно, начиная с номера $i \ge 4$ коэффициенты a_i должны удовлетворять соотношению

$$a_i \leqslant 2c_i \quad (i \geqslant 4), \tag{1.32}$$

где c_i выражаются равенствами (1.7). При этом во всех случаях должно выполняться выражаемое формулой (1.16) условие диссипативности ($a_i < a_{i,\text{кp}}$), а при $0,7a_{i,\text{кp}} > c_i$ ($i \ge 4$) должно выполняться неравенство $a_i < < 0,7$ $a_{i,\text{кp}}$.

При выполнении указанных выше условий и соотношения (1.32) действительны приводимые ниже верхние границы погрешностей аппроксимации, позволяющие в ряде случаев наиболее просто решить вопрос о нужном (приемлемом) порядке *т* приближения.

Следует при этом подчеркнуть три обстоятельства. Во-первых, ограничение (1.32) не является сильным:

^{*} В этом смысле имеется коренное различие между задачей анализа переходного процесса в схеме и задачей синтеза схемы, где важно возможно точнее определить оптимальные параметры схемы, удовлетворяющей требуемым характеристикам, а сложность решения задачи синтеза и оценки погрешности решения менее существенны.

оно либо слабее ограничения $a_i < a_{i, \mathrm{кр}}$, либо близко к нему (отклонения от этого положения возможны, но практически редко). Во-вторых, ограничение (1.32) не обязательно для возможности применения рассматриваемого метода приближенного анализа, а вводится для установления верхних границ погрешностей аппроксимации. В-третьих, имеется практическая возможность приближенной оценки погрешности аппроксимации и в том случае, когда соотношение (1.32) вообще не выполняется.

14. На рис. 1.8 изображено семейство кривых $\delta_{tr} = -\phi_{t1}(\zeta_3, \xi_1)$, представляющих верхние границы наибольшей «временной» погрешности аппроксимации (при m = -1), выражаемой формулой (1.31). Кривые построены в функции от двух параметров — ζ_3 и ξ_1 , где

$$\zeta_3 = \frac{a_3}{c_3}; \ \xi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1, \kappa_p} = 2\lambda_1 = 2\frac{a_2}{a_1^2}.$$
 (1.33)

Здесь согласно равенствам (1.7), в которых надо принять m = 1,

$$c_{3} = c_{m+2} = t_{31}^{2} \left(\frac{b_{1}}{2!} + \frac{t_{31}}{3!} \right) = \frac{t_{31}^{2}}{2} \left(a_{1} - \frac{2}{3} t_{31} \right), \quad (1.34)$$

причем находимое из уравнения (1.26) запаздывание (см. § 2, п. 3)

$$t_{3m} = t_{s_1} = a_1 - \sqrt{a_1^2 - 2a_2} = a_1 (1 - \sqrt{1 - 2\lambda_1}). \quad (1.35)$$

Используя эти несложные формулы и представленное на рис. 1.8-семейство кривых, можно найти г р а н и чно е значение наибольшей «временной» погрешности аппроксимации, что в ряде практических случаев позволяет весьма просто (непосредственно из графиков рис. 1.8) решить вопрос о приемлемости наименее сложного приближенного решения (m=1). В сомнительных же ситуациях следует воспользоваться приводимой ниже формулой (1.36).

Объяснение своеобразного характера кривых семейства, представленного на рис. 1.8, приводится в § 4, п. 8. Здесь же отметим два обстоятельства.

Во-первых, большие значения наибольшей «временной» погрешности аппроксимации получаются на границах междецильного интервала (при $\zeta_3 < 1$ — на 30 уровне 0,1 h_{max} , а при $\zeta_3 > 1$ — на уровне 0,9 h_{max}); на остальных уровнях «временная» погрешность $\delta_t < \delta_{t,\text{наиб}}$. Поэтому даже, например, при $\delta_{t,\text{наиб}} \cong 0,3$ приближение 1-го порядка может оказаться практически приемлемым в ряде задач, что иллюстрируется на примерах, приводимых в § 3.



Рис. 1.8. Верхние границы наибольшей «временной» погрешмости аппроксимации при m=1.

Во-вторых, равенство $\delta_{tr} = \delta_{t, \text{нам6}}$ имеет место в случае, когда изображение (1.1) аппроксимируемой функции определяется полиномом $A_n(p)$ степени $n \leq 3$ (при n=2 параметр $\zeta_3=0$) *. Если же n>3 (т. е. при дифференциальном уравнении более высокого порядка), то при выполнении соотношения (1.32) погрешность $\delta_{t, \text{нам6}} < \delta_{tr}$. Как это обсуждается в § 4, п. 13, в этом случае пред-

^{*} Следует при этом иметь в виду, что погрешность построения кривых, представленных на рис. 1.8, обусловленная погрешностью довольно громоздких расчетов, равна около 10%.

ставляется возможность приближенной (с погрешностью до ~30%) оценки величины $\delta_{l,\text{наиб}}$ из простой формулы:

$$\delta_{i,\text{HBH6}} \cong \delta_{tr} \sqrt{0,7(1-\zeta_4)^2 + 0,18(1-\zeta_5)^2 + 0,12}, \quad (1.36)$$

где $\zeta_i = a_i/c_i$, причем согласно равенствам (1.7) при m = 1

$$c_{4} = t_{31}^{3} \left(\frac{b_{1}}{3!} + \frac{t_{31}}{4!} \right) = \frac{t_{31}^{3}}{3!} \left(a_{1} - \frac{3}{4} t_{31} \right);$$

$$c_{5} = t_{31}^{4} \left(\frac{b_{1}}{4!} + \frac{t_{31}}{5!} \right) = \frac{t_{31}^{4}}{4!} \left(a_{1} - \frac{4}{5} t_{31} \right).$$
(1.37)

Оценочную формулу (1.36) можно распространить и на случай, когда при $i \ge 4$ $a_i > 2c_i$, но при том условии, что $a_i \le 0,7$ $a_{i, \text{кр.}}$. В этом случае может иметь место $\delta_{t, \text{наиб}} > \delta_{tr}$, причем погрешность оценки величины $\delta_{t, \text{наиб}}$



Рис. 1.9. Верхние границы погрешности определения междецильного времени (активной длительности фронта).

может иногда достигнуть ~50%. При $a_i > 0.7$ $a_{i,wp} > c_i$ погрешность оценки величины $\delta_{t,uano}$ (при указанном в п. 12 жестком определении «временной» погрешности) быстро возрастает, строго говоря, до ∞ . Однако это значение погрешности относится только к уровням $h \ge$ $\ge 0.9 \ h_{max}$, а при $h < 0.9 \ h_{max}$ «временная» погрешность аппроксимации быстро спижается (см. рис. 4.2,6). Поэтому в области $h < 0.8 \ h_{max}$ можно пользоваться оценочной формулой (1.36) практически при любом $a_i < a_i$ кп.

15. На рис. 1.9 изображено семейство кривых $\delta_{\phi r} = \Phi_{\phi 1}(\zeta_3, \xi_1)$, представляющих при m=1 верхние границы погрешности определения междецильного времени, выражаемой формулой (1.30). Как и в случае, рассмотренном в п. 14, граничные значения $\delta_{\phi r}$ равны действительным погрешностям δ_{ϕ} , если степень полинома $A_n(p)$ $n \leq 3^*$. Если же n > 3, то при выполнении соотношения (1.32) и связанных с ним условий погрешность $\delta_{\phi} < \delta_{\phi r}$, причем это неравенство выполняется тем сильнее, чем меньше абсолютные значения разностей $|1-\zeta_4|$ и $|1-\zeta_5|$.

Из-за сложного характера закономерностей, определяющих погрешность δ_{Φ} (см. § 4, п. 9), не удалось осуществить более детальный анализ этой погрешности. Как показывают расчеты (см. § 3), погрешность δ_{Φ} , в общем, близка к погрешности $\delta_{t,\text{наяб}}$, причем она иногда несколько превышает ее, но чаще уступает ей по величине.

16. На рис. 1.10 изображено семейство кривых $\delta_{tr} = \Phi_{t2}(\lambda_1, \xi_2)$, представляющих верхние границы наибольшей «временной» погрешности аппроксимации при m=2. Поскольку в этом случае всегда $a_3 = c_3$ ($\zeta_3 = 1$), кривые построены в функции от двух параметров: λ_1 и ξ_2 , где

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2}; \ \xi_2 = \frac{2}{\lambda_{2,\text{KP}}}; \ \lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3},$$
 (1.38)

причем, как показано в приложении 1, значение $\lambda_{2, \kappa p}$ (в зависимости от $\lambda_1 \ge 0,5$) выражается одной из двух формул, приведенных на рис. 1.10.

Обсуждение особенностей представленного на рис. 1.10 семейства кривых приводится в § 4, п. 11. Здесь же отметим, что, как и в пп. 14 и 15, величина $\delta_{tr} = \delta_{t,\text{нам}}$

^{*} Погрешность построения представленного на рис- 1.9 семейства кривых достигает ~20%. 3—2247

в случае, когда изображение (1.1) определяется полиномом $A_{n'}(p)$ степени $n=3^*$. Если же n>3 и выполняется соотношение (1.32) со связанным с ним условиями, то $\delta_{t,\text{нам6}} < \delta_{tr}$. В этом случае, если большая величина δ_{tr} вызывает опасение в приемлемости приближения 2-го



Рис. 1.10. Верхние границы наибольшей «временной» погрешности аппроксимации при *m*=2.

порядка, удовлетворительную (с погрешностью до $\sim 30\%$) оценку величины $\delta_{t,\text{наиб}}$ можно получить из простой формулы (см. § 4, п. 13):

$$\delta_{t,\text{Hand}} \cong \delta_{tr} \sqrt{0.95 (1 - \zeta_4)^2 + 0.04 (1 - \zeta_5)^2 + 0.01}, \quad (1.39)$$

где согласно равенствам (1.7) при m = 2

$$c_{4} = c_{m+2} = t_{32}^{2} \left(\frac{b_{2}}{2!} + \frac{b_{1}t_{32}}{3!} + \frac{t_{32}^{2}}{4!} \right);$$

$$c_{5} = c_{m+3} = t_{32}^{3} \left(\frac{b_{2}}{3!} + \frac{b_{1}t_{32}}{4!} + \frac{t_{32}^{2}}{5!} \right),$$
(1.40)

^{*} Погрешность построения представленного на рис. 1.10 семейства кривых достигает $\sim 15\%$.

причем в соответствии с равенствами (1.27)

$$b_1 = a_1 - t_{32}; \ b_2 = a_2 - a_1 t_{32} + 0.5 t_{32}^2,$$
 (1.41)

а t₃₂ — корень уравнения (1.26) (см. § 2, пп. 4—6).

Формулу (1.39) можно распространить и на случай, когда соотношение (1.32) не выполняется (по этому поводу см. п. 14).

Примеры использования формулы (1.39) приводятся в § 3.

17. При формулировке выражаемого равенствами (1.24) правила для определения параметров аппроксимирующего изображения

 $h_{3m}(p)$, которые находятся из простых формул (1.26) и (1.27), в основном преследовалась цель максимального упрощения и унификации процедуры аппроксимации (без оптимизации результата аппроксимации). Интересно оценить, насколько полученные по этому правилу значения параметров t_{3m} и b_j изображения (1.4) отличаются от значений этих же параметров, найденных из решения системы уравнений (1.12), обеспечивающего минимизацию инт : гральной оценки I2=I2, min. Как указывалось в п. 4, решение системы траноцендентных уравнений (1.12) удается осуществить только численным путем. Результаты выполненных расчетов показали что различие указанных значений составляет ~ (1÷10) % при m=1 и значительно меньше при m=2. Такого же порядка расхожденис получается, как показали расчеты, и при других критериях оптимизации (например, по минимуму погрешности $\delta_{t, \text{наиб}}$). В большин стве практических случаев такое различие не вводит существеннос ухудшение в результат аппроксимации. Во всяком случае, можно прийти к выводу о том, что весьма сложная и громоздкая процедура определения оптимальных параметров аппроксимирующей функции не оправдывается достигаемым при этом улучшением качества аппроксимации. В тех же особых случаях, когда качество аппрокси мации оказывается недостаточным, а обращение к приближении более высокого порядка нецелесообразно, видимо, проще обратиться к строгому решению, если, конечно, оно достижимо.

18. Анализ погрешности аппроксимации при приближении, порядка $m \ge 3$ оказывается весьма сложным громоздким. Приближения порядка $m \ge 3$, видимо, будут редко применяться на практике. Если такое приближение не является первым физически реализуемым приближением, то погрешность аппроксимации настолько мала, что ею можно пренебречь. Если же такое приближение реализуется впервые, то погрешность может оказаться значительной. О ее величине можно качественно судить по степени выполнения неравенства $\lambda_m < \lambda_{m, \kappa p}$ по величинам разностей $|1-\zeta_{m+2}|$ и $|1-\zeta_{m+3}|$ (см. § 3, п. 28).

3•

Приближение сигналов, имеющих изображение в виде рациональной дроби

19. В более общем случае может стоять задача приближения функций $h_{3m} \sim h$, где

$$h \div \hat{h} = \frac{1 + g'_1 p + \dots + g'_r p^r}{p(1 + a'_1 p + \dots + a'_n p^n)} = \frac{G'_r(p)}{pA'_n(p)}, \quad (1.42)$$

причем степень полинома $G'_r(p)$, по крайней мере, удовлетворяет неравенству $r < n-1^*$, а коэффициенты a'_i в согласии с принятым в п. 1 должны удовлетворять условиям диссипативности.

Будем условно называть изображение (и сигнал) вида (1.42) «сложным», а изображение (и сигнал) вида (1.1) — «простым».

К методике определения параметров изображения $h_{3m} \sim h$ можно подойти разными путями, один из которых рассматривается ниже.

Предположим, что искомое изображение существует в «простой» форме:

$$\hat{h}_{3m} = \frac{e^{-pt_{3m}}}{p(1+b_1p+\ldots+b_mp^m)} = \frac{e^{-pt_{3m}}}{pB_m(p)}.$$
 (1.43)

Если существует приближение $h_{3m} \sim h$, то не худшее приближение того же порядка должно существовать между свертками функций h и h_{3m} с одной и той же функцией $h'_r(t) \leftrightarrow 1/pG'_r(p)$. Этому соответствует отвечающее принятой методике приближение изображений этих сверток, т. е.

$$\frac{\hat{h}(p)}{G'r(p)} = \frac{1}{pA'_n(p)} \approx \frac{e^{-pt_{3m}}}{pG'r(p) B_m(p)} = \frac{1}{pC_{\infty}(p)} . \quad (1.44)$$

$$C_{\infty}(p) = G'_{r}(p) B_{m}(p) \left(1 + pt_{3m} + \frac{1}{2!} p^{2} t_{3m}^{2} + \dots \right) =$$

= $(1 + g'_{1}p + \dots + g'_{r}p^{r}) (1 + c_{1}p + c_{2}p^{2} + \dots), \quad (1.45)$

где коэффициенты с_і выражаются равенствами (1.7).

^{*} При r=n-1 (а также в ряде случаев при r>n-m) аппроксимирующая функция в виде запаздывающей функции (1.4) не существует. Эти случаи рассматриваются в пп. 21 и 22.
Производя почленное умножение полиномов (1.45), получим

$$C_{\infty}(p) = C'_{1}p + C'_{2}p^{2} + C'_{3}p^{3} + \dots, \qquad (1.46)$$

где

$$\begin{array}{c}
C'_{1} = c_{1} + g'_{1}; \\
C'_{2} = c_{2} + g'_{2} + g'_{1}c_{1}; \\
C'_{3} = c_{3} + g'_{3} + g'_{2}c_{1} + g'_{1}c_{2}; \\
\dots \end{array}$$
(1.47)

Применительно к приближению (1.44) в соответствии с принятой методикой можно составить систему из *m*+1 уравнений:

$$a'_i = C'_i \quad (i = 1, 2, ..., m+1).$$
 (1.48)

Оставляя в правых частях этих уравнений только коэффициенты c_i , которые связаны с неизвестными параметрами t_{sm} и b_j равенствами (1.7), мы придем к системе уравнений, ничем не отличающихся от уравнений системы (1.25), если обозначить

$$\begin{array}{c} a_{1} = a'_{1} - g'_{1}; \\ a_{2} = a'_{2} - g'_{2} - g'_{1}a_{1}; \\ a_{3} = a'_{3} - g'_{3} - g'_{2}a_{1} - g'_{1}a_{2}; \\ \dots \end{array}$$

$$(1.49)$$

Таким образом, задача аппроксимации сигнала, обладающего «сложным» изображением (1.42), сводится к задаче аппроксимации сигнала, обладающего «простым» изображением

$$\hat{h} = -\frac{G'r(p)}{pA'_n(p)} = \frac{1}{p(1+a_1p+a_2p^2+\ldots)} = \frac{1}{pA_{\infty}(p)}, (1.50)$$

коэффициенты которого (a_i) выражаются через коэффициенты изображения (1.42) с помощью простых равенств (1.49).

К такому же результату (но еще проще) можно прийти, если в исходном изображении (1.42) произвести деление полинома $A'_n(p)$ на полином $G'_r(p)$. Иначе говоря, изображение (1.50) — другая форма представления изображения (1.42) *.

Из изложенного следует, что в отношении рецептуры определения параметров изображения (1.43) аппроксимирующей функции h_{зт} (если она существует в «простой» форме) справедливы все формулы и соотношения, полученные выше применительно к задаче аппроксимации «простого» сигнала (1.1). Однако при «сложном» изображении возникают новые ситуации. Во-первых, в отличие от полиномов $A_n(p)$ и $A'_n(p)$, фигурирующих в изображениях (1.1) и (1.42), функция $A_{\infty}(p)$, определяющая изображение (1.50), представляет собой бесконечный степенной ряд (даже при конечном n). Во-вторых, некоторые коэффициенты a_i ряда $A_{\infty}(p)$ оказываются отрицательными. Вследствие этого при «сложном» изображении не всегда просто (и даже однозначно) решается вопрос о реализуемости аппроксимирующей функ-⊔чи.

20. Следует различать две существенно различные ситуации.

В одной из ситуаций все первые m+1 коэффициентов a_i ряда $A_{\infty}(p)$ положительны. Тогда условия реализации приближения порядка т не отличаются от условий, относящихся к аппроксимации «простого» изображения (1.1). В этом случае согласно изложенному в § 4, п. 14, для оценки погрешности аппроксимации при m=1 и m=2 можно воспользоваться соответственно кривыми рис. 1.8 и формулой (1.36) или кривыми рис. 1.10 и формулой (1.39). Примеры таких расчетов приводятся в § 3. Как и следовало ожидать, рассчитанные значения погрешности аппроксимации находятся в удовлетворительном соответствии с действительными погрешностями. Погрешность оценки величины $\delta_{t, \text{наиб}}$ обычно менее (часто значительно менее) 50%; лишь при $a_4 < 0$ и (или) $a_5 < 0$, когда абсолютные значения $|a_4| \gg$ $\gg c_4$ и (или) $|a_5| \gg c_5$, погрешность указанной оценки может существенно возрасти — примерно до 100%, если

^{*} К такому же результату можно прийти, применяя методику приближения, основанную на разложении в ряды Маклорена изображений (1.42) и (1.43) [15, 15а]. Принятая в тексте процедура освобождает от необходимости отыскания сравнительно громоздких выражений производных (по *p*) функций (1.42) и (1.43) до (*m*+1)-го порядка включительно.

охваченные неравенствами величины отличаются примерно на порядок.

Наиболее проблематичной оказывается другая ситуация, при которой некоторые из первых m+1 коэффициентов a_i оказываются отрицательные значения коэффициентов b_j (что необходимо из условия диссипативности) получаются при отрицательном запаздывании $(t_{3m} < 0)$. Такое положение в принципе свидетельствует о дефектности приближенного решения в форме, соответствующей изображению (1.43), так как в области $t \le 0$ аппроксимируемая функция h(t) = 0; более того, если в изображении (1.42) степень r < n-m, где $m \ge 1$, то не только h(0) = 0, но, по крайней мере, и первая производная dh/dt в точке t = 0 равна нулю, что требует выполнения неравенства $t_{3m} > 0$, но отнюдь не $t_{3m} < 0$.

О допустимости отрицательного запаздывания

21. Ввиду важности вопроса о допустимости отрицательного запаздывания обратимся к его рассмотрению в наиболее простом случае приближения 1-го порядка. Это тем более интересно, что получаемое при m=1 решение совпадает с приближенным решением по способу С. Я. Шаца [9, 10], основанному на использовании параметров переходного процесса, находимых методом моментов [5, 6].

Пусть решается задача приближения функций $h_{31} \sim h$, изображения которых выражаются формулами (1.42) и (1.43). В этом случае параметры изображения h_{31} зависят только от коэффициентов a_1 и a_2 , определяемых первыми двумя равенствами (1.49):

$$a_1 = a'_1 - g'_1; \ a_2 = a'_2 - g'_2 - g'_1 (a'_1 - g'_1).$$
 (1.51)

Используя обычную методику, из первых двух уравнений (1.27) находим искомые параметры изображения (1.43):

$$b_{m} = b_{1} = \sqrt{a_{1}^{2} - 2a_{2}} = \sqrt{(a_{1}')^{2} - (g_{1}')^{2} - 2(a_{2}' - g_{2}')};$$

$$|(1.52)$$

$$t_{3m} = t_{31} = a_1 - b_1 = (a'_1 - g'_1) - b_1. \tag{1.53}$$

39

Точно такие же выражения получаются и в работах [9, 10], где аппроксимирующая функция представляет собой запаздывающий на время $t_{31} = T_D - T_R / \sqrt{2\pi}$ сигнал, нарастающий по экспоненциальному закону с постоянной времени $T_R / \sqrt{2\pi}$. Здесь T_D и T_R — параметры, находимые методом моментов (по Элмору) [5, 6]: параметр $T_D = a'_1 - g'_1 = a_1$ выражает время задержки сигнала h(t), примерно равно $0,5h(\infty);$ параметр $T_R =$ которое $\sqrt{2\pi} b_1$, где b_1 выражается формулой (1.52), определяется Элмором как некоторая активная длительность нарастания сигнала, примерно равная междецильному времени to. При этом в работах [5, 6] особо подчеркивается, что осуществляемый на такой основе анализ целесообразен только в том случае, если h(t) представляет собой монотонную функцию времени. Кроме того, из вы-ражений для T_D и T_R , представляющих существенно положительные величины, следует, что они имеют смысл при выполнении неравенств

$$a_1 = a'_1 - g'_1 > 0; \ 2a_2 < a_1^2.$$
 (1.54)

Что же касается требования $a_2 > 0$, то оно вовсе не фигурирует в условиях метода моментов; более того, при $a_2 < 0$ второе неравенство (1.54) оказывается излишним.

Подчеркнутые положения метода моментов не безупречны. Во-первых, не просто установить монотонность процесса по его изображению [19]. Во-вторых, если $a_2 < < 0$, то даже при монотонном нарастании анализируемого процесса получается существенная (иногда недопустимая) погрешность нахождения параметров T_D и T_R , определяемых указанным выше образом. Соответственно вводится значительная погрешность и в построение переходного процесса h_{31} 1-го порядка приближения.

Для иллюстрации этих положений рассмотрим изображение

$$\widehat{h} = \frac{1 + 0.5p}{p(1 + p + 0.1p^2 + 0.005p^3)} \stackrel{*}{\to} h(t), \quad (1.55)$$

которому соответствует функция (рис. 1.11)

 $h(t) = 1 - A_0 e^{-\alpha_0 t} - e^{-\alpha t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t),$

где $a_0 = 1,118$; $A_0 = 0,496$; $\alpha = 9,44$; $\omega = 9,47$; A = 0,66; B = 0,504.

В данном случае из-за сильного затухания колебательной составляющей функция h(t) нарастает монотонно, т. е. она удовлетворяет требованиям Элмора. При этом функция h(t) характеризуется следующими значениями величин, находимыми из строгого решения:

— междецильное время $t_{\oplus} = 1,37;$

— время задержки сигнала (до уровня 0,5÷0,63) T_D=0,18÷0,25.



Рис. 1.11. Сравнение различных способов приближения «сложного» сигнала.

Сравним эти реальные значения с величинами параметров, получаемыми из расчета по Элмору. Из первого равенства (1.51) найдем $T_D = a_1 = a'_1 - g'_1 = 1 - 0,5 = 0,5$ (вместо $0,18 \div 0,25$). Из второго равенства (1.51) получим $a_2 = -0,15$; несмотря на $a_2 < 0$, определяемая из формулы (1.52) величина $b_1 = 0,742$ положительна, откуда параметр $T_R = \sqrt{2\pi b_1} = 1,85$. Как видно, в рассматриваемом случае вводится заметная погрешность в определение активной длительности нарастания сигнала и огромная погрешность в определение времени задержки сигнала. Определим теперь функцию 1-го приближения $h_{31} \sim h$ в «простой» форме, соответствующей изображению (1.43). Используя найденное значение $b_1 = 0.742$, из формулы (1.53) найдем запаздывание, которое в данном случае оказывается отрицательным: $t_{31} = -0.242$. В соответствии с найденными параметрами

$$\hat{h}_{31} = \frac{e^{0,242p}}{p(1+0,742p)} \div (1-e^{-\frac{t+0,242}{0,742}}) \cdot 1 (t+0,242) = h_{31}.$$

График этой функции также изображен на рис. 1.11 (показанные пунктиром графики относятся к другим способам аппроксимации, рассматриваемым ниже). Как видно из рис. 1.11, приближение $h_{31} \sim h$ нельзя признать удовлетворительным не только из-за того, что в области $t \leq 0$ не выполняется равенство $h_{31} =$ =0, но, главное, из-за существенного различия скоростей нарастания функций h_{31} и h в области наиболее интенсивного их изменения.

На основании выполненных расчетов (в согласии с соображениями, изложенными в п. 20) установлено, что применение аппроксимирующей функции h_{ат}, обладающей «простым» изображением (1.43), целесообразно при выполнении неравенств

$$a_i > 0 \ (i \leq m+1),$$
 (1.56)

где коэффициенты а_i выражаются равенствами (1.49). Это простое и удобное правило, не связанное с необходимостью определения характера аппроксимируемой функции, как этого требует метод моментов [5, 6], всегда приводит к надежным результатам, причем при выполнении неравенств (1.56) применимы приведенные выше оценки погрешности аппроксимации. Иллюстрации этих положений приводятся в § 3.

При невыполнении неравенств (1.56) аппроксимирующую функцию следует представлять в «сложной» форме. Две возможные формы такого решения приводятся в пп. 22 и 23.

Незапаздывающее решение

22. Если при «сложной» форме изображения (1.42) неравенства (1.56) не выполняются, а разность степеней полиномов в изображении (1.42) n-r < m или если не-

зависимо от соотношения (1.56) разность степеней n-r = 1, то хороший результат приближения $h_{\Im m} \sim h$, где $h_{\Im m} = h_{\Im m}(t)$ — незапаздывающая аппроксимирующая функция порядка *m*, достигается по методу, разработанному В. А. Боднером [15] и Ю. А. Рязановым [15а]. Согласно этому[®] методу изображение искомой функции должно иметь вид

$$\hat{h}_{3m} = \frac{1 + e'_1 p + \dots + e'_s p^s}{p(1 + b'_1 p + \dots + b'_m p^m)} = \frac{\mathcal{E}'_s(p)}{pB'_m(p)}, \quad (1.57)$$

причем наилучшее приближение получается, если разность степеней полиномов в изображении (1.57) удовлетворяет равенству

$$m - s = n - r. \tag{1.58}$$

При этом предполагается, что приближение порядка m существует, для чего необходимо выполнение неравенств $b'_{j} > 0$ (j = 1, 2, ..., m), что, однако, не всегда имеет место (см. п. 24).

Удовлетворительный результат приближения $h_{3m} \sim h$ получается и в том случае, если при выполнении равенства (1.58) неравенства (1.56) хотя и выполняются, но запаздывание t_{3m} функции h_{3m} , определяемой изображением (1.43), мало ($t_{3m} \ll a_1$ и $t_{3m} \ll a_2/a_1$).

Согласно методу, изложенному в работах [15] и [15а], параметры b'_{j} и e'_{k} (k=1, 2, ..., s) находятся путем разложения в ряды Маклорена передаточных функций $p\hat{h}(p)$ и $\hat{p}h_{3m}(p)$ и соответственного приравнивания m+sпоследовательных членов этих рядов, начиная со 2-го члена (в силу соотношения (1.8) равенство первых членов рядов всегда выполняется). К такому же результату, но без необходимости определения производных различных порядков можно прийти и по методике, применявшейся выше. Именно, производя делезие полинома $B'_m(p)$ на $\mathfrak{E}'_s(p)$, приводим изображение (1.57) к виду

$$\hat{h}_{3m} = \frac{1}{p(1+b_1p+b_2p^2+\ldots)} = \frac{1}{pB_{\infty}(p)}, \quad (1.59)$$

где

$$\begin{array}{c}
b_{1} = b'_{1} - e'_{1}; \\
b_{2} = b'_{2} - e'_{2} - e'_{1}b_{1}; \\
b_{3} = b'_{3} - e'_{3} - e'_{2}b_{1} - e'_{1}b_{2}; \\
\dots \end{array}$$
(1.60)

Аналогичным путем выше выражалось изображение (1.50) аппроксимируемой функции h. Приравнивая первые m+s коэффициентов рядов $B_{\infty}(p)$ и $A_{\infty}(p)$, получим систему из m+s уравнений относительно m+s неизвестных параметров:

В § 2, п. 9, приводятся выражения параметров b'_{j} и e'_{k} , получаемые из решения системы (1.61) (применительно к приближениям до 3-го порядка включительно).

Решение по «способу производной»

23. Имея в виду особый случай $(g'_0=0)$, представим в несколько более общем виде изображение аппроксимируемой функции:

$$\hat{h} = \frac{[g'_0 + g'_1 p + \dots + g'_r p^r]}{p (1 + [a'_1 p + \dots + a'_n p^n]} \quad (r < n).$$
(1.62)

В случае, если $g'_0=0$ или же, независимо от величины g'_0 , если неравенства (1.56) не выполняются, изображение аппроксимирующей функции можно искать в виде

$$\hat{\underline{h}}_{dm} = \frac{g'_0 + g'_1 p + \dots + g' r p^r}{p (1 + b'_1 p + \dots + b'_m p^m)} e^{-pt'_{3m}} \stackrel{\cdot}{\rightarrow} h_{dm}. \quad (1.63)$$

После нахождения стандартным путем запаздывающей на время t[']_{зт} вспомогательной функции

$$h'_{sm} \div \hat{h}'_{sm} = \frac{1}{p(1+b'_1p+\ldots+b'_mp^m)} e^{-pt'_{sm}}$$
, (1.64)

представляющей собой приближение $h'_{3m} \sim h'$ к «простой» функции

$$h' \div \widehat{h'} = \frac{1}{p\left(1 + a'_1 p + \dots + a'_n p^n\right)}, \qquad (1.65)$$

искомую аппроксимирующую функцию $h_{dm} \sim h$ можно (в области $t > t'_{3m}$) представить в виде суммы:

$$h_{dm} = g'_{0}h'_{3m} + g'_{1}\frac{dh'_{3m}}{dt} + \dots + g'_{r}\frac{d^{r}h'_{3m}}{dt^{r}}.$$
 (1.66)

В отношении приближения вспомогательных функций $h'_{3m} \sim h'$ справедливы все формулы и соотношения, относящиеся к приближению «простых» функций (1.1) и (1.4) (всюду лишь следует заменить a_i на a'_i , b_j на b'_j и t_{3m} на t'_{3m}).

В области $t > t'_{3m}$ приближение «по производной», т. е. $h_{dm} \sim h$, часто оказывается наиболее близким. Заметим, что конструктивная сложность функции h_{dm} не выше конструктивной сложности вспомогательной функции h'_{3m} .



Рис. 1.12. Приближенная аппроксимация функции $h_{dm}(t)$ в области $0 \leq t \leq t'_{3m}$ (показано пунктиром) при приближении по «способу производной».

Если в изображении (1.63) степень $r \ge m$, то в момент $t = t'_{3m} + 0$ значение функции $h_{dm} \ne 0$. Это обстоятельство само по себе не является криминалом, так как и значение аппроксимируемой функции $h(t'_{3m}) \ne 0$. Однако поведение функции h_{dm} в области $t < t'_{3m}$ оказывается неопределенным; известно лишь, что h(0) = 0 и что n - r - 1 первых производных функции h(t) в точке t = 0равны нулю. Это является основанием для ориентировочного продолжения функции h_{dm} к началу координат, как это показано пунктиром на рис. 1.12. Впрочем, поведение функции h(t) в области $0 \le t \le t'_{3m}$ представляет ограниченный интерес, так каж поведение функции hв этой области можно установить из асимптотического разложения

$$h(t) = \frac{g'rt^{n-r}}{a'_n(n-r)!} + \left[\frac{g'r_{-1}}{a'_n} - \frac{g'ra'_{n-1}}{(a'_n)^2}\right]\frac{t^{n-r+1}}{(n-r+1)!} + \dots$$

24. Для иллюстрации результата приближения, получаемого по «способу производной», на рис. 1,11 показаны точки функции $h_{d1} \sim h$ (m=1), где h — аппроксимируемая функция, рассмотренная в п. 21. Параметры изображения (1.55) этой функции определяют параметры изображения (1.64) вспомогательной функции h'_{31} :

$$b'_1 = \sqrt{a'_1 - 2a'_2} = \sqrt{1 - 0.2} = 0.894; t'_{31} = a'_1 - b'_1 = 0.106.$$

Эти параметры, в свою очередь, определяют параметры изображения (1.63) искомой функции h_{d1} , приведенной на рис. 1.11, где в соответствии с изображением (1.55) $g'_0=1$, $g'_1=0,5$ и $g'_2=g'_3=\ldots=0$. Согласно указанному в конце п. 23, на рис. 1.11 штрих-пунктирной линией ориентировочно намечен ход функции h_{d1} в области $t < t'_{31}$, причем учтено, что согласно изображению (1.55) в точке t=0 dh/dt=0.

Из рис. 1.11 видно, что приближение $h_{d1} \sim h$ существенно лучше рассмотренного в п. 21 приближения $h_{31} \sim h$, при котором из-за $a_2 < 0$ получилось $t_{31} < 0$.

Для сравнения на рис. 1.11 показана (крупным пунктиром) незапазды вающая аппроксимирующая функция 1-го порядка приближения $h_{31} \sim h$, построенная по формуле (1.57). Поскольку разность степеней полиномов исходного изображения (1.55) n-r=3-1=2, то наиболее близкое выполнение равенства (1.58) при m=1 будет иметь место, если в изображении (1.57) принять s=0 ($e'_1=\ldots=e'_s=0$). Отсюда с учетом найденного в п. 21 значения $a_1=0,5$ из первого уравнения (1.61) находится единственный параметр искомого изображения (1.57): $b'_m=b'_1=b_1=a_1=0,5$. Из рис. 1.11 видно, что хотя приближение $h_{31} \sim h$ существенно лучше приближения $h_{31} \sim h$, но все же является малоудовлетворительным. Это обусловлено тем, что при m=1 в рассматриваемом случае (n-r=2) нельзя удовлетворить оптимальному соотношению (1.58).

Если для улучшения приближения $h_{3m} \sim h$ использовать приближения порядка m=2, то с учетом n-r=2для получения оптимальной функции h_{32} следует в изображении (1.57) также принять m-s=2, откуда s=0, т. е. $e'_1=e'_2=\ldots=0$. Но тогда из решения первых двух уравнений (1.61) получается $b'_1=b_1=a_1=0,5$ и $b'_2=$ $=b_2=a_2=-0,15$ (см. п. 21), что не удовлетворяет условию диссипативности (b'2<0). Ближайшее к оптималь-

вию диссипативности ($b_2 < 0$). Винжаншес к онтиманы ному изображение \hat{h}_{92} должно содержать параметр e'_1 (s=1). Для этого случая из решения первых трех урав-нений системы (1.61) находятся три параметра иско-мого изображения (1.57): $e'_1=0,53$; $b'_1=1,53$; $b'_2=0,117$. Функция h_{32} изображена на рис. 1.11 мелким пунк-тиром. Как и следовало ожидать, приближение $h_{32} \sim h$ существенно лучше приближения $h_{91} \sim h$, но даже оно в области $t > 2t'_{31}$ уступает приближению h_{d1} , хотя здесь m=1. Такое положение также объясняется невоз-

здесь *m*=1. также положение также ооъясняется невоз-можностью построения в рассматриваемом случае опти-мальной функции, удовлетворяющей равенству (1.58). **25.** Как это было проиллюстрировано выше, в ряде слу-чаев применение приближения $h_{dm} \sim h$ оказывается предпочтительным. Обсудим вопрос о выборе нужного порядка приближения.

Согласно формуле (1.66) функция h_{dm} выражается через производные вспомогательной функции h'_{3m} , которая, в свою очередь, выражает приближение поряд-ка *m* к функции h', обладающей «простым» изображе-нием (1.65). Для достижения же удовлетворительной аппроксимации производной от некоторой функции степень приближения пороксимирующей функции

степень приближения аппроксимирующей функции должна быть тем выше, чем выше порядок производной (см. § 3, п. 24). Поэтому порядок приближения $h_{dm} \sim h$ должен быть тем выше, чем больше удельная значи-мость членов суммы (1.66), содержащих производные. Пусть при m=k достигается вполне удовлетвори-тельное приближение вспомогательных функций $h'_{3m} \sim h'$ (погрешность такого приближения оценивается наиболее просто). Если при подстановке функции h'_{3m} в формулу (1.66) на интересующем нас временном ин-тервале выполняется неравенство

$$\left|g'_{1}\frac{dh'_{3m}}{dt} + \dots g'_{r}\frac{d^{r}h'_{3m}}{dt^{r}}\right| < |g'_{0}h'_{3m}(t)|, \qquad (1.67)$$

то можно полагать, что при порядке приближения m=kбудет получено удовлетворительное приближение (по-грешность такого приближения примерно равна погреш-ности приближения $h'_{3m} \sim h'$), а при порядке прибли-жения m=k+1 получится вполне удовлетворительное приближение.

Если неравенство (1.67) не выполняется, то следует применить порядок приближения $m \ge k+1$. Пусть при m = k+1

$$\left| g'_{2} \frac{d^{2}h'_{3m}}{dt^{2}} + \dots + g'_{r} \frac{d^{r}h'_{3m}}{dt^{r}} \right| < \left| g'_{0}h'_{3m} + g'_{1} \frac{dh'_{3m}}{dt} \right|.$$

$$(1.68)$$

Тогда можно полагать, что при m = k + 1 получится удовлетворительный результат, а при m = k + 2 — вполне удовлетворительный результат приближения. Продолжая аналогичные рассуждения, можно прийти к выводу, что если при m = r выполняется неравенство

$$|2g'_{r}(d^{r}h'_{3m}/dt^{r})| < |h_{dm}|, \qquad (1.69)$$

то при m = r + 1 получится удовлетворительное приближение.

Указанный подход к выбору порядка приближения является достаточно жестким, но он приводит к более надежным результатам (см. § 3, п. 24).

2. Рецептура приближенного анализа

1. Пусть нормированное изображение аппроксимируемого сигнала h = h(t) выражается дробно-рациональной функцией

$$\hat{h} = \hat{h}(p) = \frac{g'_0 + g'_1 p + \dots + g'_r p^r}{p(1 + a'_1 p + \dots + a'_n p^n)} = \frac{G'_r(p)}{A'_n(p)}, \quad (2.1)$$

где степень r < n-1; коэффициенты $a'_i > 0$ удовлетворяют условиям диссипативности (см. § 1, п. 1) и $g'_0=1$. (Частные случаи, соответствующие $g'_0=0$ и r=n-1, рассматриваются в пп. 9, 10.)

Как указывалось в § 1, п. 19, путем деления многочлена $A'_n(p)$ на $G'_r(p)$ изображение (2.1) приводится к виду

$$\widehat{h} = \frac{1}{p(1+a_1p+a_2p^2+...)} = \frac{1}{pA_{\infty}(p)}, \quad (2.2)$$

где коэффициенты бесконечного (в общем случае) степенного ряда $A_{\infty}(p)$ определяются равенствами

$$\begin{array}{c}
a_{1} = a'_{1} - g'_{1}; \\
a_{2} = a'_{2} - g'_{2} - g'_{1}a_{1}; \\
a_{3} = a'_{3} - g'_{3} - g'_{2}a_{1} - g'_{1}a_{2}; \\
\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$
(2.2a)

Если при приближении порядка *m* первые *m*+1 коэффициентов *a_i* положительны, то в отношении рецептуры определения параметров функции, аппроксимирующей функцию *h*, рассматриваемая задача приближения 4-2247 49 не отличается от задачи приближения функций $h_{3m} \sim h$, изображения которых

$$\hat{h}_{3m} = \frac{e^{-pt_{3m}}}{p(1+b_1p+\ldots+b_mp^m)} = \frac{e^{-pt_{3m}}}{pB_m(p)}, \qquad (2.3)$$

$$\hat{h} = \frac{1}{p(1+a_1p_1+\ldots+a_np^n)} = \frac{1}{pA_n(p)}.$$
 (2.4)

Поэтому для определенности в дальнейшем имеется в виду приближение функций $h_{3m} \sim h$, изображения которых выражаются формулами (2.3) и (2.4). Особенности же аппроксимации функции h, если при $i \leq |m+|$ некоторые из коэффициентов a_i изображения (2.2) оказываются отрицательными, рассматриваются в пп. 9 и 10.

Условия реализуемости аппроксимирующей функции (2.3) сформулированы в приложении 1; при порядке приближения $m \leq 3$ они выражаются через безразмерные параметры

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2}; \quad \lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3}; \quad \lambda_3 = \frac{a_4}{a_1^4}.$$
 (2.5)

Решение задачи приближения порядка *т* заключается в нахождении запаздывания t_{3m} и коэффициентов b_j (j=1, 2, ..., m) изображения (2.3). В общем случае запаздывание t_{3m} равно наименьшему вещественному корню уравнения (1.26), а коэффициенты b_j находятся из равенств (1.27). Ниже описывается рецептура нахождения этих параметров при $m \leq 3$.

Вопрос о выборе нужного порядка приближения (когда это не ясно из характера решаемой задачи), а также методика оценки погрешности аппроксимации описаны в § 1, пп. 11—16, 18 и 25.

2. Приближение нулевого порядка (m=0). Предельно простое решение получается при аппроксимации сигнала h функцией h_{s0} нулевого порядка приближения, которое всегда существует и иногда достаточно для самой грубой оценки сигнала h (см. § 3, п. 27).

При m = 0 находится только запаздывание

$$t_{3\ m} = t_{30} = a_1, \tag{2.6}$$

которое согласно формуле (2.3) определяет единичную запаздывающую функцию

$$h_{33}(t) = 1 (t - t_{30}) \div \frac{1}{p} e^{-pt_{30}}$$
. (2.7)

3. Приближение 1-го порядка (m=1). Два параметра изображения аппроксимирующей функции $(2 \cdot 3)$ находятся из уравнения (1.26) и первого равенства (1.27):

$$t_{am} = t_{a1} = a_1 - \sqrt{a_1^2 - 2a_2} = a_1 \left(1 - \sqrt{1 - 2\lambda_1}\right); \quad (2.8)$$

$$b_{m} = b_{1} = \sqrt{a_{1}^{2} - 2a_{2}} = a_{1}\sqrt{1 - 2\lambda_{1}}.$$
 (2.9)

При 2 $\lambda_1 \ll 1$ (практически при $\lambda_1 < 0,2$) допустимо принять

$$t_{31} \cong \frac{a_2}{a_1} = \lambda_1 a_1; \quad b_1 \cong a_1 (1 - \lambda_1). \tag{2.9a}$$

В соответствии с формулой (2.3)

$$\hat{h}_{31} = \frac{e^{-pt_{31}}}{p(1+b_1p)} \nleftrightarrow (1-e^{-\frac{t-t_{31}}{b_1}}) 1(t-t_{31}) = h_{31}(t), (2.10)$$

т. е. аппроксимирующая функция 1-го приближения представляет собой запаздывающую экспоненциальную функцию. Этот результат совпадает с приближенным решением, которое можно получить путем применения метода моментов [9, 10].

Как показано в приложении 1 и непосредственно вытекает из формул (2.8) и (2.9), приближение 1-го порядка реализуется при выполнении неравенства

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} < \lambda_{1, \text{Kp}} = \frac{1}{2}. \tag{2.11}$$

Если же $\lambda_1 = 0,5$, то $b_1 = 0$, $t_{31} = a_1$, и приближение 1-го порядка вырождается в приближение нулевого порядка.

4. Приближение 2-го порядка (m=2). Как показано в приложении 1, п. 10, такое приближение реализуется при

$$\lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3} < \lambda_{2,\mathrm{Rp}}, \qquad (2.12)$$

4*

гдê

$$\lambda_{2, \kappa p} = \lambda_{21, \kappa p} = \lambda_1 - \frac{1}{3}, \quad \text{если } \lambda_1 \ge \frac{1}{2}; \quad (2.13)$$
$$\lambda_{2, \kappa p} = \lambda_{22, \kappa p} = \lambda_1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - 2\lambda_1)^3}, \quad \text{если } \lambda_1 < \frac{1}{2}.$$
(2.14)

Раскладывая радикал в формуле (2.14) в ряд, получим

$$\boldsymbol{\lambda}_{22,\mathbf{R}\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_1^2}{2} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1}{3} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1^2}{4} + \ldots \right) \cdot \qquad (2.14a)$$

Соотношение (2.13) соответствует случаю, когда приближение 1-го порядка не реализуется, а соотношение (2.14) или (2.14а), — когда приближение 1-го порядка реализуется. При $\lambda_1 = 0.5$ получаемые из формул (2.13) и (2.14) значения совпадают: $\lambda_{2, \text{кр}} = 1/6$.

(2.13) и (2.14) значения совпадают: $\lambda_{2, \text{кр}} = 1/6$. Если приближение 2-го порядка реализуется, то в соответствии с уравнением (1.26) запаздывание $t_{3\,m} = t_{32}$ аппроксимирующей функции равно наименьшему вещественному корню $t_3 = t_{32}$ кубического уравнения

$$F_{\mathbf{s}}(t_{\mathbf{s}}) = t_{\mathbf{s}}^3 - 3a_1 t_{\mathbf{s}}^2 + 6a_2 t_{\mathbf{s}} - 6a_{\mathbf{s}} = 0.$$
 (2.15)

Как показано в приложении 1, должно, по крайней мере, выполняться неравенство $t_{32} < a_1$ чли равенство

$$t_{32} = (1 - \varepsilon) a_1 \quad (0 < \varepsilon < 1).$$
 (2.16)

При подстановке равенства (2.16) в уравнение (2.15) получаем уравнение Кардана относительно є:

$$\varepsilon^3 + 3r\varepsilon + 2s = 0, \qquad (2.17)$$

где

$$r = 2\lambda_1 - 1; \ s = 1 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2.$$
 (2.17a)

Если дискриминант $D=s^2+r^3>0$ (что, наверняка, выполняется при $\lambda_1 \ge 0.5$, т. е. при отсутствии приближения 1-го порядка), то единственный вещественный корень уравнения (2.17), который согласно равенству (2.16) определяет запаздывание, выражается формулой [16]

$$\mathbf{s} = \sqrt[9]{-s + \sqrt{s^2 + r^3}} + \sqrt[9]{-s - \sqrt{s^2 + r^3}}.$$
 (2.18)

Если выполняются приводимые ниже (в квадратных скобках) соотношения, то, используя формулу Ньютона (см. п. 5), можно получить менее громоздкие выражения для є:

$$\varepsilon \simeq -\frac{2s}{3r} \left(1 - \frac{4s^2}{27r^3 + 12s^2} \right) \begin{bmatrix} r > 0\\ 40s^2 \le 27r^3 \end{bmatrix};$$
 (2.18a)

$$s \approx \sqrt[3]{-2s} \left(1 - \frac{r}{\sqrt[3]{4s^2 + r}} \right) \begin{bmatrix} r \ge 0; & -2s < 1; \\ 27 | r^3 | \le 0, 4s^2 \end{bmatrix}; \quad (2.186)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cong \sqrt{-3r} + \frac{s}{3r} \begin{bmatrix} r < 0; \quad -3r < 1; \\ -27r^3 \ge 40s^2 \end{bmatrix}. \quad (2.18B)$$

Погрешность определения t_{32} из этих формул не превышает нескольких процентов. В п. 6 описываются другие, обычно более удобные способы определения корня t_{32} уравнения (2.15).

Спосле определения запаздывания остальные два коэффициента изображения (2.3) находятся из простых формул:

$$b_{1} = a_{1} - t_{32}; b_{2} = a_{2} - a_{1}t_{32} + 0.5 t_{32}^{2},$$
 (2.19)

причем иногда можно пренебречь членом $0.5 t_{a}^2$.

В соответствии с выражением (2.3) при *m*=2 имеем

$$\hat{h}_{32}(p) = \frac{1}{p(1+b_1p+b_2p^2)} e^{-pt_{32}} \div h_{32}(t).$$
 (2.20)

Отсюда

$$h_{32}(t) = \left[1 - e^{-\alpha t'} \left(\cos \omega t' + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t'\right)\right] \cdot 1(t'), \quad (2.21)$$

Где $t' = t - t_{32}$ и

$$a + j\omega = \frac{b_1}{2b_2} \left(1 + j \sqrt{\frac{4b_2}{b_1^2} - 1} \right)$$
(2.22)

Если $4b_2 \le b_1^2$, то выражение (2.21) преобразуется в апериодическое.

5. Нахождение наименьшего вещественного корня $t_3 = t_{3m}$ уравнения (1.26) может в отдельных случаях (при $m \ge 2$) составить некоторые трудности; это — наи-

более громоздкая операция в определении изображения аппроксимирующей функции. Однако чаще всего удается, используя приближенные методы решения алгебраических уравнений [16, 20], сравнительно просто найти приближенное значение $t_3 \cong t_3 m$. После этого нетрудно получить более точное значение

$$t_{\mathbf{3}m} = \widetilde{t}_{\mathbf{3}} + \Delta t_{\mathbf{3}}, \qquad (2.23)_{\mathbf{3}}$$

где определяемая по формуле Ньютона поправка [16]

$$\Delta t_{3} = -\frac{F_{m+1}(\tilde{t}_{3})}{[dF_{m+1}/dt_{3}]}_{t_{3}}; \qquad (2.24)$$

здесь $F_{m+1}(t_3)$ — функция, фигурирующая в уравнении (1.26).

Часто уже одна поправка дает удовлетворительный результат. Если же это необходимо, то, используя снова формулу (2.24), можно найти вторую поправку. При этом (для упрощения вычислений) целесообразно предварительно округлить величину \tilde{t}_3 .

Часто величина t_{3m} относительно мала, и при определении \tilde{t}_3 можно в уравнении (1.26) отбросить члены, содержащие высокие степени t_3 ; иногда даже можно принять

$$\widetilde{t}_3 = a_{m+1}/a_m. \tag{2.25}$$

6. Проиллюстрируем применение формулы Ньютона на примерах определения запаздывания t_{32} , соответствующего m=2.

Подставляя в формулу (2.24) функцию $F_3(t_3)$ из левой части уравнения (2.15), получим поправку

$$\Delta t_{3} = -\frac{\tilde{t}_{3}^{3} - 3a_{1}\tilde{t}_{3}^{2} + 6a_{2}\tilde{t}_{3} - 6a_{3}}{3\tilde{t}_{3}^{2} - 6a_{1}\tilde{t}_{3} + 6a_{2}}.$$
 (2.26)

Здесь полезно различать 3 случая.

1) Если $\varepsilon_1 = \lambda_2 / \lambda_1^2 < 0,5$, то можно принять

$$\widetilde{t}_{3} = a_{3}/a_{2}. \qquad (2.27)$$

Находя дважды из формулы (2.26) поправку и раскладывая ее в ряд, можно получить весьма точное выпажение запаздывания в виде ряда

$$t_{32} = \frac{a_3}{a_2} \left[1 + \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_1^2}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1}{3} \right) + \frac{\epsilon_1^3}{4} \left(1 - \frac{\lambda_1}{6} \right) + \dots \right].$$
(2.28)

Неравенство $\varepsilon_1 < 0.5$ часто встречается на практике как при $\lambda_1 < 0.5$, так и при $\lambda_1 > 0.5$. Ощутительная погрешность (10—15%) применения формулы (2.28) получается при $\lambda_1 < 0.2$, если при этом ε_1 близко к 0.5.

Если ε₁>0,5 и λ₁≤1, то целесообразно принять

$$\tilde{t}_3 = \lambda_1 a_1 = a_2/a_1. \tag{2.29}$$

В этом случае с учетом находимой из формулы (2.26) поправки получаем такое выражение запаздывания:

$$t_{32} \cong a_1 \left(\frac{2}{3} \lambda_1 + 2\varepsilon_1 - 1 \right). \tag{2.30}$$

Уже при є₁>0,53 погрешность применения этой формулы не превышает нескольких процентов.

3) Если $\varepsilon_1 > 0,5$ и $\lambda_1 > 1$, то можно принять $\tilde{t}_3 = a_1$. Тогда находимая из формулы (2.26) относительная поправка

$$\frac{\Delta t_{\mathbf{s}_2}}{a_1} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_1 - 1} \right) = 2 \frac{\lambda_{21}, \mathbf{x}_p - \lambda_2}{2\lambda_1 - 1}. \quad (2.31)$$

Эта формула тем точнее, чем меньше разность $\lambda_{21, \text{кр}} - \lambda_2$. Если $\Delta t_{32}/a_1 > 0, 1$, то, используя формулу (2.26), следует найти вторую поправку.

7. Приближение 3-го порядка (m=3). Аппроксимирующая функция 3-го порядка приближения реализуется при

$$\lambda_3 = a_4/a_1^4 < \lambda_{3, kp},$$
 (2.32)

где $\lambda_{3, \text{кр}}$ зависит от того, существуют или не существуют приближения более низких порядков.

Соответствующие выражения для $\lambda_{3, \kappa p}$ приводятся в приложении 1, п. 11. Если приближение 2-го порядка не существует, то кроме неравенства (2.32) должно выполняться также неравенство (П.1.24), вытекающее из теоремы Гурвица. Если приближение 3-го порядка существует, то в со. ответствии с уравнением (1.26) запаздывание $t_{3m} = t_{3m} = t_{3m}$ равно наименьшему вещественному корню урав. нения

$$F_{4}(t_{3}) = t_{3}^{4} - 4a_{1}t_{3}^{3} + 12a_{2}t_{3}^{2} - 24a_{3}t_{3} + 24a_{4} = 0.$$
 (2.33)

Этот корень можно найти по методу Ньютона, исполь зуя формулы (2.23) и (2.24). Нужное для этого прибли женное значение $\tilde{t}_3 \simeq t_{33}$ можно выбрать, исходя из сле дующих соображений.

Как показано в приложении 1, запаздывание должно удовлетворять неравенствам

$$0 < t_{33} < t_{3\overline{m}}$$
, (2.34)

где $t_{\overline{sm}}$ — запаздывание, соответствующее приближению порядка $\overline{m} < 3$, ближайшего к m=3 (если приближения 1-го и 2-го порядков не существуют, то $\overline{m} = 0$ и $t_{\overline{sm}} = a_1$).

Так как в определяемом неравенствами (2.34) интер вале других корней уравнения (2.32) быть не может, то можно принять

$$\widetilde{t}_{3} = 0.5t_{3\overline{m}} \,. \tag{2.35}$$

Если заметно выполняется неравенство $a_4a_2 < 0.5a_3^2$, то целесообразно принять $\tilde{t}_3 = a_4/a_3$; если же $a_4a_2 < 0.2a_3^2$, то допустимо просто принять $t_{33} = a_4/a_3$.

При *m*=3 изображение аппроксимирующей функции

$$\widehat{h}_{33}(p) = \frac{1}{p(1+b_1p_1+b_2p^2+b_3p^3)} e^{-pt_{33}}, \qquad (2.36)$$

где согласно формулам (1.27)

$$b_{1} = a_{1} - t_{33};$$

$$b_{2} = a_{2} - a_{1}t_{33} + 0.5t_{33}^{2};$$

$$b_{3} = a_{3} - a_{2}t_{33} + \frac{1}{2}a_{1}t_{33}^{2} - \frac{1}{6}t_{33}^{3}.$$
(2.37)

Учитывая конкретные свойства уравнения (2.33), в ряде случаев удается находить компактные выражения коэффициентов функции (2.33), что иллюстрируется в § 3, Ж на примере решения сложной задачи. 56 8. Приближения порядка m>3 применяются редко. При необходимости получения такого приближенного решения следует воспользоваться общими соотношениями, выражаемыми формулами (1.26) и (1.27), а также формулами (П.1.11) и (П.1.25) приложения 1.

9. Аппроксимация с помощью незапаздывающей функции. Если в изображении (2.1) аппроксимируемой функции h коэффициент $g'_0 \neq 0$ (в этом случае при нормировании изображения h устанавливается $g'_0=1$) и разность степеней полиномов n-r=1, то для аппроксимации функции h следует применять незапаздывающую функцию $h_{2m}=h_{2m}(t)$, изображение которой

$$\widehat{h}_{3m} = \frac{1 + e'_{1}p + \dots + e'_{s}p^{s}}{p(1 + b'_{1}p + \dots + b'_{m}p^{m})} = \frac{\|\mathscr{E}'_{s}(p)}{pB'_{m}(p)}, \qquad (2.38)$$

причем разность степеней *m—s=*1.

К приближению $h_{\partial m} \sim h$ нужного порядка *m* целесообразно прибегать и в том случае, когда n - r < m, причем при переходе от изображения (2.1) к изображению (2.2) не все первые m+1 коэффициентов a_i , определяемых равенствами (2.2а), положительны. Как показано в работах [15, 15а], вполне удовлетворительный результат приближения $h_{\partial m} \sim h$ получается, если при $n - r \ge 1$ степень *s* удовлетворяет оптимальному соотношению

$$s = m - (n - r).$$
 (2.39)

Условие реализуемости функции (2.38) заключается в выполнении неравенств $b'_{j} > 0$ (j=1, 2, ..., m), а при $m \ge 3$, кроме того, — в выполнении неравенств, вытекающих из теоремы Гурвица (см. приложение 1, п. 13), которые при m=3 и 4 имеют вид

$$b'_{\mathbf{s}} < b'_{\mathbf{1}}b'_{\mathbf{2}}; \quad b'_{\mathbf{4}} < i \left(\frac{b'_{\mathbf{s}}}{b'_{\mathbf{1}}}\right)^2 \left(\frac{b'_{\mathbf{1}}b'_{\mathbf{2}}}{b'_{\mathbf{s}}} - 1\right).$$
 (2.40)

Как указывалось в § 1, п. 22, параметры изображения (2.38) находятся из решения системы из m+1Уравнений (1.61). В частности, при s=0, 1 и 2 (и m>s) получаются приводимые ниже формулы для коэффициентов изображения (2.38).

a) при
$$s=0$$
 $(e'_1=e'_2=\ldots=0)$
 $b'_j=a_j;$ (2.41)

57

б) при s=1 (e'2=e'3=...=0)

$$e'_{1} = -\frac{a_{m+1}}{a_{m}}; \quad b'_{j} = a_{j} + e'_{1}a_{j-1}; \quad (2.42)$$

в) при $s = 2(e'_{3} = e'_{4} = ... = 0)$

$$e'_{1} = \frac{a_{2}a_{5} - a_{3}a_{4}}{a_{3}^{2} - a_{2}a_{4}}; \quad e'_{2} = \frac{a_{4}^{2} - a_{3}a_{5}}{a_{3}^{2} - a_{2}a_{4}}; \\ b'_{j} = a_{j} + e'_{1}a_{j-1} + e'_{2}a_{j-2}.$$

$$(2.43)$$

Фигурирующие в формулах параметры a_k (k=j, j-1, j-2) определяются равенствами (2.2a), причем при k=0 тождественно $a_k \equiv 1$, а при k < 0 тождественн₀ $a_k \equiv 0$.

Ввиду простоты построения аппроксимирующей функции (2.38) к приближению $h_{3m} \sim h$ целесообразно прибегать и в том случае, если при $g'_0=1$ и выполнения равенства (2.39) коэффициенты a_i получаются хотя в положительными (следовательно, приближение $h_{3m} \sim h$ существует), но запаздывание t_{3m} аппроксимирующей функции (2.3) мало сравнительно с величиной $a_1=a'_1--g'_1$ (например, $t_{3m} < 0.2a_1$).

10. Аппроксимация по «способу производной». К такому способу аппроксимации следует прибегать в случаях:

а) если в изображении (2.1) коэффициент $g'_0=0;$

б) если при $g'_0 \neq 0$ не все m+1 первых коэффициентов a_i , определяемых равенствами (2.2a), положительны, а незапаздывающая аппроксимирующая функция (2.38) не реализуется (некоторые из коэффициентов $b'_i < 0$);

в) если при реализации функции (2.38) не удается (невозможно или это оказывается чрезмерно громоздким) удовлетворить равенству (2.39).

В указанных случаях приближение нужного порядка *m* следует осуществлять с помощью аппроксимирующей функции

$$h_{dm} = g'_{0}h'_{3m} + g'_{1}\frac{dh'_{3m}}{dt} + \dots + g'_{r}\frac{d^{r}h'_{3m}}{dt^{r}}.$$
 (2.44)

Здесь g'_0, g'_1, \ldots, g'_r — коэффициенты, фигурирующие в исходном уравнении (2.1), а h'_{3m} — вспомогательная 58 $_{\mathfrak{ga}\Pi}$ аздывающая аппроксимирующая функция, выражаю- $_{\mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{s}}$ приближение $h'_{\mathfrak{s}m}\sim h'$, где

$$h'_{3m} \leftrightarrow \hat{h}'_{3m} = \frac{\mathrm{e}^{-pt'_{3m}}}{p(1+b'_{1}p+\ldots+b'_{m}p^{m})};$$
 (2.45)

$$h' \leftrightarrow h = \frac{1}{p \left(1 + a'_1 p + \dots + a'_n p^n\right)}.$$
 (2.46)

Изображение (2.46) получается из исходного изображения (2.1), если в нем положить $g'_0=1$ и $g'_1=\ldots=g'_r==0$.

Параметры изображения (2.45) находятся по тем же формулам, по которым определяются параметры изображения (2.3), но в этих формулах следует заменить a_i на a'_i , b_j на b'_j и t_{3m} на t'_{3m} . Аналогичным путем используются и другие формулы, определяющие условия существования приближения того или иного порядка, погрешности аппроксимации и др. Аппроксимирующая функция (2.45) определена в об-

Аппроксимирующая функция (2.45) определена в области $t > t'_{3m}$. В области $t < t'_{3m}$ ход аппроксимирующей функции намечается ориентировочно с учетом того, что в точке t=0 исходная функция h(t) и n-r-1 ее первых производных равны нулю (см. § 1, п. 23, рис. 1.12). Соображения по выбору надлежащего порядка приближения $h_{dm} \sim h$ приводятся в § 1, п. 25.

Сравнение различных способов аппроксимации «сложных» сигналов вида (2.1) производится в § 1, пп. 21 и 24 (рис. 1.11), а также в § 3,Е.

11. Нормировка уравнений по времени. При анализе переходных процессов часто полезно осущствлять нормировку времени, принимая некоторую постоянную Θ в качестве эталона времени, определяющего безразмерное время $\tau = t/\Theta$. В соответствии с этим вводится «безразмерный» оператор

$$q = p\Theta. \tag{2.47}$$

Пусть с учетом подстановки (2.47) изображение аппроксимируемой функции имеет вид

$$\widehat{h}(p) = \frac{1}{p\left(1 + a_1 q + \dots + a_n q\right)} \Rightarrow h(\tau), \qquad (2.48)$$

где все коэффициенты a_i являются безразмерным величинами. В соответствии с этим изображение аппрок, симирующей функции принимает вид

$$\widehat{h}_{3m}(p) = \frac{\mathrm{e}^{-q\tau_{3m}}}{p\left(1+b_1q+\ldots+b_mq^m\right)} \div h_{3m}(\tau), \qquad (2.49)$$

где коэффициенты b_i также безразмерны и $\tau_{3m} = t_{3m} / \Theta^{*}$

Согласно теореме подобия оригиналы изображени (2.48) и (2.49) отличаются соответственно от оригина. лов изображений (2.4) и (2.3) только заменой в по. следних времени t на $\tau = t/\Theta$ [17].

Из теоремы подобия также следует, что все приве. денные в данном и других параграфах (а также в приложениях) соотношения и формулы, используемые для нахождения оригинала и изображения аппроксимирующей функции, останутся неизменными, если во всех соотношениях и формулах заменить время t на $\tau = t/\Theta_{\rm H}$ запаздывание t_{3m} на безразмерное запаздывание $\tau_{3m} = = t_{3m}/\Theta$.

12. Аппроксимация изображения, выражаемого трансцендентной функцией. В ряде случаев (см. § 3, A, B) изображение аппроксимируемой переходной характеристики выражается трансцендентной функцией вида

$$\widehat{h} = \widehat{h}(p) = \frac{G_0}{pA_{\mathrm{T}}(p)}, \qquad (2.50)$$

где $G_0 = \text{const}$, а трансцендентная функция $A_{\tau}(p)$ раскладывается по степеням p в сходящийся ряд, причем изображение (2.50) приводится к виду

$$\widehat{h} = \frac{G_0}{pA_0 (1 + a_1 p + a_2 p^2 + ...)} = \frac{G_0}{pA_0 A_\infty (p)}, \quad (2.51)$$

где

$$A_{0} = \lim_{p \to 0} A_{T}(p) = A_{T}(0); \qquad (2.52)$$

$$a_{\mathbf{R}} = \frac{1}{i!} \lim_{\boldsymbol{p} \to 0} \left[\frac{1}{A_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{p})} \frac{d^{i}A_{\mathbf{T}}}{d\boldsymbol{p}^{-i}} \right] (i = 1, 2, ...).$$
(2.53)

^{*} В выражениях (2.48) и (2.49) символы безразмерных коэффициентов сохранены такими же, как и символы размерных коэффициентов выражений (2.4) и (2.3), для того, чтобы не менять символику всех соотношений данного и других параграфов.

Если разложение функции $A_{r}(p)$ выражается стандартным рядом, то выражения коэффициентов a_i иногда проще находятся непосредственно из этого ряда (см. § 3,A).

Процедура получения приближенного решения $h_m(t) \sim h(t)$, где $h(t) \leftrightarrow \hat{h}(p)$ и изображение \hat{h} выражается функцией (2.51), не отличается от рассмотренной в пп. 1—7.

3. Некоторые применения приближенного анализа

А. Переходные характеристики идеализированного бездрейфового транзистора

1. Пренебрегая влиянием емкостей на рузки и переходов, найдем приближенное выражение переходной характеристики коллекторного тока $i_{\rm R}$ идеализированного бездрейфового транзистора, отпираемого перепадом тока эмиттера $I_{2} \cdot 1(t)$ (см. приложение 2, пп. 1 и 2). Операционное изображение переходной характеристики выражается формулой (П.24), т. е.

$$\widehat{h} = \frac{\widehat{i}_{\kappa}}{I_{3}} = \frac{\gamma_{p}}{p \operatorname{ch}\left(\delta \sqrt{1 + p\tau_{p}}\right)}.$$
(3.1)

Изображение (3.1) выражается трансцендентной функцией, что типично для систем, описываемых уравнениями в частных производных. В соответствии с изложенным в § 2, п. 12, для применения приближенного метода анализа необходимо предварительно представить изображение (3.1) в виде рациональной дроби от *р*. Это достигается разложением в ряд выражения, стоящего в знаменателе дроби (3.1):

$$ch \left(\delta \sqrt{1+p\tau_p}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{2!} \left(1+p\tau_p\right) + \frac{\delta^4}{4!} \left(1+p\tau_p\right)^2 + \dots$$
(3.2)

Имея в виду осуществить нормировку переходной характеристики по амплитуде, замечаем, что слагаемые ряда, не зависящие от *p*, образуют ряд

$$1 + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots = \operatorname{ch} \delta = \frac{1}{\kappa},$$
 (3.3)

и в соответствии с формулой (П.2.8) $\gamma_p/ch \, \delta = \gamma_p \varkappa = \alpha_0$, где $\alpha_0 - \kappa o \Rightarrow \phi \phi$ ициент передачи тока эмиттера.

При решении подобных задач полезно осуществлять также нормировку переходной характеристики по времени (см. § 2, п. 11). В данном случае целесообразно принять $q = p\Theta$, где постоянная времени, относительно которой осуществляется нормировка,

$$\theta = \frac{\delta^2}{2} \tau_p = \frac{\omega^2 \tau_p}{2L_p^2} = \frac{\omega^2}{2D_p} = \tau_D; \qquad (3.4)$$

здесь приняты во внимание соотношение (П.2.5) и равенство $\sqrt{D_p \tau_p} = L_p$. Заметим, что $\tau_D - в ремя \ du \phi \phi y suu$ носителей (дырок) через базу [10, 25]. Эта длительность весьма мала сравнительно с временем жизни τ_p . Действительно, в соответствии с соотношением (П.2.13) можно записать: $\tau_D = 0.5\delta^2 \tau_p \approx \tau_p/\beta_0$, а $\beta_0 \gg 1$.

Группируя в разложении (3.2) члены, относящиеся к одинаковым степеням p, и осуществляя намеченные выше нормировки по амплитуде (для чего выносим в разложении (3.2) ch $\delta = 1/\varkappa$ за скобку) и по времени, представим уравнение (3.1) в виде

$$\frac{\hat{h}}{a_0} = \frac{1}{p(1+a_1q+a_2q^2+\ldots)},$$
(3.5)

где

$$a_{1} = \frac{2\varkappa}{2!} \left[1 + \frac{\delta^{2}}{3!} + \frac{\delta^{4}}{5!} + \dots \right] = \frac{1}{1!} \left(1 - \frac{\delta^{2}}{3} + \frac{2\delta^{4}}{15} - \dots \right);$$

$$a_{2} = \frac{2^{2}\varkappa}{4!} \left[1 + \frac{12\delta^{2}}{5!} + \frac{18\delta^{4}}{7!} + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{2\delta^{2}}{5} + \frac{17\delta^{4}}{105} - \dots \right);$$

$$a_{i} = \frac{2^{i}}{(2i)!} \left(1 - \mu_{i}\delta^{2} + \eta_{i}\delta^{4} - \dots \right). \quad (3.5a)$$

Здесь ряды, стоящие в круглых скобках, получены путем почленного деления рядов, стоящих в квадратных скобках, на ряд (3.3). Заметим, что поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только приближение порядка m=1, то значения $\mu_i \ll 1$ и $\eta_i \ll 1$ при $i \ge 3$ не существенны. Изображение (3.5) определяется бесконечным степенным рядом, причем его коэффициенты a_1 и a_2 удовлетворяют условию существования приближения 1-го порядка. Действительно, так как $\delta^2 \ll 1$ (обычно $\delta^2 < 0,1$), то выражаемый формулой (1.33) параметр

$$\mathbf{\xi}_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{1, \mathbf{R}\mathbf{p}}} = 2\lambda_1 = 2\frac{a_2}{a_1^2} = 2\frac{1}{3!} = \frac{1}{3!} \ll 1.$$
 (3.56)

Поэтому можно рассчитывать на весьма хорошее приближение $h_{ai} \sim h$.

Согласно методике, описанной в § 2, п. 3,

$$\frac{h_{a_1}}{\alpha_0} = \left(1 - e^{-\frac{\tau - \tau_{a_1}}{b_1}}\right) \cdot l(\tau - \tau_{a_1}), \qquad (3.6)$$

где в соответствии с принятой нормировкой времени $\tau = t/\tau_D$, $\tau_{31} = t_{31}/\tau_D$ — безразмерное запаздывание и $b_1 \Theta = b_1 \tau_D$ — постоянная времени аппроксимирующего процесса.

Согласно формулам (2.8) и (2.9)

$$b_{1} = \sqrt{a_{1}^{2} - 2a_{2}} \approx \sqrt{1 - \frac{2\delta^{2}}{3} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2\delta^{2}}{5}\right)} \approx \\ \approx 0.817 \left(1 - \frac{2\delta^{2}}{5}\right); \\ \tau_{31} = a_{1} - b_{1} \approx 1 - \frac{\delta^{2}}{3} - 0.817 \left(1 - \frac{2\delta^{2}}{5}\right) \approx \\ \approx 0.183 \left(1 - \frac{\delta^{2}}{30}\right),$$

где пренебрежено малыми величинами порядка δ^4 . Решение (3.6) совпадает с решением, полученным С. Я. Шацем путем разложения изображения (3.1) в ряд и применения метода моментов [9, 10].

На рис. 3.1 сплошной линией изображена нормированная переходная характеристика h/a_0 , построенная из строгого решения (П.2.6) (при $\pi^2 + 4\delta^2 = 10$); ось времени нормирована относительно «основной» постоянной времени T_0 решения (П.2.6), которая практически равна постоянной времени $b_1\Theta = b_1\tau_D$. Показанные на рис. 3.1 точки аппроксимирующей характеристики h_{31}/a_0 почти совпадают с характеристикой h/a_0 . Заметное различие наблюдается лишь в небольшой окрестности $t = t_{31}$, расположенной вне междецильного интервала (при

h < 0,1). В точке $t = t_{31}$ «амплитудная» погрешность аппроксимации $\Delta h(t_{31}) = 0,039$, но дальше она быстро уменьшается, и наибольшая в междецильном интервале погрешность $\Delta h_{\text{наи6}} \simeq 0,01$. Выражаемая формулой (1.31) наибольшая «временная» погрешность $\delta_{t,\text{ наи6}} = 0,037$ получается на уровне h = 0,1 (при h > 0,2 «временная» погрешность $\delta_t = \Delta t/t < 0,022$). Выражаемая формулой (1.30) погрешность определения междецильного времени $\delta_{\phi} = \Delta t_{\phi}/t_{\phi} = 0,012$; в данном случае она меньше погрешности $\delta_{t,\text{ наи6}}$.



Рис. 3.1. Нормированная переходная характеристика коллекторного тока *i*_к идеализированного бездрейфового транзистора, отпираемого перепадом тока эмиттера.

Сравним найденные реальные значения погрешностей с их граничными значениями. Выражая все параметры в относительных единицах (с точностью до малых порядка δ^2) и полагая $\tau_{31} = 0,183$, $b_1 = 0,817$, вычислим из формул (1.34) и (1.33) величины параметров, определяющих граничные значения погрешностей:

$$c_{3} = \tau_{31}^{2} \left(\frac{b_{1}}{2!} + \frac{\tau_{31}}{3!} \right) \approx 0,016; \quad \zeta_{3} = \frac{a_{3}}{c_{3}} \approx 0,71,$$

где *а*₃ вычислено из формулы (3.5a).

Параметру $\zeta_3 = 0,71$ и вычисленному выше из формулы (3.56) параметру $\xi_1 = 0,33$ соответствуют находимые 5—2247 65 из рис. 1.8 и 1.9 граничные значения погрешностей δ_{tr} ≈ 0,065 и δ_{фr} ≈ 0,015.

Эти значения больше реальных погрешностей, что находится в соответствии с изложенным в § 1, пп. 14, 15.

Сравним реальную величину $\delta_{t, \text{ наиб}} = 0,037$ со значением, получаемым из оценочной формулы (1.36). Для этого из формул (1.37) находим

$$c_4 = \tau_{a_1}^3 \left(\frac{b_1}{3!} + \frac{\tau_{a_1}}{4!} \right) \approx 8,9 \cdot 10^{-4}; \ c_5 = \tau_{a_1}^4 \left(\frac{b_1}{4!} + \frac{\tau_{a_1}}{5!} \right) \approx 4 \cdot 10^{-5}.$$

Вычислив из формулы (3.5а) значения a_4 и a_5 , найдем $\zeta_4 = a_4/c_4 \cong 0.45$ и $\zeta_5 = a_5/c_5 \cong 0.22$. Подставляя эти значения в формулу (1.36), получим

$$\delta_{t,\text{hang}} \cong \delta_{t,\text{f}} V \overline{0,7.0,55^2 + 0,18.0,78^2 + 0,12} = 0,044,$$

что только на 12% больше реального значения погрешности.

2. Найдем приближенное выражение нормированной переходной характеристики коллекторного тока идеализированного транзистора, отпираемого перепадом входного напряжения (см. приложение 2, п. 4).

Отправляясь от изображения (П.2.15) переходной характеристики, после ее нормирования (по амплитуде) относительно установившегося тока коллектора $i_{\kappa}(\infty)$, определяемого соотношением (П.2.17), получим

$$\widehat{h} = \frac{\widehat{i}_{\mathbf{x}}}{i_{\mathbf{x}}(\infty)} = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{\delta V 1 + p\tau_p}{p \operatorname{sh}(\delta V 1 + p\tau_p)}, \qquad (3.7)$$

где

$$\frac{1}{x_1} = 1 + \frac{\delta^2}{3!} + \frac{\delta^4}{5!} + \dots$$
 (3.7a)

Аналогично изложенному в п. 1 используем разложение

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\delta V \overline{1+p\tau_{p}}\right)}{\delta V \overline{1+p\tau_{p}}} = 1 + \frac{\delta^{2}\left(1+p\tau_{p}\right)}{3!} + \frac{\delta^{4}\left(1+p\tau_{p}\right)^{2}}{5!} + \cdots (3.8)$$

и осуществляем нормировку по времени $(q = p\Theta)$ относительно постоянной времени

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\delta^{\mathbf{t}} \boldsymbol{\tau}_{p}}{2} = \boldsymbol{\tau}_{D} \cong \frac{\boldsymbol{\tau}_{p}}{\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}}}.$$
 (3.9)

Учитывая соотношения (3.8) и (3.9), запишем уравнение (3.7) в виде

$$\widehat{h} = \frac{\widehat{i}_{\mathbf{R}}}{i_{\mathbf{R}}(\infty)} = \frac{1}{p\left(1 + a_1q + a_2q^2 + \ldots\right)} \nleftrightarrow h, \qquad (3.10)$$

где коэффициенты бесконечного ряда

$$a_{1} = 2\kappa_{1} \left[\frac{1}{3!} + \frac{2\delta^{2}}{5!} + \frac{3\delta^{4}}{7!} + \dots \right] = \frac{2}{3!} \left(1 - \frac{\delta^{2}}{15} + \dots \right);$$

$$a_{2} = 4\kappa_{1} \left[\frac{1}{5!} + \frac{3\delta^{2}}{7!} + \frac{6\delta^{4}}{9!} + \dots \right] = \frac{4}{5!} \left(1 - \frac{2\delta^{2}}{2!} + \dots \right);$$

$$a_{\tilde{4}} = \frac{2^{4}}{(2l+1)!} \left(1 - \mu_{4}\delta^{2} + \dots \right). \quad (3.11)$$

Здесь ряды, стоящие в круглых скобках, получены путем почленного деления рядов в квадратных скобках на ряд (3.7а). Так же как и в п. 1, значения $\mu_i \ll 1$ не существенны для дальнейшего анализа, связанного с накождением приближения 1-го порядка.

щественны для дальнеишего анализа, связанного с накождением приближения 1-го порядка. В рассматриваемом случае, хотя и слабее, чем в п. 1, но все же с существенным запасом выполняется условие существования приближения 1-го порядка, и выражаемый формулой (1.33) коэффициент

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{1,\pi_p}} = 2\lambda_1 = 2 \frac{a_2}{a_1^2} \approx 2 \frac{(3!)^3}{5!} = 0.6 < 1. \quad (3.12)$$

Аппроксимирующая функция 1-го порядка приближения имеет вид

$$h_{31} = h_{31}(\tau) = \left(1 - e^{-\frac{\tau - \tau_{31}}{b_1}}\right) \cdot 1(\tau - \tau_{31}), \quad (3.13)$$

где в соответствии с принятой нормировкой времени $\tau = t/\tau_D$, $\tau_{31} = t_{31}/\tau_D$ и согласно формулам (2.8) и (2.9) (с точностью до малых величин порядка δ^4)

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} \approx 0.211 \left(1 - \frac{2\delta^2}{21}\right);$$

$$\tau_{B1} = a_1 - b_1' \approx 0.122 \left(1 - 0.016 \,\delta^2\right).$$

В данном случае влияние малой величины δ² оказывается еще менее заметным, чем в рассмотренном в п. 1 случае. При принятой идеализации процессов (здесь существенно пренебрежение объемным сопротивлением 5• 67 базы) постоянная b_1 получилась почти в 4 раза меньше, чем в п. 1, но запаздывание уменьшилось только в 1,5 раза. Следовательно, относительная величина запаздывания здесь значительно больше.

На рис. 3.2 пунктирной линией изображена характеристика h_{31} , а сплошной линией — характеристика h, построенная из строгого решения (П.2.16). Ось времени нормирована относительно «основной» постоянной вре-



Рис. 3.2. Нормированная переходная характеристика коллекторного тока *i*_н идеализированного бездрейфового транзистора, отпираемого перепадом входного напряжения.

мени T_1 решения (П.2.16), которая почти равна постоянной времени $b_1\tau_D$ приближенного решения. Следует отметить, что в окрестности t=0 решение (П.2.16) оказывается особенно громоздким: оно медленно сходится и для определения величины <u>h=0</u> приходится суммировать не мало членов ряда (П.2.16).

На и большие в погрешности аппроксимации получаются здесь (как и в случае, рассмотренном в п. 1) в окрестности $t=t_{a1}$ в не междецильного интервала. Как и следовало ожидать (из-за большей величины ξ_1), здесь гогрешности аппроксимации оказываются существенно бо́льшими, чем в предыдущем случае, но абсолютно они не велики. «Амплитудная» погрешность $\Delta h(t_{a1}) = 0,08$. Наибольшие в междецильном интервале погрешности аппроксимации получаются на нижней границе интервала (при h=0,1), причем наибольшая «амплитудная» погрешность $\Delta h_{\text{Hand}} = 0,055$, наибольшая «временная» погрешность $\delta_{l, \text{ наи6}} = 0,095$; погрешность определения междецильного времени $\delta_{\Phi} = 0,02 < \delta_{l, \text{ наи6}}$.

Находимые (подобно указанному в п. 1) из рис. 1.8 и 1.9 граничные значения погрешностей $\delta_{t\,r}=0,145$ и $\delta_{d\mu r}\cong0,3$ соответствуют выражаемому формулой (3.12) параметру $\xi_1=0,6$ и параметру $\zeta_3=a_3/c_3=0,838$, где находимый из формулы (1.34) коэффициент $c_3=1,9\cdot10^{-3}$, а коэффициент a_3 находится из формулы (3.11). В соответствии с изложенным в § 1, п. 14, граничные значения погрешностей больше реальных погрешностей, что также вытекает из сравнения реальной погрешности $\delta_{t, \text{ нам6}}$ с расчетным значением. Для определения последнего находим (аналогично выполненному в п. 1) из формул '(1.37) величины параметров $\zeta_4=a_4/c_4=0,594$ и $\zeta_5=$ $=a_5/c_5=0,359$. Подставляя эти значения в оценочную формулу (1.36), найдем

$$\delta_{t,\text{Haud}} \cong \delta_{tr} \sqrt{0,7 \cdot 0,406^2 + 0,18 \cdot 0,641^2 + 0,12} = 0,081.$$

что отличается от реального значения погрешности на 15%.

3. Найдем приближенное выражение переходной характеристики коллекторного тока идеализированного транзистора, отпираемого перепадом тока базы $I_6 \cdot 1(t)$ (см. приложение 2, п. 3).

Операционное изображение переходной характеристики выражается формулой (П.2.10), т. е.

$$\widehat{h} = \frac{\widehat{l}_{\kappa}}{I_6} = \frac{1}{p \left[\operatorname{ch} \left(\delta V \overline{1 + p \tau_p} \right) - 1 \right]} \stackrel{\text{\tiny{\leftrightarrow}}}{\to} h.$$
(3.14)

Производя разложение в ряд функции, стоящей в квадратных скобках, получим

$$\operatorname{ch}\left(\delta\sqrt{1+p\tau_{p}}\right)-1=\frac{\delta^{2}\left(1+p\tau_{p}\right)}{2!}+\frac{\delta^{4}\left(1+p\tau_{p}\right)^{2}}{4!!}+\ldots$$

Замечаем, что слагаемые этого ряда, не зависящие от *p*, образуют ряд

$$\frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} + \frac{\delta^6}{6!} + \ldots = \operatorname{ch} \delta - 1 = 1/\beta_0, \qquad (3.15)$$

где учтено соотношение (П.2.13). Ряд (3.15) определяет установившееся значение $h(\infty) = \hat{h}(0) = \beta_0$. Осуществляя 69 нормировку переходной характеристики по амплитуде относительно $h(\infty)$ и по времени относительно постоянной времени Θ ($q = p\Theta$), где

$$\Theta = \tau_p, \qquad (3.16)$$

представим изображение нормированной переходной характеристики в виде

$$\frac{\hat{h}}{\hat{\beta}_{0}} = \frac{\hat{i}_{g}}{\hat{\beta}_{0}I_{0}} = \frac{1}{p(1 + A_{1}q + A_{3}q^{2} + ...)^{3}}$$
(3.17)

Find
$$\beta_0 I_6 = I_{\pi}(\infty)$$
 is

$$A_1 = \beta_0 \left[\frac{\delta^2}{2!} + \frac{2\delta^4}{4!} + \frac{3\delta^6}{6!} + \dots \right] = 1 + \frac{2\delta^2}{4!} - \dots;$$

$$A_3 = \beta_0 \left[\frac{\delta^4}{4!} + \frac{3\delta^6}{6!} + \frac{6\delta^6}{8!} + \dots \right] = \frac{2\delta^3}{4!} \left(1 + \frac{2\delta^3}{5!} - \dots \right);$$

$$A_t = \frac{2\delta^{2t-3}}{(2t)!} (1 + \mu_t \delta^3 - \dots). \quad (3.18)$$

Здесь замена символов a_i на A_i обусловлена чисто методическими соображениями (для различения этих коэффициентов от используемых ниже в пп. 4—6); значения коэффициента $\mu_i \ll 1$ при $i \ge 3$ не существенны для дальнейшего анализа, связанного с приближением 1-го порядка.

Коэффициенты A_i быстро убывают с возрастанием номера *i*, причем очень сильно выполняется неравенство (2.11), определяющее условие существования приближения 1-го порядка, и выражаемый формулой (1.33) коэффициент

$$\boldsymbol{\xi}_{1} = \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{1, \mathtt{xp}}} = 2\lambda_{1} = 2 \quad \frac{A_{2}}{A_{1}^{2}} \cong \frac{\delta^{2}}{3!} \ll 1 \quad (3.19)$$

Поэтому можно ожидать, что приближение $h_{31} \sim h$ будет вполне удовлетворительным, так как даже граничные значения погрешностей аппроксимации (см. рис. 1.8 и 1.9) здесь пренебрежимо малы.

Согласно методике, описанной в § 2, п. 3,

$$h_{a1} = h_{a1}(\tau) = \beta_0 (1 - e^{-(\tau - \tau_{a1})/b_1}) \cdot 1 (\tau - \tau_{a1}), \quad (3.20)$$

где в соответствии с равенством (3.16) $\tau = t/\Theta = t/\tau_p$; $\tau_{31} = t_{31}/\Theta = t_{31}/\tau_p$ и согласно формулам (2.8) и (2.9)

$$b_1 = \sqrt{A_1^2 - 2A_2} \approx 1 + \delta^4/6! \approx 1;$$
 (3.21)

$$\tau_{31} = A_1 - b_1 \cong \frac{2\delta^2}{4!} \left(1 - \frac{\delta^2}{30} \right) = \frac{\delta^2}{12} \ll b_1. \quad (3.22)$$

Полезно обратить внимание на то, что в данном случае запаздывание

$$t_{31} = \tau_{31} \tau_p \cong \frac{\delta^2}{12} \tau_p = \frac{\tau_D}{6} \cong \frac{\tau_p}{6\beta_0},$$

где учтено равенство (3.4). Это запаздывание почти равно запаздыванию, которое получилось при рассмотрении транзистора, отпираемого перепадом тока эмиттера (см. п. 1, где $t_{31} = 0,183\tau_D$).



Рис. 3.3. Начальный участок нормированной переходной характеристики коллекторного тока *i*_к идеализированного бездрейфового транзистора, отпираемого перепадом тока базы.

Однако относительная величина запаздывания $\tau_{31}/b_1 \cong \tau_{31} \cong \delta^2/12 \cong 1/(6\beta_0)$ получилась здесь почти в β_0 раз меньше, чем в случае, рассмотренном в п. 1.

Вследствие сильного выполнения неравенства τ₃₁≪b₁ Допустимо пренебречь запаздыванием и принять еще более простую аппроксимацию переходной характеристики с помощью незапаздывающей функции $h_{31} \sim h$ (см. § 2, п. 9). Согласно формулам (2.38) и (2.41) при m=1 (s=0) единственный параметр аппроксимирующей функции $b'_1=a_1=A_1\cong 1$. Отсюда $\hat{h}_{31}=\beta_0[p(1+pA_1)]^{-1}$, откуда

$$h_{\mathfrak{d}_1} = \beta_0 (1 - e^{-\tau/A_1}) \cong \beta_0 (1 - e^{-\tau}).$$
 (3.23)

На рис. 3.3 сплошной кривой изображен график начального участка нормированной переходной характеристики h/β_0 , построенный из строгого решения (П.2.11); пунктирной линией изображен график незапаздывающей переходной характеристики h_{31}/β_0 , построенный по формуле (3.23), а точки, приведенные на рис. 3.3., соответствуют аппроксимирующей функции h_{31} , выражаемой формулой (3.20). Из рис. 3.3 видно, что функция h_{31} почти совпадает с функцией h в области $\tau > \tau_{31}$. При более грубом приближении $h_{31} \sim h$ вводится небольшая «временнная» погрешность $\Delta \tau \cong \tau_{31}$.

Б. Переходная характеристика ключевой схемы с общим эмиттером

4. Найдем выражение переходной характеристики h для тока i_R , протекающего через резистор R_{κ} ключевой схемы, приведенной на рис. П.2.2 (см. приложение 2, п. 5), где предполагается, что бездрейфовый транзистор отпирается перепадом тока базы $I_5 \cdot 1(t)$.

Согласно формулам (П.2.21) и (П.2.22) изображение $\hat{h} \Rightarrow h = i_R / I_6$ (с учетом емкости $C_{\rm H}$ нагрузки и емкости $\overline{C}_{\rm K}$ коллекторного перехода) имеет вид

$$\widehat{h} \rightleftharpoons \frac{1/p}{\left[\operatorname{ch}\left(\delta \sqrt{1+p\tau_{p}}\right)-1\right]\left(1+p\gamma\tau_{p}\right)+p\gamma_{\mathsf{K}}\tau_{p}/\beta_{0}},\qquad(3.24)$$

где

$$\gamma = \frac{R_{\kappa} (C_{\mu} + \bar{C}_{\kappa})}{\tau_{p}}, \quad \gamma_{\kappa} = \frac{\beta_{0} R_{\kappa} \bar{C}_{\kappa}}{\tau_{p}}. \quad (3.25)$$

Если положить в выражении ph p=0, то, принимая во внимание соотношение (3.15), получим установившееся значение $h(\infty) = \beta_0$. Как было также пока-
зано в п. 3, стоящая в квадратных скобках выражения (3.24) функция

$$\operatorname{ch}(\delta \sqrt{1+p\tau_p}) - 1 = \frac{1}{\beta_0} (1 + A_1 q + A_2 q^2 + ...), (3.26)$$

где $q = p\tau_p$, а значения коэффициентов A_i выражаются равенствами (3.18). Имея это в виду и осуществляя нормировку по времени изображения (3.24) относительно постоянной $\Theta = \tau_p$, с учетом чего двучлен в круглых скобках выражения (3.24) $1 + p\gamma\tau_p = 1 + q\gamma$, после почленного перемножения этого двучлена на ряд (3.26) приведем изображение (3.24) к виду

$$\widehat{h} = \frac{\widehat{l}_R}{I_6} = \frac{\beta_0}{p \left(1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots\right)},$$
(3.27)

где

$$a_{1} = 1 + \gamma_{\kappa} + \gamma + \frac{2\delta^{2}}{4!} - \frac{\delta^{4}}{6!} + \dots;$$

$$a_{2} = \gamma \left(1 + \frac{2\delta^{2}}{4!} - \frac{\delta^{4}}{6!} + \dots \right) + \frac{2\delta^{2}}{4!} \left(1 + \frac{2\delta^{2}}{5!} - \dots \right);$$

$$a_{3} = \gamma \frac{2\delta^{2}}{4!} \left(1 + \frac{2\delta^{2}}{5!} - \dots \right) + \frac{2\delta^{4}}{6!} \left(1 - \frac{\delta^{2}}{84} + \dots \right);$$

$$a_{4} = \gamma \frac{2\delta^{4}}{6!} \left(1 - \frac{\delta^{2}}{84} + \dots \right) + \frac{2\delta^{6}}{8!} \left(1 - \frac{13\delta^{2}}{180} + \dots \right);$$

Пренебрегая заведомо малыми величинами и учитывая, что согласно соотношению (3.15) $\beta_0 \simeq 2/\delta^2$, упростим выражения коэффициентов a_i :

$$a_{1} \cong \frac{1 + \gamma_{R} + \gamma + 1}{(6\beta_{0})};$$

$$a_{2} \cong \gamma + \frac{1 + \gamma}{(6\beta_{0})};$$

$$a_{3} \cong \frac{\gamma}{6\beta_{0}} \left(1 + \frac{2 + \gamma}{30\beta_{0}\gamma}\right);$$

$$a_{4} \cong \frac{\gamma}{90\beta_{0}^{2}} \left(1 + \frac{3 - 2\gamma}{84\beta_{0}\gamma}\right);$$
(3.28)

Получить строгое аналитическое решение уравнения (3.24), по-видимому, невозможно. Анализ выражений (3.28) показывает, что при любых практически возможных значениях параметров γ_{κ} , γ и β_0 параметр $\lambda_1 =$

 $= a_2/a_1^2 < 0.25 < \lambda_{1, \text{кр}} = 0.5$. Еще сильнее выполняется неравенство $\lambda_2 = a_3/a_1^3 < \lambda_{2, \text{кр}}$.

Следовательно, в данном случае весьма сильно выполняются неравенства (2.11) и (2.12), выражающие условия существования приближений $h_{3m} \sim h$ при m=1и m=2. Принимая теперь во внимание, что при m=2функция h_{32} выражает в торое физически реализуемое приближение, можно прийти к выводу, что в области $\tau > t_{32}$ эта функция должна практически совпадать с функцией h, выражающей строгое решение уравнения (3.24). Во всяком случае, можно убедиться в том, что даже граничное значение погрешности аппроксимации, находимое из рис. 1.10, оказывается здесь неразличимо близким к нулю.

5. Функция $h_{32}(\tau)$ 2-го порядка приближения. Для определения функции $h_{32}(\tau)$ раньше надо найти безразмерное запаздывание τ_{32} (см. § 2, п. 4), являющееся наименьшим вещественным корнем кубического уравнения (2.15).

Приближенное значение $\tilde{\tau}_3 \cong \tau_{32}$ выражается равенством (2.27), т. е. $\tilde{\tau}_3 = a_3/a_2 \cong 1/(6\beta_0)$, где приняты во внимание равенства (3.28) и пренебрежено малыми величинами поряд-ка $1/\beta_0^2$. Определяя из формулы (2.24) поправку $\Delta \tau_8$ к значению $\tilde{\tau}_3$, после некоторых преобразований найдем, что

$$\frac{\Delta \tau_{s}}{\tau_{a}} < \frac{1}{-12} \frac{\gamma_{\text{K}}}{\beta_{0} \gamma} = \frac{\overline{C}_{\text{K}}}{12 (C_{\text{H}} + \overline{C}_{\text{K}})} \ll 1.$$

Эти неравенства выполняются достаточно сильно даже при $C_{\rm H}=0$, ввиду чего с высокой степенью точности можно принять, что относительная величина запаздывания переходной характеристики в ключевой схеме с общим эмиттером

$$\tau_{32} = \frac{t_{32}}{\tau_p} \cong \frac{1}{6\beta_0} \ll 1.$$
 (3.29)

Так как, по крайней мере, $\beta_0 > 10$, то практически можно пренебречь запаздыванием τ_{32} , но учет этого запаздывания не усложняет, а упрощает выражения ко-

эффициентов изображения h₃₂, которое согласно формуле (2.20) имеет вид

$$\widehat{h}_{32} = \frac{e^{-p\tau_{32}}}{p(1+b_1q+b_2q^2)} (q = p\tau_p), \qquad (3.30)$$

где согласно формулам (2.19)

$$b_1 = a_1 - \tau_{32} = 1 + \gamma_{\kappa} + \gamma;$$
 (3.31)

$$b_2 = a_2 - a_1 \tau_{32} + 0.5 \tau_{32}^2 \cong \gamma \left[1 - \frac{C_{\mathbf{x}}}{6(C_{\mathbf{x}} + C_{\mathbf{x}})} \right] \cong \gamma.$$
 (3.31a)

Заметим, что если пренебречь небольшим запаздыванием τ_{32} и принять $b_2 \cong \gamma$, то к упрощенному таким образом «незапаздывающему» изображению (см. § 1, п. 22) вида

$$\widehat{h}_{\mathfrak{d}_2} = \frac{1}{p(1+b_1q+b_2q^2)} \Leftrightarrow h_{\mathfrak{d}_2}(\tau) (q = p\tau_p)$$

можно прийти непосредственно из формул (П.2.21) и (П.2.22), если, как это обычно делается [10, 25], ввести упрощение в выражение (П.2.20), определяющее операционный коэффициент передачи

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\delta \, \operatorname{V} \, 1 + p\tau_p \right) - 1} \cong \frac{\beta_0}{1 + p\tau_p}.$$

Находя оригинал изображения (3.30), получим

$$h_{32}(\tau) = \beta_0 \left[1 - \frac{e^{-\nu_1 \tau'}}{\nu_1 b_1 \sqrt{1 - 2\eta}} + \frac{e^{-\nu_2 \tau'}}{\nu_2 b_1 \sqrt{1 - 2\eta}} \right] \cdot 1 (\tau'), \quad (3.32)$$

где

$$\tau' = \tau - \tau_{32}; \ \tau = t/\tau_p; \ \eta = \frac{2b_2}{b_1^2} < \frac{1}{2};$$
 (3.33)

$$\mathbf{v}_{1} = \frac{1}{b_{1}\eta} \left(1 - \sqrt{1-2\eta}\right) = \frac{1}{b_{1}} \left(1 + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^{2}}{2} + \dots\right);$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{b_1 \eta} (1 + \sqrt{1 - 2\eta}) = \frac{2}{b_1 \eta} \left(1 - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^3}{4} - \dots \right).$$

В силу неравенства (3.33) функция (3.32) является апериодической.

6. Функция $h_{31}(\tau)$ 1-го порядка приближения. Хотя выражаемая формулой (3.32) функция $h_{32} \sim h$ и не является сложной, все же в практике технических расчетов удобнее оперировать с более простой функцией h_{31} , выражающей приближение $h_{31} \sim h$ порядка m=1. Согласно методике, описанной в § 2, п. 3,

$$h_{a1} = h_{a1}(\tau) = \beta_0 (1 - e^{-(\tau - \tau_{a1})/b_1}) \cdot 1 (\tau - \tau_{a1}), \quad (3.34)$$

где $\tau = t/\tau_p$; $\tau_{31} = t_{31}/\tau_p$ и согласно формулам (2.8) и (2.9)

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} \approx 1 + \gamma_{\kappa} + \gamma - \frac{\gamma}{1 + \gamma_{\kappa} + \gamma}; \quad (3.34a)$$

$$\tau_{31} = a_1 - b_1 \cong \frac{\gamma}{1 + \gamma_{\kappa} + \gamma}.$$
(3.346)

Приближенные значения в последних двух формулах справедливы при $2\gamma \ll (1 + \gamma_{\kappa} + \gamma)$, что обычно выполняется.

Учитывая равенства (3.25), представим запаздывание и эквивалентную постоянную времени аппроксимирующей функции в виде

$$t_{31} = \tau_{31}\tau_p = \frac{-R_{K}(C_{R} + \overline{C}_{R})}{R_{K}C_{\Sigma} + \tau_p} \tau_p,$$

$$\theta_{31} = b_{1}\tau_p = \tau_p + R_{K}C_{\Sigma} - t_{31},$$

где суммарная (действующая) емкость ключевой схемы

$$C_{\Sigma} = C_{\mathrm{H}} + \bar{C}_{\mathrm{K}} + \beta_{0}\bar{C}_{\mathrm{K}}.$$

Из этих выражений видно, что если емкость нагрузки $C_{\rm H}=0$, то запаздывание $t_{\rm 3l} < \tau_p/\beta_0$. Если же $C_{\rm H} \rightarrow \infty$, то $t_{\rm 3l} \rightarrow \tau_p$. Из анализа функций $b_1(\gamma)$ и $\tau_{\rm 3l}(\gamma)$, выражаемых формулами (3.34а) и (3.34б), следует, что максимум отношения $t_{\rm 3l}/\Theta_{\rm 3l} = \tau_{\rm 3l}/b_1$ получается при $\gamma = 1 +$ $+\gamma_{\rm K}$. В этом экстремальном случае $t_{\rm 3l} = 0.5\tau_p$, $\Theta_{\rm 3l} =$ $= b_1\tau_p = 1.5\tau_p + 2R_{\rm K}\beta_0\overline{C}_{\rm K}$. Если при этом $R_{\rm K}\beta_0\overline{C}_{\rm K} = \tau_p$, то $(t_{\rm 3l}/\Theta_{\rm 3l})_{\rm max} = 1/7$. Но даже в предельном случае, когда $R_{\rm K}\beta_0\overline{C}_{\rm K} = 0$,

$$\left(\frac{t_{a_1}}{\Theta_{a_1}}\right)_{\max\max} = \frac{1}{3}.$$
 (3.35)

Таким образом, при всех обстоятельствах эквивалентная постоянная времени Θ_{31} по крайней мере в 3 раза боль-76 ше запаздывания. Но практически соотношение (3.35) не реально, и обычно $t_{31} \ll \Theta_{31}$ (типичное соотношение: $t_{31} \cong 0, 1\Theta_{31}$).

7. На рис. 3.4 сплошной линией изображена нормированная переходная характеристика h_{32}/β_0 , построенная по формуле (3.32) ($b_1=3$, $b_2=0.99$). Как указывалось, практически здесь не проявляется запаздывание ($\tau_{32}\ll 1$) и можно полагать $h_{32}\cong h_{32}\cong h$.



Рис. 3.4. Нормированная переходная характеристика транзисторного ключевого каскада с общим эмиттером.

На рис. 3.4 пунктирной линией изображена функция $h_{si} \sim h$ 1-го порядка приближения, построенная по формуле (3.34) ($b_1=3-1/3$, $\tau_{s1}=1/3$). Несмотря на сравнительно большую величину отношения $\tau_{31}/b_1=1/8$, погрешность аппроксимации $h_{s1} \sim h$ здесь не велика. Наибольшие в междецильном интервале погрешности (см. § 1, п. 12) имеют здесь такие значения: $\Delta h_{\text{намб}}=0,03$; $\delta_{t,\text{нам6}}=0,062$ (при h=0,1); $\delta_{\Phi}=0,022$. Эти значения, как это и должно быть (см. § 1, п. 14), несколько уступают граничным значениям погрешностей аппроксимации, находимым из графиков, изображенных на рис. 1.8 и 1.9

(для $\xi_1 = 2\lambda_1 = 2a_2/a_1^2 = 0,22$ и $\zeta_3 = a_3/c_3 = 0,155$) : $\delta_{tr} \cong 0,08$ и $\delta_{dr} \cong 0,027$.

Заметим, что даже в наихудшем предельном случае аппроксимации, соответствующем соотношению (3.35) (в этом случае $\xi_1 = 0,5$ и $\zeta_3 = 0,05$), граничные значения погрешностей аппроксимации лишь умеренно велики: $\delta_{t\,r} \simeq 0,35$ и $\delta_{\phi r} \simeq 0,1$. Однако такой случай работы схемы практически не реален.

Из изложенного вытекает, что во всех случаях работы ключевых схем достигается вполне надежная аппроксимация переходного процесса (в активном режиме работы) при простейшем приближении $h_{31} \sim h$ порядка m=1.

В. Переходные характеристики идеализированного дрейфового транзистора

8. Пренебрегая влиянием емкостей нагрузки и переходов, найдем приближенное выражение переходной характеристики коллекторного тока i_{κ} идеализированного дрейфового транзистора, отпираемого перенадом тока эмиттера $i_9 = I_9 \cdot 1(t)$ (см. приложение 3).

Согласно формуле (П.З.З.) изображение переходной характеристики

$$\widehat{h} = \widehat{h}(p) = \frac{\widehat{i}_{\mathbf{R}}}{I_{\mathbf{3}}} = \frac{\widehat{\alpha}(p)}{p}, \qquad (3.36)$$

где операционный коэффициент передачи тока эмиттера

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\bullet}^{*} = \widehat{\boldsymbol{\alpha}}(p) = \frac{\widehat{\boldsymbol{i}}_{\mathsf{K}}}{\widehat{\boldsymbol{i}}_{\mathsf{a}}} = \frac{\gamma_{p}}{\psi(\chi)} e^{\eta}; \qquad (3.36a)$$

здесь параметр $\eta = w/(2L_N) > 1;$ $\gamma_p \simeq 1 - коэффициент инжекции и$

$$\psi(\chi) = \operatorname{ch} \chi + \frac{\eta}{\chi} \operatorname{sh} \chi, \qquad (3.366)$$

$$\chi = \chi(p) = w \sqrt{\frac{1}{4L_N^2} + \frac{1}{L_p^2} + \frac{p}{D_p}}.$$
 (3.36b)

В дальнейшем потребуется выражение стационарного коэффициента передачи тока эмиттера

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}} = \widehat{\boldsymbol{\alpha}}(0) = \frac{\gamma_{\mathcal{P}}}{\psi(\mathcal{X}_{\mathbf{0}})} e^{\boldsymbol{\eta}}; \qquad (3.37)$$

здесь

$$\chi_{0} = \chi(0) = w \sqrt{\frac{1}{4L_{N}^{2}} + \frac{1}{L_{p}^{2}}} \cong \eta(1 + 2\delta_{1}^{2}) \cong \eta, \quad (3.37a)$$

где принято во внимание, что при $\eta > 1$ постоянная $L_N < w \ll L_p$, ввиду чего

$$\delta_1^2 = \frac{L_N^2}{L_p^2} \ll 1. \tag{3.376}$$

Подставляя в формулу (3.36б) значение Х₀ ≈ η, найдем

$$\Psi(\chi_0) \cong \operatorname{ch} \chi_0 + \operatorname{sh} \chi_0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\chi_0}. \tag{3.37B}$$

Учитывая теперь согласно (3.37а) более точное значение $\chi_0 \cong \eta (1 + 2\delta_1^2)$ (иначе мы получили бы, что коэффициент переноса неосновных НТ через базу $\varkappa = 1$), из формулы (3.37) найдем

$$\boldsymbol{\alpha}_{0} = \boldsymbol{\gamma}_{p} \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\gamma}_{p} e^{-2\eta \boldsymbol{\delta}_{1}^{2}} \cong \boldsymbol{\gamma}_{p} (1 - 2\eta \boldsymbol{\delta}_{1}^{2}) = \boldsymbol{\gamma}_{p} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\omega}L_{N}}{L_{p}^{2}}\right).$$
(3.37r)

В соответствии с приближенным методом анализа представим изображение нормированной относительно $h(\infty) = \alpha_0$ переходной характеристики в виде

$$\frac{\hat{h}}{\alpha_0} = \frac{1}{p\Phi(p)} = \frac{1}{p(1+a_1p+a_2p^2+...)},$$
(3.38)

где в силу нормировки $\Phi(0) = 1$ и согласно равенствам (3.36) и (3.36а)

$$\Phi(p) = \frac{\alpha_0}{\gamma_p} e^{-\eta} \psi(\chi),$$

а значения коэффициентов полинома $\Phi(p)$

$$a_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i \Phi}{dp^i} \right)_{p=0} (i=1, 2, \ldots).$$

79

Имея в виду ограничиться аппроксимацией 1-го порядка приближения, найдем выражения первых двух коэффициентов a_i :

$$a_{1} = \left(\frac{d\Phi}{dp}\right)_{p=0} = \frac{\alpha_{0}}{\gamma_{p}} e^{-\eta} \left[\frac{d\psi}{d\chi} \quad \frac{d\chi}{dp}\right]_{p=0}; \quad (3.38a)$$

$$a_{2} = \frac{\alpha_{0}}{2\gamma_{p}} e^{-\eta} \left[\frac{d^{2}\psi}{d\chi^{2}} \left(\frac{d\chi}{dp} \right)^{2} + \frac{d\psi}{d\chi} \frac{d^{2}\chi}{dp^{2}} \right]_{p=0}.$$
 (3.386)

Находя значения производных при p=0 и пренебрегая при этом малыми величинами порядка δ_1^4 , получим

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Psi}{d\chi} \end{pmatrix}_{p=0} = \operatorname{sh} \chi_{\mathfrak{o}} + \frac{\eta}{\chi_{\mathfrak{o}}} \operatorname{ch} \chi_{\mathfrak{o}} - \frac{\eta}{\chi_{\mathfrak{o}}^{2}} \operatorname{sh} \chi_{\mathfrak{o}};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{2}\Psi}{d\chi^{2}} \end{pmatrix}_{p=0} = \operatorname{ch} \chi_{\mathfrak{o}} + \frac{\eta}{\chi_{\mathfrak{o}}} \operatorname{sh} \chi_{\mathfrak{o}} - 2\frac{\eta}{\chi_{\mathfrak{o}}^{2}} \operatorname{ch} \chi_{\mathfrak{o}} + 2\frac{\eta}{\chi_{\mathfrak{o}}^{3}} \operatorname{sh} \chi_{\mathfrak{o}};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\chi}{dp} \end{pmatrix}_{p=0} \approx \frac{wL_{N}}{D_{p}\left(1 + 2\delta_{1}^{2}\right)} \approx \frac{1 - 2\delta_{1}^{2}}{\eta} \tau_{D},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{2}\chi}{dp^{2}} \end{pmatrix}_{p=0} \approx -\frac{1 - 2\delta_{1}^{2}}{\eta} \left(\frac{d\chi}{dp} \right)^{2}_{p=0},$$

где время диффузии тр выражается формулой (3.4).

Подставляя в выражения производных значения χ_0 с точностью до δ_1^2 и подставляя затем найденные выражения в формулы (3.38а) и (3.38б), получим

$$a_{1} \cong \frac{1 - 2\delta_{1}^{2}}{\eta} \tau_{D} \left[1 - \frac{1}{2\eta} \left(1 - e^{-2\chi_{0}} \right) - F_{1}(\delta_{1}^{2}) \right],$$
$$a_{2} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\delta_{1}^{2}}{\eta} \tau_{D} \right)^{2} \left[1 + \frac{3}{2\eta^{2}} - \frac{2}{\eta} - \frac{3 + 2\eta}{2\eta^{2}} e^{-2\chi_{0}} - F_{2}(\delta_{1}^{2}) \right],$$

где

$$F_{\mathbf{1}}(\delta_{1}^{2}) \cong \delta_{1}^{2} \left[\frac{2}{\eta} - 1 - \left(1 + \frac{2}{\eta} \right) e^{-2\chi_{\mathbf{0}}} \right];$$

$$F_{\mathbf{2}}(\delta_{1}^{2}) \cong \delta_{1}^{2} \left[\frac{2}{\eta} \left(\frac{7}{\eta} - \frac{9}{\eta^{2}} - 1 \right) + \left(\frac{5}{\eta} - \frac{9}{\eta^{2}} - 1 \right) e^{-2\chi_{\mathbf{0}}} \right].$$

Ограничиваясь рассмотрением дрейфовых транзисторов, для которых $\eta > 1$ (типичное значение $\eta \cong 2 \div 4$), можно в написанных выражениях пренебречь малыми величинами порядка δ_1^2 . Тогда

$$a_{1} \cong \frac{\tau_{D}}{\eta} \left[1 - \frac{1}{2\eta} (1 - e^{-2\eta}) \right];$$
 (3.38_B)

$$a_{2} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{D}}{\eta}\right)^{2} \left[1 + \frac{3}{2\eta^{2}} - \frac{2}{\eta} - \frac{3+2\eta}{2\eta^{2}} e^{-2\eta}\right] \cdot \quad (3.38r)$$

Из анализа последних выражений можно убедиться в том, что при любом $\eta > 0$ параметр $\lambda_1 = a_2/a_1^2$ удовлетворяет условию $\lambda_1 < 0.5$ существования аппроксимирующей функции 1-го порядка приближения. В частности, если $\eta \ll 1$, то в этом можно убедиться из рассмотрения разности $a_1^2 - 2a_2$, при составлении которой следует воспользоваться разложением $e^{-\epsilon} = 1 - \epsilon + 0.5\epsilon^2 - \ldots$; при значении же $\eta > 1,25$ при оценке указанной разности достаточно принять $e^{-2\eta} \simeq 0$.

Аппроксимирующая функция 1-го порядка приближения

$$\frac{h_{3_1}}{\alpha_0} = \left(1 - e^{-\frac{t - t_{3_1}}{b_1}} \right) \cdot 1 \ (t - t_{3_1});$$
 (3.39)

здесь согласно формулам (2.8) и (2.9) постоянная времени

$$b_{1} = \sqrt{\overline{a_{1}^{2} - 2a_{2}}} = \tau_{D} F_{b}(\eta), \qquad (3.39a)$$

где

$$F_{b}(\eta) = \frac{1}{\eta^{2}} \sqrt{\eta - \frac{5}{4} + (2\eta + 1)e^{-2\eta} + \frac{1}{4}e^{-4\eta}}, \quad (3.395)$$

а запаздывание

$$t_{31} = a_1 - b_1 = \tau_D F_3(\eta),$$
 (3.39b)

где

$$F_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{1}{2\eta} \left(1 - e^{-2\eta} \right) \right] - F_{b}(\boldsymbol{\eta}). \quad (3.39\mathbf{r})$$

Такой же результат другим путем (на основе метода моментов) получен в докторской диссертации С. Я. Шаца. 6—2247 81 В табл. 3.1 приводятся численные значения функций (3.39б) и (3.39г), определяющих относительную величину постоянной времени b_1 и запаздывания t_{a1} (в долях от времени диффузии τ_D), а также относительные значения величин t_{a1}/b_1 и $t_{a1}/(2,2b_1)$.

Таблица 3.1

$\eta = \omega/(2L_N)$	0,5	1	2	3	4	5
$F_{b}(\eta) = b_{1}/\tau_{D}$ $F_{a}(\eta) = t_{a}/\tau_{D}$	0,5600	0,4006	0,2294	0,1477	0,1037	0,0775
$\frac{t_{a_1}/b_1}{t_{a_1}/(2,2b_1)}$	0,314 0,143	0,417 0,190	0,645 0,293	0,883 0,401	1,109 0, 50 4	1,332 0,600

Из приведенных в табл. 3.1 данных следует, что приближенное решение (3.39) качественно удовлетворительно отражает свойства переходной характеристики дрейфового транзистора. Как видно, с изменением параметра η от 0,5 до 5 относительная величина постоянной времени b_1/τ_D уменьшается более чем в 7 раз, в то время



Рис. 3.5. Нормированные переходные характеристики коллекторного тока *i*к идеализированного дрейфового транзистора, отпираемого перепадом тока эмиттера.

как относительная величина запаздывания t_{31}/τ_D уменьшается при этом только в 1,7 раза. Из табл. 3.1 также видно, что если при $\eta = 0,5$ длительность запаздывания t_{31} составляет около 14% от активной длительности нарастания $t_{\Phi} = 2,2b_1$, то при $\eta = 5$ длительность запаздывания составляет около 60% от активной длительности нарастания.

Для оценки качества приближения $h_{31} \sim h$ на рис. 3.5 изображены нормированные переходные характеристики h_{31}/α_0 и h/α_0 для двух значений параметра $\eta = 1$ и 3. Показанные сплошной линией характеристики h/α_0 построены из точного решения (П.3.4), где нормировка по времени осуществлена относительно постоянной Θ , выражаемой формулой (П.3.5). В соответствии с этим приведенные в табл. 3.1 значения b_1/τ_D и t_{31}/τ_D пересчитаны в значения

$$b_{10} = \frac{b_1}{\Theta} = \frac{b_1}{\tau_D} \cdot \frac{\pi^2}{8\alpha_0} \cong \frac{F_b(\eta)}{0.8} = \begin{array}{c} 0.5 & \text{при } \eta = 1, \\ 0.185 & \text{при } \eta = 3; \\ \tau_{31} = \frac{t_{31}}{\Theta} = \frac{t_{31}}{\tau_D} \cdot \frac{\pi^2}{8\alpha_0} \cong \frac{F_3(\eta)}{0.8} = \begin{array}{c} 0.209 & \text{при } \eta = 1, \\ 0.163 & \text{при } \eta = 3. \end{array}$$

Из приведенных на рис. 3.5 графиков видно, что относительное значение наибольшей «временной» погрешности $\delta_{t, \text{ наиб}} < 0,1$. Такой результат можно признать удовлетворительным для целей технических расчетов.

9. Пренебрегая влиянием емкостей нагрузки и переходов, найдем приближенное выражение переходной характеристики коллекторного тока i_{κ} идеализированного дрейфового транзистора, отпираемого перепадом тока базы $i_5 = I_6 \cdot 1(t)$, где ток $I_6 = \text{const}$ не вводит транзистор в насыщенние.

Операционное изображение рассматриваемой переходной характеристики

$$\widehat{h} = \widehat{h}(p) = \frac{\widehat{i}_{\mathbf{K}}}{I_{\mathbf{6}}} = \frac{\widehat{\beta}(p)}{p} \nleftrightarrow \frac{i_{\mathbf{K}}(t)}{I_{\mathbf{6}}} = h(t), \qquad (3.40)$$

где операционный коэффициент усиления тока базы

$$\widehat{\beta} = \widehat{\beta}(p) = \frac{\widehat{\alpha}(p)}{1 - \widehat{\alpha}(p)}, \qquad (3.40a)$$

83

6*

причем согласно равенствам (3.36) и (3.38)

$$\hat{a} = \hat{a}(p) = \frac{a_0}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}$$
 (3.406)

Здесь (при $\eta > 1$) коэффициенты a_1 и a_2 выражаются формулами (3.38в) и (3.38г).

Можно показать [28], что формула (3.38в) выражает время пролета т_а дрейфового транзистора ($\tau_{\alpha} < \tau_{D}$). Таким образом,

$$a_1 \cong \tau_{\alpha}, \ a_2 \cong 0.5 \tau_{\alpha}^2 \cdot F_{\beta}, \qquad (3.41)$$

где из сопоставления выражений (3.38в) и (3.38г) получаем



Функция (3.41а) меняется в узких пределах (рис. 3.6) — в интересующей нас области от ~ 0.5 до 0.8.

Подставляя выражение (3.40б) в равенство (3.40а), получим

$$\widehat{\beta}(p) = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)\left(1+\frac{\alpha_1}{1-\alpha_0}p+\frac{\alpha_2}{1-\alpha_0}p^2+\dots\right)} \cdot$$

Используя равенства

$$\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} = \beta_0, \quad \frac{1}{1-\alpha_0} = \frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

запишем

$$\widehat{\beta}(p) = \frac{\beta_0}{1 + \frac{\beta_0}{\alpha_0} a_1 p + \frac{\beta_0}{\alpha_0} a_2 p^2 + \dots}.$$

Принимая теперь во внимание соотношения ((3.40), представим изображение нормированной (относительно $h(\infty) = \beta_0$) переходной характеристики в виде

$$\frac{\hat{h}}{\beta_0} = \frac{1}{p(1 + A_1 p + A_2 p^2 + \dots)},$$
(3.42)

где

$$A_1 = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \tau_{\alpha}; \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{\beta_0}{\alpha_0} \tau_{\alpha}^2 F_{\beta}. \quad (3.42a)$$

Из равенств (3.42а) следует, что в данном случае в сильной степени выполняется условие (2.11) существования аппроксимирующей функции $h_{a1} \sim h$ 1-го порядка приближения. Действительно, так как $\beta_0 \gg \alpha_0$, а величина $F_a < 1$, то

$$\lambda_1 = \frac{A_2}{A_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\beta_0} F_{\beta} < \frac{1}{2\beta_0} \ll \lambda_{1,\kappa p} = \frac{1}{2}.$$

Это обстоятельство свидетельствует о весьма хорошем приближении $h_{31} \sim h$ — лучшем, чем это получается применительно к бездрейфовому транзистору, позволяющему получить значительно меньшую величину β_0/α_0 .

Согласно формулам (2.8) и (2.9) постоянная времени аппроксимирующей функции

$$b_{1} = \sqrt{A_{1}^{2} - 2A_{2}} = \frac{\beta_{0}}{\alpha_{0}} \tau_{\alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha_{0}}{\beta_{0}} F_{\beta}} \quad (3.43)$$

или (так как а₀ ≪ β₀)

$$b_{1} \cong \frac{\beta_{0}}{\alpha_{0}} \tau_{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha_{0}}{2\beta_{0}} F_{\beta} \right) \cong \beta_{0} \tau_{\alpha} \cong \tau_{p}, \qquad (3.43a)$$

а запаздывание

$$t_{31} = A_1 - b_1 \cong 0.5 F_\beta \tau_\alpha < \tau_\alpha \ll \tau_p. \tag{3.44}$$

85

Таким образом, приближенное выражение нормированной переходной характеристики

$$\frac{h}{\beta_0} = \left(1 - e^{-\frac{t - t_{a_1}}{\tau_p}}\right) \cdot 1 (t - t_{a_1}).$$
(3.45)

Вследствие относительно весьма малой величины запаздывания, получающегося в данном случае, им практически можно в большинстве случаев пренебречь и принять

$$\frac{h}{\beta_0} \simeq 1 - e^{-t/\tau_p}. \tag{3.45a}$$

Из сравнения полученных эппроксимированных переходных характеристик дрейфового транзистора с такими же характеристиками бездрейфового транзистора (см. А, п. 3) вытекает, что переходная характеристика дрейфового транзистора, отпираемого перепадом тока базы, определяется так же, как и в бездрейфовом транзисторе.

Однако, хотя в обоих случаях постоянная времени переходного процесса $\tau_p = \beta_0 \tau_a$, различие заключается в том, что в бездрейфовом транзисторе время пролета τ_a равно времени диффузии τ_D , а в дрейфовом транзисторе $\tau_a < \tau_D$ [здесь $\tau_a \simeq a_1$ выражается формулой (3.38в)].

Г. Переходная характеристика многокаскадного реостатного усилителя

10. Рассмотрим переходную характеристику усилителя (в области фронта), состоящего из *n* идентичных каскадов, каждый из которых характеризуется постоянной времени Θ . Операционное уравнение нормированной $[h(\infty) = 1, \tau = t/\Theta]$ переходной характеристи такого усилителя имеет вид

$$\hat{h} = \frac{1}{p(1+p\Theta)^n} = \frac{1}{p(1+a_1q+a_2q^2+\dots a_nq^n)}, \quad (3.46)$$

где $q = p\theta$ и $a_i = \frac{1}{i!} n(n-1) \dots (n-i+1) (i=1, 2, \dots n).$ (3.47) Переходная характеристика выражается довольно громоздкой функцией [1, 3, 14]

$$h = h(\tau) = 1 - e^{-\tau} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau^{k}}{k!} \left(\tau = \frac{t}{\Theta}\right). \quad (3.48)$$

Параметр

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{1,kp}} = 2\lambda_1 = 2 \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{n-1}{n} < 1 \qquad (3.49)$$

удовлетворяет условию существования приближения $h_{a1} \sim h$ порядка m = 1, и согласно формуле (2.10) нор-



Рис. 3.7. Нормированные переходные характеристики *n*-каскадных реостатных усилителей (в области фронта); Θ — постоянная времени каскада.

мированная переходная характеристика 1-го приближения (см. § 2, п. 11) имеет вид

$$h_{31} = (1 - e^{-(\tau - \tau_{31})/b_1}) \cdot 1(\tau - \tau_{31}) \left(\tau = \frac{t}{\Theta}\right), \quad (3.50)$$

где согласно формулам (2.8) и (2.9) нормированные (относительно Θ) выражения постоянной времени аппроксимирующей функции <u>и запаздывания</u> имеют вид

$$b_1 = \theta_{3\kappa\nu} / \theta = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} = \sqrt{n}; \qquad (3.51)$$

$$\tau_{31} = t_{31}/\Theta = a_1 - b_1 = n - \sqrt{n}.$$
 (3.52)

На рис. 3.7 сплошными линиями изображены графики переходных характеристик, построенные по формуле (3.48), а пунктирными линиями — характеристики h_{31} 1-го приближения, построенные по формуле (3.50). Как видно, приближение $h_{31} \sim h$ является довольно грубым.

Таблица 3.2

	J	3	4	5	6	9	12				
Параметры	<i>b</i> 1	ф. (3.51)	1,73	2,00	2,236	2,449	3,00	3,464			
	τ_{31}	ф. (3.52)	1,27	2,00	2,764	3,551	6,00	8,536			
	С з	ф. (1.34)	1,74	5,33	12,1	22,9	90,0	230			
	C4	ф. (1.37)	0,70	3,32	10,4	25,0	162	581			
	C 5	ф. (1.37)	0,22	1,60	6,77	20,8	227	1147			
	$\zeta_3 = a_3/c_3$		0,58	0,75	0,82	0,87	0,93	0,96			
	$\zeta_4 = a_4/c_4$		0	0,30	0,48	0,60	0,78	0,85			
	$\zeta_5 = a_5/c_5$		0	0	0,148	0,288	0,555	0,692			
	ξı	(ф. 3.49)	0,67	0,75	0,80	0,832	0,888	0,916			
Реальные погрешности	$ h-h_{31} _{\text{Hand}}$		0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10			
	δ _Φ	ф. (1.30)	0,09	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13			
	δ _{t, наиб}	ф. (1.31)	0,31	0,27	0,25	0,23	0,17	0,14			
Расчетные погрешности	δ _{ΦΓ}	рис. 1.9	0,08	0,13	0,15	0,17	0,20	0,22			
	δt-	лис 18	0.30	0.30	0.32	0.35	0.39	0.44			
	δt, Ha Hδ	ф. (1.36)	0,30	0,24	0,217	0,203	0,168	0,172			
Погрешность оценки величины $\delta_{t, \mathbf{H} \mathbf{a} \mathbf{u} \mathbf{G}}, \%$		3,3	11	13	12	1,2	23				

Параметры и погрешности приближения (m = 1) переходных характеристик *n*-каскадного усилителя

что обусловлено слабым выполнением неравенства (3.49) (см. § 1, п. 11). Тем не менее функция h_{31} позволяет удовлетворительно (с погрешностью менее 13%) оце-88 нить активную длительность фронта сигнала h. Из-за большой величины запаздывания τ_{31} наибольшая в междецильном интервале «амплитудная» погрешность аппроксимации получается при любом n на нижней границе интервала (на уровне h=0,1), где $h_{31}=0$ (рис. 3.7). Поэтому при любом n погрешность $|h--h_{31}|_{\text{наяб}}=0,1$.

Для иллюстрации способа и точности оценки погрешности аппроксимации $h_{31} \sim h$ в табл. 3.2 приводятся реальные и расчетные значения различных погрешностей аппроксимации (см. § 1, п. 12), граничные значения погрешностей, а также параметры, определяющие эти погрешности, причем в табл. 3.2 указаны номера формул (или рисунков), используемых для определения величин параметров или погрешностей. В последней строке табл. 3.2 указана погрешность оценки наибольшей «временной» погрешности аппроксимации. Только в одном случае погрешность такой оценки достигает 23%: во всех остальных случаях она значительно меньше (1-13%). Как и следовало ожидать (см. § 1, п. 14), при n=3 граничные значения погрешности определения активной длительности фронта и «временной» погрешности равны реальным значениям этих погрешностей (δфг ≈ δф и δ_{tr} = δ_{t,наиб}); небольшое отклонение в равенстве этих величин объясняется погрешностью расчета. При *n*≥4 граничные значения погрешностей уступают реальным погрешностям и тем сильнее, чем выше *n*. Это обстоятельство, а также уменьшение погрешности δ_{t. наиб} с увеличением *n* (т. е. с повышением порядка дифференциального уравнения) соответствует соображениям. изложенным в § 1, п. 14.

Из табл. 3.2 видно, что доминирующее значение при любом n имеет наибольшая «временная» погрешность аппроксимации, что иллюстрирует сделанный в § 1, п. 12, вывод о том, что именно эта погрешность должна быть определяющей при выборе порядка приближения.

11. Если постоянные времени каскадов усилителя различны ($\Theta_i \neq \text{const}$), то переходная характеристика усилителя выражается еще более громоздкой функцией:

$$h = h(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-t/\Theta_i} (A_i \neq \text{const}),$$

и изображение переходной характеристики имеет вид

$$\widehat{h} = \left[p \prod_{i=1}^{n} (1+p\Theta_i) \right]^{-1} = \frac{1}{p \left(1+a_1 p+\ldots+a_n p^n \right)},$$

где первые два коэффициента

$$a_1 = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n;$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_i \theta_j \ (i \neq j).$$

Аппроксимирующая функция 1-го приближения

$$h_{31} = h_{31}(t) = [1 - e^{-(t - t_{31})/b_1}] \cdot 1(t - t_{31}), \quad (3.53)$$

гле

$$b_{1} = \sqrt{a_{1}^{2} - 2a_{2}} = \sqrt{\theta_{1}^{2} + \theta_{2}^{2} + \dots + \theta_{n}^{2}}, \quad (3.54)$$

$$t_{\mathbf{s}_{1}} = a_{1} - b_{1} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{i} - b_{1} > 0.$$
 (3.55)

Заметим попутно, что формула (3.54) выражает из-вестный *«закон квадратур»* [5, 6, 14]. Можно убедиться в том, что при Θ_i≠const параметр

$$\mathbf{t}_{\mathbf{i}} = \frac{\lambda_{\mathbf{i}}}{\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{x}\mathbf{p}}} = 2\lambda_{\mathbf{i}} = 2\frac{\mathbf{f}a_{\mathbf{i}}}{a_{1}^{2}} < \frac{n-1}{n}, \qquad (3.56)$$

т. е. он имеет меньшую величину, чем при Θ_i = const. Следовательно, качество приближения $h_{31} \sim h$ здесь вы-ше, чем в рассмотренном в п. 10 случае. 12. Если требуется бо́льшая точность аппроксимации, в частности если необходимо получить хорошее прибли-жение не только сигналов $h_{3m} \sim h$, но и их производных по времени (см. п. 24), то следует обратиться к прибли-жению порядка m=2, которое при любом числе каска-дов усилителя дает высокое качество приближения. Методика определения параметров аппроксимирую-щей функции h_{32} изложена в § 2, пп. 4—6. Можно убе-диться в том, что в данном случае выполняется условие (2.12) существования приближения 2-го порядка. При *n* идентичных каскадах усилителя ($\Theta_i = \Theta = \text{const}$) усло-

вие (2.12) в соответствии с формулой (3.47) сводится к неравенству

$$\lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} < \lambda_{2,KP}, \qquad (3.57)$$

где согласно формуле (2.14)

$$\lambda_{2, \text{xp}} = \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n^2} \right).$$
(3.58)

Относительная величина запаздывания $\tau_{32} = t_{32}/\Theta$ находится из кубического уравнения (2.15). В данном случае выполняется неравенство $\varepsilon_1 = \lambda_2/\lambda_1^2 > 0.5$, причем $\lambda_1 < 1$. Поэтому корень уравнения (2.15) выражается формулой (2.30), которая приводится к виду

$$\tau_{a_2} = \frac{n-1}{3} + \frac{4n(n-2)}{3(n-1)} - n \cong \frac{n-1}{2}, \qquad (3.59)$$

где последнее приближение соответствует формуле (2.29), причем при $\lambda_1 < 0.5$ и $\epsilon_1 > 0.55$ погрешность определения τ_{32} менее 10%.

Коэффициенты b_1 и b_2 изображения \hat{h}_{32} легко находятся из простых формул (2.19), после чего из формул (2.20)—(2.22) определяется функция $h_{32}(\tau)$ (в указанных формулах следует заменить t на $\tau = t/\Theta$ и t_{32} на $\tau_{32} = t_{32}/\Theta$).

Для иллюстрации на рис. 3.7 показаны точки функции $h_{32}(\tau)$, аппроксимирующей переходную характеристику $h(\tau)$ 9-каскадного усилителя, построенной по формуле (2.21) при следующих значениях параметров:

$$\tau_{32} = 4,17; \quad b_1 = a_1 - \tau_{32} = 9 - 4,17 = 4,83;$$

$$b_2 = a_2 - a_1 \tau_{32} + 0.5 \tau_{32}^2 = 36 - 9.4, 17 + 8, 69 = 7, 16.$$

Здесь использованы значения a_i , выражаемые формулой (3.47).

Непосредственное сопоставление функций (2.21) и (3.48) определяет погрешности аппроксимации, которые получаются существенно меньшими, чем при m=1:

$$\Delta h_{\text{hreh}} = |h - h_{\text{B2}}|_{\text{hreh}} \approx 0.03 \text{ (BMECTO } 0.1\text{)};$$

$$\delta_{\Phi} \approx 0.005 \text{ (BMECTO } 0.13\text{)};$$

$$\delta_{t, \text{ hab}} \approx 0.03 \text{ (BMECTO } 0.14\text{)}.$$

91

Найдем параметры, определяющие граничное значение δ_{tr} :

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{36}{9^2} = 0,444; \ \lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3} = \frac{84}{9^3} = 0,1152.$$

Из формулы (3.58) находим $\lambda_{2, \kappa p} = 0,1234$, откуда

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_{2, \text{Kp}}} = \frac{0.1152}{0.1234} = 0.933.$$

Для найденных значений параметров из рис. 1.10 находим граничное значение «временной» погрешности аппроксимации

$$\delta_{tr} = \Phi_{t_2}(\lambda_1, \xi_2) \cong 0,21,$$

которое существенно больше реальной погрешности $\delta_{t,\text{наиб}} = 0,03$. Такое расхождение объясняется тем (см. § 4, пп. 6 и 10), что в данном случае параметр $\zeta_4 = a_4/c_4$ близок к 1, ввиду чего «целочисленное» приближение порядка m=2 определяет «дробно-численное» приближение порядка $M = m + \zeta_4$, близкое к 3. Как будет показано в § 4, п. 6, погрешность аппроксимации, рассматриваемая как функция параметра ζ_4 (рис. 4.3), проходит через минимум в окрестности $\zeta_4 = 1$.

Для определения в рассматриваемом здесь случае величины ζ_4 вычислим значение коэффициента c_4 (а заодно и c_5). Подставляя в равенства (1.40) найденные выше значения параметров τ_{32} , b_1 и b_2 , получим

$$c_{4} = 4,17^{2} \left(\frac{7,16}{2!} + \frac{4,83 \cdot 4,17}{3!} + \frac{4,17^{2}}{4!} \right) = 134;$$

$$c_{5} = 4,17^{3} \left(\frac{7,16}{3!} + \frac{4,83 \cdot 4,17}{4!} + \frac{4,17^{2}}{5!} \right) = 158.$$

Отсюда

$$\zeta_4 = \frac{a_4}{c_4} = \frac{126}{134} = 0.94; \ \zeta_5 = \frac{a_5}{c_5} = \frac{126}{158} = 0.8.$$

Подставляя эти значения в оценочную формулу (1.39), найдем расчетное значение «временной» погрешности аппроксимации:

$$\delta_{t, \text{ Hau6}} \cong \delta_{tr} \sqrt{0.95 \cdot 0.06^2 + 0.04 \cdot 0.2^2 + 0.01} = 0.026$$

что отличается от реального значения $\delta_{t,\text{наиб}} \approx 0,03$ менее чем на 14%.

Д. Аппроксимация сигналов, определяемых дифференциальным уравнением 3-го порядка

13. Приближение $h_{32} \sim h$, где изображение

$$\widehat{h} = \frac{1}{pA_{\mathbf{s}}(p)} = \frac{1}{p(1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3)}, \quad (3.60)$$

представляет некоторый частный интерес, поскольку такие сигналы довольно часто встречаются на практике. и, кроме того, представляет также и особый интерес, так как получающиеся при таком приближении погрешности аппроксимации определяют верхние границы возможных погрешностей (см. § 4, п. 7). Поэтому сопоставление в еличин граничных погрешностей. находимых из представленных на рис. 1.8—1.10 графиков, с характером этих погрешностей, наглядно выявляемым из приводимых ниже иллюстраций, полезно для выработки точки зрения о практической приемлемости той или иной величины погрешности приближения. Эти иллюстрации интересны также в отношении сопоставления погрешностей разного вида («временной», «амплитудной» и др.) на конкретных примерах, в которых при заданных значениях параметров λ_1 и λ_2 эти погрешности предельно велики

14. На рис. 3.8 пунктирными линиями показаны графики сигналов h, изображения которых вида (3.60) характеризуются одной и той же величиной параметра ξ_1 , но различными значениями параметра ζ_3 . Все такие сигналы аппроксимируются одной функцией h_{31} (m=1), показанной на рис. 3.8 сплошной линией.

При $\xi_3 = 5,17$ в сигнале ощутительно проявляется колебательная составляющая, и хотя $\xi_1 \ll 1$, но вследствие $\xi_3 \gg 1$ приближение $h_{31} \sim h$ нельзя признать удовлетворительным: наибольшая «амплитудная» погрешность $\Delta h_{\text{нам6}} = 0,16$; погрешность определения междециального времени $\delta_{\Phi} \cong 0,85$; наибольшая «временная» погрешность $\delta_{t,\text{нам6}} = 0,7$ (она получается на верхней границе междециального интервала, т. е. на уровне 0,9 h_{max}). Но уже при $\xi_3 \ll 3$ все погрешности (при рассматриваемом низком значении ξ_1) становятся умеренными. Так, при $\xi_3 = 2,59$ (хотя здесь еще заметно проявляется колебательная составляющая) погрешности $\Delta h_{\text{нам6}} \cong 0,08$, $\delta_{\Phi} =$ =0,02 и $\delta_{t,\text{нам6}} = 0,19$ (это значение, получаемое на нижней границе междециального интервала, т. е. на уровне 0,1 $h_{\rm max}$, близко к значению погрешности на верхней границе интервала). При дальнейшем уменьшении ζ_3 ко. лебательная составляющая сигнала становится мало. ощутимой, и при $\zeta_3 < 2$ сигнал изменяется монотонно. В приводимом на рис. 3.8 графике, соответствующем



Рис. 3.8. Влияние параметра $\zeta_3 = a_3/c_3$ ($c_3 = 0,0193$) на качество приближения (m=1).

 $\zeta_3 = 1,04$, погрешности аппроксимации близки к минимально возможным (при данном значении ξ_1): $\Delta h_{\text{нам6}} = 0,03$; $\delta_{\phi} \cong 0,02$, $\delta_{t,\text{нам6}} = 0,05$ (это значение получается в нутри междециального интервала). При еще большем уменьшении ζ_3 погрешности возрастают (зависимости погрешностей от ζ_3 имеют вид U-образных кривых, показанных на рис. 1.8 и 1.9). При $\zeta_3 = 0$ погрешности $\Delta h_{\text{нам6}} \cong 0,07$, $\delta_{\phi} \cong 0,05$ и $\delta_{t,\text{нам6}} = 0,18$ (это значение получается лучается на уровне 0,1 h_{max}).

Для приближений 1-го порядка характерно отмеченное выше положение: при $\zeta_3 > 1$ наибольшая «временная» погрешность аппроксимации получается на верхней границе междециального интервала, в окрестности $\zeta_3 = 1$ — внутри указанного интервала, а при $\zeta_3 < 1$ — на нижней границе интервала. Величины погрешностей других видов либо уступают, либо близки к погрешности $\delta_{t, наи 6}$, которая достаточно надежно (с погрешностью $\sim 10\%$) определяется из графиков, представленных на рис. 1.8.



Рис. 3.9. Аппроксимация почти монотонно изменяющегося сигнала h(t) функциями 1-го и 2-го порядка приближения.

15. Из приведенного в п. 14 примера не следует заключать, что при монотонном изменении сигнала h(t)погрешности аппроксимации не могут быть значительными или даже большими. Для иллюстрации этого положения на рис. 3.9 сплошной линией изображен график практически монотонно изменяющегося сигнала h (h_{max} =1,027, h_{min} =0,99). Здесь приближение $h_{31} \sim h$ чельзя признать удовлетворительным: $\delta_{t, наиб}$ =0,6 (на уровне 0,1 h_{max}), δ_{ϕ} =0,37 и $\Delta h_{\rm наиб}$ =0,16. Это обусловлено слабым выполнением неравенства $\xi_1 < 1$ и существенной величиной разности $|1-\xi_3|$. К такому же выводу можно прийти из рассмотрения графиков, приведенных на рис. 1.8 и 1.9. Вполне удовлетворительный результат в данном случае получается при приближении 2-го порядка. Здесь погрешности аппроксимации весьма малы: $\delta_{t,\text{нам6}} = 0,07$ (на уровне 0,1 h_{max}), $\delta_{\phi} = 0,023$ и $\Delta h_{\text{нам6}} = 0,022$.

16. Естественно, если колебательная составляющая сигнала проявляется достаточно сильно, то приближение 1-го порядка не может быть удовлетворительным. Но для такого заключения не требуется предварительное выяснение характера сигнала h(t) (что не просто сделать по данным изображения \hat{h}). Во всех случаях правильную



лов (m=2).

ориентировку в выборе нужного порядка приближения дают приводимые на рис. 1.8—1.10 графики. Кроме того, уже при заметной значимости колебательной составляющей сигнала не выполняется условие (2.11) существования приближения 1-го порядка. Для иллюстрации этого

положения на рис. 3.10 приводятся графики двух сигнапов в которых заметно проявляется колебательная составляющая. Уже при сравнительно небольшой величине выброса $h_{\text{выбр}} = 0,15$, получаемом на верхнем графике, условие (2.11) не выполняется: $\lambda_1 = 2/3 > \lambda_{1,\text{кр}} = 0,5$. Тем более не выполняется условие (2.11) во втором сигнале $(\lambda_1 = 5/4)$. Но в обоих случаях выполняется условие (2.12) существования приближения 2-го порядка ($\xi_2 = \lambda_2/\lambda_{2,kp} < < 1$, где $\lambda_{2,kp} = \lambda_1 - \frac{1}{3}$, а $\lambda_2 = a_3/a_1^3$ принимает значения $\frac{4}{27}$ на верхнем прафике и $\frac{1}{2}$ — на нижнем). В данном случае ввиду достаточно сильного выполнения неравенства $\xi_2 < 1$ погрешности аппроксимации не велики при любом значении параметра λ_1 (см. рис. 1.10). Действительно, при аппроксимации сигнала, представленного на верхнем графике, где $\xi_2 = 0,444$, погрешность $\delta_{t.\text{нам6}} = 0.08$. а при аппроксимации другого сигнала, для которого $\xi_2 =$ =0,545, попрешность $\delta_{t, \text{нам6}} = 0, 12$. Другие виды погрешностей здесь уступают «временной» погрешности (или близки к ней).

17. На рис. 3.11 иллюстрируется приближение $h_{32} \sim h$ двух существенно колебательных сигналов. Здесь условие (2.11) не выполняется, а условие (2.12) выполняется. Параметр ξ_2 в обоих случаях принимает близкие значения (0,78 и 0,75), но значения параметра λ_1 различны (1,74 и 2,75), что при значительной величине $\xi_2 > 0,5$ имеет существенное значение (см. рис. 1.10). Поэтому величины погрешности $\delta_{t, \text{нам}}$ при рассматриваемых приближениях получаются различными: 0,19 на рис. 3.11,*a* и 0,11 — на рис. 3.11,*b* (в обоих случаях эти погрешности получаются на уровне 0,1 h_{max}). Другие виды погрешностей здесь близки к «временной» погрешности. Качество приближения можно считать удовлетворительным (рис. 3.11,*a*) и хорошим (рис. 3.11,*b*).

18. На рис. 3.12 иллюстрируется приближение $h_{32} \sim h$ слабозатухающего колебательного сигнала h ($h_{max} = 1,85$, $h_{min} = 0,21$). Хотя параметр $\xi_2 = 0,97$ здесь близок к предельному значению (при $\xi_2 = 1$ приближение 2-го порядка не существует, так как нарушается условие диссипативности приближенного решения), тем не менее из-за большой величины параметра $\lambda_1 = 4,21 \gg 1$ погрешности аппроксимации не велики: $\delta_{t, нан6} = 0,14$ (на уровне 0,1 h_{max}); примерно такую же величину имеют «амплитудная» погрешность и погрешность определения вели-7-2247 чниы «выброса». Заметим, попутно (см. рис. 1.10), что с уменьшением λ_1 погрешность аппроксимации при $\xi_2 \cong 1$ возрастает, стремясь к очень большой величине (при $\xi_2 = 1 - \kappa \infty$) при $\lambda_1 \longrightarrow 0,5$.

19. С целью упрощения анализа переходных процессов в схемах, описываемых дифференциальным уравне-



Рис. 3.11. Аппроксимация существенно колебательных сигналов (m=2).

нием 3-го (или более высокого) порядка, иногда объединяют некоторые элементы схемы, разделенные между собой «малосущественным импедансом». Так, например, в представленной на рис. 3.13 схеме, встречающейся при анализе процессов в импульсных трансформаторах, объединяют паразитные емкости C_1 и C_2 в одну емкость $C = C_1 + C_2$, шунтирующую нагрузочное сопро-98

гивление R_2 . Таким путем задача сводится к нахождению решения дифференциального уравнения 2-го порядка. В действительности же переходная характеристика схемы определяется операционным уравнением

$$\widehat{h} = \frac{1}{p \left(\frac{1}{9} + a_1 p_1^n + a_2 p^2 + |a_3 p^3| \right)}, \qquad (3.61)$$

где

$$a_{1} = \theta + \frac{R_{1}R_{2}}{R_{1} + R_{2}} (C_{1} + C_{2}); \ \theta = \frac{L}{R_{1} + R_{2}};$$
$$a_{2} = \theta (R_{1}C_{1} + R_{2}C_{2}); \ a_{3} = \theta R_{1}C_{1}R_{2}C_{2}.$$

Упрощение уравнения (3.61) может быть достигнуто не путем объединения емкостей (что основано на качественных представлениях и не всегда допустимо), а применением приближения $h_{32} \sim h 2$ -го порядка. Тем самым



Рис. 3.12. Аппроксимация слабозатухающего колебательного сигнала (m=2).

задача также сводится к нахождению решения дифференциального уравнения 2-го порядка, но полученное таким путем решение h_{32} будет точнее решения h_{\sim} (правда, для этого потребуется найти запаздывание t_{32}).

На рис. 3.13 сплошной линией показан график переходной характеристики *h*, выражающей точное решение уравнения (3.61), а пунктирными линиями показаны упомянутые выше функции h_{32} и h_{1} для случая, когда при $R_1 = R_2$ выполняются равенства $R_1C_1 = R_2C_2 = \Theta$. Тогда $a_1 = 2\Theta$, $a_2 = 2\Theta^2$ и $a_3 = \Theta^3$, откуда

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{1}{2} = \lambda_1, _{\mathrm{KP}}; \ \lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3} = \frac{1}{8} < \lambda_{2, \mathrm{KP}} = \lambda_1 - \frac{1}{3}.$$

Следовательно, условие (2.11) здесь не выполняется, но выполняется условие (2.12) существования приближения $h_{32} \sim h$, причем значения $\lambda_1 = 0,5$ и $\xi_2 = \lambda_2/\lambda_{2,\text{кр}} = 0,75$ определяют из представленных на рис. 1.10 графиков умеренную величину погрешности $\delta_{t, \text{ нав6}} = 0,168$.



Рис. 3.13. Сравнение упрощенных способов анализа переходного процесса в схеме.

Для определения запаздывания t_{32} оцениваем в соответствии с методикой, изложенной в § 2, п. 6, величину $\varepsilon_1 = \lambda_2/\lambda_1^2 = 0.5$.

Поскольку это значение является критическим, из формулы (2.28) находим приближенное значение $\tilde{t}_3 =$ =0,7 Θ , и после нахождения поправки из формулы (2.26) (что, впрочем, не обязательно) принимаем t_{32} =0,75 Θ , 100 Далее из формул (2.19) находим параметры изображения (2.20):

$$b_1 = a_1 - t_{32} = |1,25 \Theta,$$

$$b_2 = a_2 - a_1 t_{32} + 0.5 t_{32}^2 = \frac{25}{32} \Theta^2,$$

определяющие решение $h_{32}(t)$, выражаемое формулой (2.21).

Из рис. 3.13 видно, что решение h_{32} дает существенно более точный результат сравнительно с решением h_{\sim} . Действительно, при приближении $h_{32} \sim h$ получаем $\delta_{t, \text{ наиб}} = 0,17$ (вместо 0,3), $\delta_{\Phi} = 0,15$ (вместо 0,35) и $\Delta h_{\text{наиб}} = 0,07$ (вместо 0,1).

При некоторых других соотношениях параметров показанной на рис. 3.13 схемы (или при усложнении схемы включением индуктивности намагничивания, шунтирующей емкость C_2) эффект приближения $h_{32} \sim h$ может быть еще более значительным.

Е. Аппроксимация сигналов, определяемых изображением «сложного» вида

20. Здесь имеются в виду сигналы h, «сложные» изображения которых выражаются дробно-рациональной функцией (2.1).

В виде первого примера рассмотрим сигнал, изображение которого

$$\widehat{h} = \frac{1 + g'_1 p + g'_2 p^2}{p (1 + p)^9} = \frac{1 + 2p + 3p^2}{p (1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_9 p^9)},$$

где $a'_1=9$; $a'_2=36$; $a'_3=84$; $a'_4=a'_5=126$; ... $a'_9=1$.

В соответствии с формулами (2.2)—(2.3) можно записать:

$$\hat{h} = \frac{1}{pA_{\infty}(p)} = \frac{1}{p(1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots)},$$

где

$$a_1 = a'_1 - g'_1 = 9 - 2 = 7;$$

 $a_2 = a'_2 - g'_2 - g'_1 a_1 = 36 - 3 - 2 \cdot 7 = 19$

Далее, учитывая, что $g'_3 = g'_4 = \ldots = 0$, имеем

 $a_i = a'_i - g'_2 a_{i-2} - g'_1 a_{i-1},$

откуда

$$a_3 = 25; a_4 = 19; a_5 = 13; a_6 = 1;$$

 $a_7 = -5; a_8 = 16; a_9 = -16.$

Так как при i > 9 коэффициент $a'_i = 0$, то далее

$$a_i = -g'_2 a_{i-2} - g'_1 a_{i-1} = (-1)^i 16.$$

В данном случае отрицательные значения коэффициентов появляются при высоких номерах i>6. Поэтому в задачах приближения $h_{3m} \sim h$ ($m \leq 5$) можно пользоваться стандартными методами (как и при изображениях «простого» вида).

Обращаясь к приближению 1-го порядка, замечаем, что параметры

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{19}{49} \cong 0,388$$
 M $\xi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1, \kappa_p} = 2\lambda_1 = 0,775$

удовлетворяют условию (2.11) существования такого приближения.

Параметры аппроксимирующей функции h_{31} , выражаемой формулой (2.10), находятся из формул (2.8) и (2.9):

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} = \sqrt{49 - 38} = 3,31;$$

$$t_{31} = a_1 - b_1 = 7 - 3,31 = 3,69.$$

Функция $h_{31}(t)$ изображена пунктирной линией на рис. 3.14, где приводится также график сигнала h(t). Как видно, погрешности аппроксимации, рассматриваемые в § 1, п. 12, получаются здесь умеренными: $\delta_{\Phi} =$ =0,128, $\delta_{t, \text{ нам6}} = 0,193$ и $\Delta h_{\text{нам6}} = 0,1$; последние две погрешности относятся к уровню h = 0,1 h_{max} . Как и следовало ожидать (см. § 1, п. 14), реальные значения погрешностей меньше граничных значений. Действительно, находя значение выражаемого формулой (1.34) коэффициента

$$c_{s} = \frac{t_{s1}^{2}}{2} \left(a_{1} - \frac{2}{3} t_{s1} \right) = \frac{3.69^{2}}{2} \left(7 - \frac{2}{3} 3.69 \right) = 30.8$$

и определяя параметр $\zeta_3 = a_3/c_3 = 0.812$, из приведенных на рис. 1.8 и 1.9 графиков находим граничные значения погрешностей:

$$\boldsymbol{\delta}_{tr} = \boldsymbol{\Phi}_{t\epsilon} \left(\boldsymbol{\zeta}_{s}, \boldsymbol{\zeta}_{t} \right) \cong 0, 3; \quad \boldsymbol{\delta}_{\phi r} = \boldsymbol{\Phi}_{\phi} \left[(\boldsymbol{\zeta}_{s}, \boldsymbol{\xi}_{t}) \cong 0, 18. \right]$$

Сравним реальное значение «временной» погрешности с расчетным. Для этого из формул (1.37) вычисляем значения $c_4=35,4$ и $c_5=31,3$, откуда $\zeta_4=a_4/c_4=0,536$ и $\zeta_5=a_5/c_5=0,415$. Подставляя эти значения в оценочную формулу (1.36), получим

$$\delta_{t, \text{ Ham6}} = \delta_{tr} \sqrt{0.7 \cdot 0.464^2 + 0.18 \cdot 0.585^2 + 0.12} = 0.172,$$

что отличается от реального значения 0,193 только на 11%.



Рис. 3.14. Аппроксимация «сложного» сигнала (m=1 и 2).

В рассматриваемом примере выполняется также условие (2.12) существования приближения 2-го порядка:

$$\mathbf{\xi}_{2} = \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{2, \text{ kp}}} = \frac{0.073}{0.09} = 0.81 < 1,$$

$$\lambda_{2} = a_{3}/a_{1}^{3} = 0.073, \text{ a } \lambda_{2, \text{ kp}} = 0.09$$

где

находится из формулы (2.14). Как указывалось, в рассматриваемой задаче приближения применимы стандартные методы нахождения параметров изображения \hat{h}_{32} , изложенные в § 2, пп. 4—6.

Так как величина параметра $\epsilon_1 = \lambda_2/\lambda_1^2 \cong 0.5$, т. е. она близка к критическому значению, то находимое из фор-103 мулы (2.28) значение $\tilde{t}_3 = 1,8$ принимаем за приближенную величину запаздывания. Находя из формулы (2.26) поправку, принимаем $t_{32} = 1,94$ (более точное значение равно 1,95). Далее из формул (2.19) находим параметры изображения \hat{h}_{32} :

$$b_1 = a_1 - t_{32} = 7 - 1,194 = 5,06,$$

 $b_2 = a_2 - a_1 t_{32} + 0,5t_{32}^2 = 19 - 7 \cdot 1,94 + 1,9 = 7,35$

определяющие аппроксимирующую функцию $h_{32}(t)$, выражаемую формулой (2.21). Точки этой функции показаны на рис. 3.14. Как показало достаточно точное сравнение функций h(t) и $h_{32}(t)$, наибольшая «временная погрешность аппроксимации получается здесь весьма малой: $\delta_{t, \text{ наиб}} = 0,016$ (вблизи уровня h = 0,1). Это значение существенно меньше находимого из рис. 1.10 граничного значения $\delta_{tr} = \Phi_{t2}(\lambda_1, \xi_2) = \Phi_{t2}(0,388, 0,81) \cong 0,11$, что в соотвествии с изложенным в § 1, п. 16, объясняется весьма малой величиной разностей $|1-\xi_4|$ и $|1-\xi_5|$. Действительно, находя из формул (1.40) значения коэффициентов $c_4 = 20,8$ и $c_5 = 12,5$, получим $\xi_4 = a_4/c_4 = 0,914$ и $\xi_5 = a_5/c_5 = 1,06$. Подставляя эти значения в оценочную формулу (1.39), найдем расчетное значение

$$\delta_{t, \text{ hand}} \cong \delta_{tr} \sqrt[4]{0.95 \cdot 0.086^2 + 0.04 \cdot 0.06^2 + 0.01} = 0.014,$$

которое отличается от указанного выше реального значения погрешности на $\sim 13\%$.

21. Рассмотрим сигнал, изображение которого («сложного» вида)

$$\widehat{h} = \frac{1 + g'_1 p + g'_2 p^2}{p(1 + a'_1 p + \dots + a'_4 p^4)} = \frac{1 + p + 0.5 p^2}{p(1 + p)^4}.$$

В соответствии с формулами (2.2)—(2.3) это изображение приводится к «простому» виду:

$$\hat{h} = \frac{1}{pA_{\infty}(p)} = \frac{1}{p(1+a_1p+a_2p^2+a_3p^3+\ldots)},$$

коэффициенты которого (находимые аналогично указанному в п. 20) имеют следующие значения:

$$a_1=3; a_2=2,5; a_3=0; a_4=-0,25; a_5=0,25$$

(величины остальных коэффициентов не нужны для дальнейших расчетов). В данном случае выполняется условие (2.11) существования приближения 1-го порядка и

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{2.5}{9} = 0,278; \ \xi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{1, \ KP}} = 2\lambda_1 = 0,556.$$

Параметры аппроксимирующей функции h_{31} , выражаемой формулой (2.10), находятся из равенств (2.8) и (2.9):

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} = \sqrt{9 - 5} = 2,$$

$$t_{31} = a_1 - b_1 = 3 - 2 = 1.$$

На рис. 3.15 изображены графики функций *h* и *h*₃₁. Погрешности аппроксимации, определяемые согласно из-



Рис. 3.15. Сравнение различных способов приближения «сложного» монотонно изменяющегося сигнала (m=1 и 2).

ложенному в § 1, п. 12, оказываются здесь весьма значительными:

 $\delta_{t,\text{Hand}} = 0.52; \ \delta_{\Phi} = 0.1; \ \Delta h_{\text{Hand}} = 0.14.$

В отличие от имевшего место в рассмотренных выше примерах здесь погрешности аппроксимации в ы ше граничных значений δ_{tr} и $\delta_{\phi r}$. Действительно, учитывая, что $\zeta_3 = a_3/c_3 = 0$, из рис. 1.8 и 1.9 найдем

$$\delta_{tr} = \Phi_{t1}(\zeta_3, \xi_1) = 0.43; \quad \delta_{\phi r} = \Phi_{\phi}(\zeta_3, \xi_1) = 0.11.$$

105

Талой результат объясняется тем, что в данном случае коэффициент $a_4 < 0$, а коэффициент $a_5 \gg c_5$, и, следовательно, не выполняется условие (1.32) (см. § 1, пп. 13 и '14).

Сравним найденное выше реальное значение «временной» погрешности с расчетным. Определяя из равенства (1.37) значения $c_4 = 0,375$ и $c_5 = 0,0916$, получим $\zeta_4 = -0,666$ и $\zeta_5 = 2,73$. Подставляя эти значения в формулу (1.36), найдем

$$\delta_{t, \text{ Hand}} \cong \delta_{tr} \sqrt{0.7 \cdot 1.666^2 + 0.18 \cdot 1.73^2 + 0.12} = 0.43 \cdot 1.61 = 0.67,$$

что превышает найденное реальное значение 0,52 на $\sim 29\%$.

Несмотря на большую величину погрешности $\delta_{t, \text{ наи6}}$, аппроксимирующая функция h_{31} может оказаться в ряде задач приемлемой, так как эта погрешность относится к уровню h=0,1, а на более высоких уровнях она быстро уменьшается (при h>0,2 $\delta_t<0,14$). Такое положение обусловлено значением $\zeta_3=0$ (см. § 4, п. 8). Если заведомо известно, что аппроксимирующая функция используется на высоких уровнях h>0,5, то еще лучший результат приближения достигается по «способу производной» (см. § 2, п. 10). Учитывая, что в рассматриваемом примере коэффициенты $g'_0=1$, $g'_1=1$ и $g'_2=0,5$, в соответствии с формулой (2.44) получаем такое выражение аппроксимирующей функции 1-го приближения:

$$h_{d1}(t) = h'_{31}(t) + \frac{dh'_{31}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 h'_{31}}{dt^2}, \qquad (3.62)$$

где функция $h'_{31}(t)$ представляет собой приближение $h'_{31} \sim h'$, причем изображение вспомогательной функции

$$h' = \frac{1}{p (1 + a'_1 p + \dots + a'_4 p^4)} = \frac{1}{p (1 + p)^4}.$$

Определяя стандартным путем параметры функции h'а1:

 $b'_1 = \sqrt{(a'_1)^2 - 2a'_2} = \sqrt{16 - 12} = 2; t'_{31} = a'_1 - b'_1 = 2,$ получим

$$h'_{31} = (1 - e^{-(t-2)/2}) \cdot 1 (t-2).$$

Подставляя это выражение в формулу (3.62), получим

$$h_{d1}(t) = 1 - 0,75e^{-(t-2)/2} \cdot 1(t-2).$$

График функции h_{d1} также изображен на рис. 3.15, причем при $t < t'_{31} = 2$ этот график ориентировочно продолжен (пунктирной линией) с учетом того, что в точке t=0 как сама аппроксимируемая функция h(t), так и ее первая производная равны нулю. Из рис. 3.15 видно, что в области $t > t'_{31}$ (точнее, $t > 1,4t'_{31}$) функция h_{d1} весьма хорошо аппроксимирует функцию h(t).

Рассмотрим приближение $h_{32} \sim h$ 2-го порядка, что в данном конкретном случае представляет специальный интерес, так как соответствующее этому приближению запаздывание $t_{32}=0$. Это обусловлено тем, что коэффициент $a_3=0$, а $t_3=t_{32}$ — наименьший вещественный корень уравнения (2.15). При $t_{32}=0$ нахождение параметров изображения \hat{h}_{32} из равенств (2.19) упрощается:

$$b_1 = a_1 = 3; \ b_2 = a_2 = 2,5.$$

Эти параметры определяют функцию h_{32} , выражаемую формулой (2.21), которая в данном случае становится незапаздывающей ($h_{32}=h_{32}$). Точки функции $h_{32}(t)$ показаны на рис. 3.15. Здесь погрешность аппроксимации весьма мала и ею можно практически пренебречь.

22. Рассмотрим сигнал, изображение которого («сложного» вида)

$$\widehat{h} = \frac{G'_{2}(p)}{pA'_{4}(p)} = \frac{1 + g'_{1}p + g'_{2}p^{2}}{p(1 + a'_{1}p + a'_{2}p^{2} + a'_{3}p^{3} + a'_{4}p^{4})}; \quad (3.63)$$

значения коэффициентов g'_1 , g'_2 и a'_i приводятся на рис. 3.16. В соответствии с формулами (2.2)—(2.4) изображение (3.63) приводится к «простому» виду:

$$\hat{h} = \frac{1}{pA_{\infty}(p)} = \frac{1}{p(1+a_1p+a_2p^2+a_3p^3+\ldots)}, \quad (3.64)$$

где интересующие нас первые 5 коэффициентов (находимые аналогично указанному в п. 20) имеют следующие значения:

$$a_1 = 1,8; a_2 = 5,16; a_3 = 2,44; a_4 = -4,76; a_5 = -0,12.$$

В данном случае отрицательные значения коэффициентов a_i появляются уже начиная с номера i = 4, что должно существенно повлиять на погрешность аппроксимации, и в этом смысле рассматриваемая задача интересна для контрольной проверки точности оценочной формулы (1.39). Параметры изображения (3.64) не удовлетворяют условию существования приближения 1-го порядка, но удовлетворяют условию существования приближения 2-го порядка. Действительно,

$$\lambda_{1} = \frac{a_{2}}{a_{1}^{2}} = \frac{5,16}{1,8^{2}} = 1,595 > \frac{1}{2}; \ \lambda_{2, \ \kappa p} = \lambda_{1} - \frac{1}{3} = 1,262;$$
$$\lambda_{2} = \frac{a_{2}}{a_{1}^{3}} = \frac{2,44}{1,8^{3}} = 0,419; \ \boldsymbol{\xi}_{2} = \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{2, \ \kappa p}} = 0,332 < 1.$$

Так как $\epsilon_1 = \lambda_2/\lambda_1^2 = 0,164 \ll 0,5$, то согласно формуле (2.28) запаздывание аппроксимирующей функции h_{32} 2-го порядка приближения

$$t_{32} = \frac{a_3}{a_2} \left[1 + \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_1^2}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1}{3} \right) + \dots \right] \cong \\ \cong \frac{2.44}{5.16} 1,09 \cong 0,515.$$

Остальные два параметра этой функции находятся из равенств (2.19):

$$b_1 = a_1 - t_{32} = 1,285; \ b_2 = a_2 - a_1 t_{32} + 0.5 t_{p_2}^2 = 4,366$$

Найденные значения определяют функцию h_{32} , выражаемую формулой (2.21). График этой функции показан на рис. 3.16 мелкопунктирной линией; сплошной линией показан график сигнала h. Из сравнения функций h и h_{32} определяются погрешности разного вида (см. § 1, п. 12):

$$\Delta h_{\text{haug}} = 0,11; \ \delta_{t, \text{haug}} = 0,35; \ \delta_{\text{emgp}} = \frac{\Delta h_{\text{bmgp}}}{h_{\text{bmgp}}} = 0,068.$$

Как видно, особенно значительна наибольшая «временная» погрешность аппроксимации (получаемая на уровне $h=0,1h_{\rm max}=0,134$), которая почти в 10 раз превосходит находимое из рис. 1.10 граничное значение

$$\delta_{t_{\rm F}} = \Phi_{t_2}(\lambda_1, \xi_2) \cong \Phi_{t_2}(1,56; 0,332) = 0,042.$$

Такой результат обусловлен отрицательными значениями коэффициентов a_4 и a_5 . Действительно, находя из формул (1.40) величины коэффициентов $c_4 = 0,61$ и $c_5 = = 0,103$, получим $\zeta_4 = a_4/c_4 = -7,82$ (!) и $\zeta_5 = a_5/c_5 = -1,16$. 108
Подставляя эти значения в формулу (1.39), найдем расчетное значение:

$$\delta_{t, \text{ нан6}} \cong \delta_{tr} \dot{V} \overline{0,95 \cdot 8,82^2 + 0,04 \cdot 2,16^2 + 0,01} = 0.042 \cdot 8.6 = 0.36,$$

что почти совпадает с полученным выше реальным значением погрешности.

В реализованном выше приближении запаздывание t_{32} мало $(a_1 \gg t_{32} \ll \sqrt[p]{a_2})$, а разность степеней полиномов $A'_n(p)$ и $G'_r(p)$ в изображении (3.63) n-r=4-2=m.



Рис. 3.16. Сравнение различных способов приближения «сложного» колебательного сигнала.

В соответствии с изложенным в § 2, п. 9, при такой ситуации удовлетворительный результат приближения может быть получен при использовании незапаздывающей аппроксимирующей функции h_{32} 2-го порядка приближения. Изображение такой функции

$$\widehat{h}_{32} = \frac{\mathscr{E}'_{s}(p)}{pB'_{m}(p)} = \frac{1}{pB'_{m}(p)} = \frac{1}{p(1+b'_{1}p+b'_{2}p^{2})}, \quad (3.65)$$

где принято во внимание, что оптимальное соотношение (2.39) выполняется, если степень полинома $\mathcal{E}'_s(p) \ s=0$. В этом случае коэффициенты изображения (3.65) находятся из простых уравнений (2.41):

$$b'_1 = a_1 = 1,8; b'_2 = a_2 = 5,16.$$

График незапаздывающей аппроксимирующей функции h_{32} показан на рис. 3.16 крупнопунктирной линией. Как видно, «временна́я» погрешность аппроксимации в этом случае существенно уменьшается, но сильно возрастает погрешность определения величины «выброса» до значения $\delta_{\text{выбр}} = 0,265$, которое почти в 4 раза больше полученного выше. Тем не менее применение незапаздывающей функции h_{32} (особенно учитывая простоту определения параметров этой функции) может оказаться предпочтительным в целом ряде задач, в которых аппроксимируемая функция h отличается отмеченными выше особенностями.

Если заведомо известно, что аппроксимирующая функция должна использоваться в области достаточно больших времен, то наилучший результат приближения получается по «способу производной» (см. § 2, п. 10). В соответствии с формулой (2.44) получаемая по этому методу аппроксимирующая функция в рассматриваемой нами задаче принимает вид

$$h_{d2} = h'_{32} + \frac{dh'_{32}}{dt} + 2\frac{d^2h'_{32}}{dt^2}, \qquad (3.66)$$

где вспомогательная запаздывающая функция h'_{32} представляет собой приближение к вспомогательной функции h', изображение которой в соответствии с изображением (3.63) имеет вид

$$\hat{h}' = \frac{1}{p(1+2,8p+8,96p^2+11,2p^3+8p^4)}.$$

Находимые стандартным путем параметры изображения h'_{32} имеют значения: $t'_{32}=1,56$, $b'_1=1,24$ и $b'_2=5,8$. Эти значения в соответствии с формулами (2.20)—(2.22) определяют вспомогательную функцию

$$h'_{32} = \left[1 - e^{-\alpha t'} \left(\cos \omega t' + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t'\right)\right] \cdot 1(t'), \quad (3.67)$$

где $t' = t - t'_{32}; \ \alpha \approx 0,109$ и $\omega \approx 4,05.$

Подставляя выражение (3.67) в равенство (3.66), получим искомую функцию

 $h_{d2} = [1 - e^{-\alpha t'} (0.649 \cos \omega t' - 0.07 \sin \omega t')] \cdot 1 (t').$

Конструктивная сложность этой функции не выше сложности функции (3.67). На рис. 3.16 показаны точки аппроксимирующей функции h_{d2} . Как видно, в области $t > 2t'_{32}$ погрешность приближения $h_{d2} \sim h$ весьма мала.



Рис. 3.17. Сравнение различных способов приближения «сложного» колебательного сигнала при t₂₂<0 (m=2).

23. Рассмотрим сигнал, изображение которого («сложного» вида)

$$\hat{h} = \frac{G'_{3}(p)}{pA'_{4}(p)} = \frac{1 + g'_{1}p + g'_{2}p^{2} + g'_{3}p^{3}}{p\left(1 + a'_{1}p + a'_{2}p^{2} + a'_{3}p^{3} + a'_{4}p^{4}\right)} \quad (3.68)$$

(значения коэффициентов этого изображения приводятся на рис. 3.17). В соответствии с формулами (2.2) — (2.4) изображение (3.68) приводится к «простому» виду:

$$\hat{h} = \frac{1}{pA_{qq}(p)} = \frac{1}{p(1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots)}, \quad (3.69)$$

где интересующие нас первые три коэффициента принимают значения:

$$a_{1} = a'_{1} - g'_{1} = 0,5 - 0,315 = 0,185;$$

$$a_{2} = a'_{2} - g'_{1} - g'_{1} = 4,29 - 0,645 - 0,315 \cdot 0,185 = 3,587;$$

$$a_{3} = a'_{3} - g'_{3} - g'_{2} - a_{1} - g'_{1} - a_{2} = 0,5 - 0,065 - 0,645 \cdot 0,185 - 0,315 \cdot 3,587 = -0,814.$$

Здесь уже коэффициент a_3 принимает отрицательное значение. Это в данном случае является особенно существенным, поскольку условие реализации приближения 1-го порядка не выполняется ($\lambda_1 = a_2/a_1^2 \cong 100 \gg 0.5$), и следовательно, диссипативное решение h_{32} 2-го порядка приближения получается только при отрицательно, если при запаздывании (см. § 1, п. 20). И действительно, если при полученных выше значениях коэффициентов a_i найти наименьший по абсолютной величине вещественный корень уравнения (2.15), то окажется $t_{32} = -0.211$. Если, не обращая внимания на дефектность такого значения t_{32} , найти из равенств (2.19) значения коэффициентов

$$b_1 = a_1 - t_{32} = 0,185 + 0,211 = 0,396,$$

$$b_2 = a_2 - a_1 t_{32} + 0,5t_{32}^2 =$$

$$= 3,587 + 0,185 \cdot 0,211 + 0,5 \cdot 0,211^2 = 3,648,$$

определяющих изображение h_{32} , то в соответствии с формулами (2.20) — (2.22) "запаздывающая" аппроксимирующая функция будет иметь вид

$$h_{32} = \left[1 - e^{-\alpha_3 t'} \left(\cos \omega_3 t' + \frac{\alpha_3}{\omega_3} \sin \omega_3 t'\right)\right] \cdot 1(t'), \quad (3.70)$$

где *t*'=*t*—*t*₃₂; α_3 =0,0634, ω_3 =0,562.

График функций (3.70) изображен на рис. 3.17 (крупнопунктирной линией), где также показан (сплошной линией) график исходного сигнала h, содержащего две колебательные составляющие с резко различными частотами колебаний, характеризуемых различным затуханием.

Хотя величина отрицательного запаздывания t_{32} абсолютно не велика и приближение $h_{32} \sim h$ можно признать удовлетворительным, но применять аппроксимирующую функцию h_{32} все же нецелесообразно, так как 112 более точное, в общем, приближение достигается в рассматриваемой задаче с помощью незапаздывающей функции $h_{32} \sim h$, которая определяется и конструируется более просто.

Поскольку в данном случае разность степеней полиномов изображения (3.68) удовлетворяет неравенству n-r=4-3=1 < m, то в соответствии с изложенным в § 2, п. 9, изображение \hat{h}_{32} , удовлетворяющее оптимальному соотношению (2.39), должно иметь вид

$$\hat{h}_{a_2} = -\frac{\mathcal{E}'_{s}(p)}{pB'_{m}(p)} = \frac{\mathcal{E}'_{1}(p)}{pB'_{2}(p)} = \frac{1 + e'_{1}p}{p\left(1 + b'_{1}p + b'_{2}p^{2}\right)}.$$
 (3.71)

При этом коэффициенты данного изображения должны удовлетворять равенствам (2.42), откуда:

$$e'_{1} = -\frac{a_{m+1}}{a_{m}} = -\frac{a_{3}}{a_{2}} = \frac{0.814}{3.587} - 0.227;$$

$$b'_{1} = a_{1} + e'_{1}a_{0} = 0.185 + 0.227 \cdot 1 = 0.412;$$

$$b'_{2} = a_{2} + e'_{1}a_{1} = 3.587 + 0.227 \cdot 0.185 = 3.63.$$

Оригинал изображения (3.71) имеет вид

$$h_{32} = 1 - e^{-\alpha t} (\cos \omega t - 0, 111 \sin \omega t),$$
 (3.72)

где $\alpha = 0,0568$ и $\omega = 0,522$. График функции (3.72) показан на рис. 3.17 мелкопунктирной линией. В области t>2 приближение $h_{32} \sim h$ является более совершенным, чем приближение $h_{32} \sim h$.

Еще лучший результат в рассматриваемом случае достигается при приближении по «способу производной» (см. § 2, п. 10) с помощью аппроксимирующей функции (2.44), которая с учетом значений коэффициентов полинома $G'_3(p)$ исходного изображения (3.68) имеет вид

$$h_{\mathfrak{S2}} = h'_{\mathfrak{S2}}(t) + 0.315 \frac{dh'_{\mathfrak{S2}}}{dt} + 0.645 \frac{d^2h'_{\mathfrak{S2}}}{dt^2} + 0.065 \frac{d^3h'_{\mathfrak{S2}}}{dt^3},$$

где $h'_{s_2} \sim h'$ и

$$h' \div \stackrel{\wedge}{h'} = \frac{1}{p(1+0,5p+4,29p^2+0,5p^3+p^4)}.$$
 (3.73)
113

8-2247

Найдя стандартным путем параметры изображения h'_{32} ($t'_{32}=0,117$, $b'_1=0,383$, $b'_2=4,24$) и затем оригинал $h'_{32} \leftrightarrow \hat{h'}_{32}$, после подстановки полученной функции в выражение для h_{d2} найдем

$$h_{d2} = [1 - e^{-\alpha' t'} (0.849 \cos \omega' t' - 0.039 \sin \omega' t')] \cdot 1(t'),$$

где $t' = t - t'_{32}$; $\alpha' = 0,0452$ и $\omega' = 0,484$.

Точки функции h_{d2} показаны на рис. 3.17, откуда видно, что в области t>0,75 приближение $h_{d2} \sim h$ оказывается наиболее совершенным из всех рассмотренных выше приближений; в частности, только функция h_{d2} достаточно точно отображает экстремальные значения аппроксимируемой функции h. Такой результат обусловлен двумя обстоятельствами. Во-первых, приближение $h'_{32} \sim h'$, где изображение h' выражается функцией (3.73), является весьма совершенным; в этом можно убедиться из рассмотрения представленного на рис. 1.10 семейства кривых (в данном случае $\lambda_1 = 17,1$; $\lambda_2 = 4$; $\xi_2 = 0,24$, откуда граничное значение погрешности $\delta_{tr} < 0,02$). Во-вторых, в рассматриваемом случае достаточно сильно выполняются неравенства (1.67)—(1.69).

В общем, рассмотренный пример подтверждает рекомендации, сформулированные в § 2, п. 9 и 10.

24. Приближение по «способу производной» является в ряде случаев предпочтительным, но не всегда обязательным. Однако в некоторых случаях такой способ оказывается Единственно возможным, так как другие способы приближения в этих случаях не реализуются. Два подобных случая были рассмотрены в § 1, пп. 21 и 22 (см. рис. 1.11). Применение «способа производной» обязательно также в случае, когда аппроксимирующий сигнал обладает «сложным» изображением вида

$${}^{\mathsf{A}}_{h} = \frac{l'_{1p} + l'_{2}p^{2} + \dots + l'r_{+1}p^{r+1}}{p\left(1 + a'_{1}p + \dots + a'_{n}p^{n}\right)} - (3.74)$$

Особенностью такого изображения является равенства $l'_0=0$ (вместо обычного значения $l'_0=1$, фигурирующего в нормированном относительно $h(\infty)$ изображении).

Изображение (3.74) можно представить в виде

$$\stackrel{\wedge}{h} = l'p \frac{1 + g'_1p + \dots + g'_rp^r}{p(1 + a'_1p + \dots + a'_np^n)} = l'p\stackrel{\wedge}{h'},$$

114

Если r < n, то, осуществив одним из стандартных спосо f_{OB} приближение $h'_{3m} \sim h'$, можно затем найти искомое приближение $h_{dm} \sim h$ с помощью аппроксимирующей функции

$$h_{d\ m} = l'_1 dh'_{3m}/dt.$$

При этом для достижения удовлетворительного приближения $h_{dm} \sim h$ порядок *m* должен обычно на единицу превышать порядок, при котором получается удовлетворительное приближение $h'_{3m} \sim h'$ (см. § 1, п. 25).

В виде примера рассмотрим сигнал (r<9)

$$h \div \stackrel{\wedge}{p} = \frac{p^r}{p(1+p)^{\bullet}}.$$
(3.75)

Согласно изложенному аппроксимирующая функция должна иметь вид

$$h_{dm} = \frac{d^{\tau} h'_{um}}{dt^{\tau}}, \qquad (3.76)$$

где вспомогательная функция $h'_{3m} \sim h'$, причем

$$h' = \frac{1}{p(1+p)^{\mathfrak{s}}};$$
 (3.76a)

$$\hat{h'}_{3m} = \frac{e^{-pl'_{3m}}}{p\left(1 + b'_{1}p + \dots + b'_{m}p^{m}\right)}.$$
(3.77)

Пусть в выражении (3.75) r=1. Тогда согласно изложенному в § 1, п. 25, поскольку неравенство (1.67) не выполняется, минимально необходимый порядок приближения $h'_{3m} \sim h$, удовлетворяющий приближению $h_{dm} \sim h$, должен равняться двум (m=2). Приближение функций, выражаемых равенством (3.77) (m=2), рассматривалось выше, в п. 12. Там были установлены следующие

значения параметров изображения h'_{3m} :

8*

$$t'_{3m} = t'_{32} = 4,17; b'_1 = 4,83; b'_m = b'_2 = 7,16.$$

В соответствии с формулами (2.20) — (2.22) эти параметры определяют функцию

$$h'_{32} = \left[1 - e^{-\alpha t'} \left(\cos \omega t' + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t'\right)\right] \cdot 1(t'), \quad (3.78)$$

rge $t' = t - t'_{32}; \ \alpha = 0,338; \ \omega = 0,161.$
8*

Подставляя выражение (3.78) в равенство (3.76), где r=1, получим искомую аппроксимирующую функцию:

$$h_{d2} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t'}}{\omega} \left(\alpha^2 + \omega^2 \right) \sin \omega t' \cdot \mathbf{1} \left(t' \right). \tag{3.79}$$

Графики функций h_{d2} и h изображены на рис 3.18,a, откуда видно, что в области $t > 1,1t'_{32}$ приближение $h_{d2} \sim h$ можно полагать удовлетворительным. Следует отметить, что для приближений рассматриваемого типа преобладающей является «амплитудная», а не «временна́я» погрешность аппроксимации.



Рис. 3.18. Приближение по «способу производной».

Если в выражении (3.75) принять r=2, а порядок приближения m=2 сохранить неизменным, то в этом случае в соответствии с равенствами (3.76)—(3.78) аппроксимирующая функция h_{d2} будет выражаться в торой производной от функции (3.78) или, что то же, первой производной от функции (3.79), откуда

$$h_{d2} = \left[\left(\alpha^2 + \omega^2 \right) e^{-\alpha t'} \left(\cos \omega t' - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t' \right) \right] \cdot 1 (t'). \quad (3.80)$$

График функции (3.80), а также график функции h, являющейся теперь уже в торой производной от функции h', определяемой равенством (3.76а), изображены на рис. 3.18,6. Как и следовало ожидать, приближение $h_{d2} \sim h$ является в данном случае менее удовлетворительным, чем в предыдущем случае. В соответствии с изложенным в § 1, п. 25, для получения лучшего приближения здесь следовало бы применить порядок приближения m=3, но это сопряжено с решением более громоздкой задачи.

116

Значительно лучший результат приближения $h_{d2} \sim h$ получился бы, если числитель изображения (3.75) представлял собой двучлен $l'_{1p} + l'_{2p}^2$ (особенно при $l'_{1} > l'_{2}$).

25. В заключение данного раздела рассмотрим *переходную характеристику усилителя* (в области фронта) *при простой схеме коррекции*. Задача выбора надлежащего коэффициента коррекции, ставшая классической,



Рис. 3.19. Переходная характеристика усилителя с корректирующей индуктивностью $(L=\alpha R^2 C)$.

обсуждается во многих работах ([1, 3, 5, 6, 14] и др.), и приемлемое упрощение анализа, связанного с решением этой хотя и не сложной, но часто встречающейся на практике задачи, представляет определенный интерес. Эквивалентная схема усилителя при простой (параллельной) коррекции представлена на рис. 3.19, где корректирующая индуктивность

$$L = \alpha R^2 C$$
,

и а — коэффициент коррекции.

Изображение нормированной по амплитуде (относительно установившегося значения $u(\infty) = IR$) и по времени (относительно $\Theta = \dot{R}\dot{C}$) переходной характеристики имеет вид

$$\stackrel{\wedge}{h} = \frac{1 + \alpha q}{p \left(1 + q + \alpha q^2\right) - p \left(1 + a'_1 q + a'_2 q^2\right)}, \qquad (*)$$

где $q = p\Theta = pRC$. К такому же виду приводится изображение переходной характеристики транзисторного усилителя с эмиттерной обратной связью при использовании корректирующей емкости, шунтирующей сопротивление обратной связи [10].

При $\alpha \leq 0,25$ переходная характеристика нарастает монотонно, а при $\alpha > 0,25$ она становится колебательной. В последнем случае ценой допущения выброса выходного сигнала достигается повышение крутизны его фронта. Из этих соображений обычно принимают $\alpha \geq 0,25$, но $\alpha < 0,5$.

В соответствии с формулами (2.1) — (2.2а) изображение (*) приводится к «простому» виду:

$${\stackrel{\wedge}{h}} = \frac{1}{pA_{\infty}(q)} = \frac{1}{p(1+a_1q+a_2q^2+\ldots)};$$

здесь

$$a_{1} = a'_{1} - g'_{1} = 1 - \alpha;$$

$$a_{2} = a'_{2} - g'_{2} - g'_{1}a_{1} = \alpha - 0 - -\alpha(1 - \alpha) = \alpha^{2},$$
IM TAK KAK $g'_{2} = g'_{3} = \ldots = 0$ IN $a'_{3} = a'_{4} = \ldots = 0$, to
$$a_{i} = g'_{1}a_{i-1} = (-1)^{i}\alpha^{i} \quad (i \ge 2).$$

Поскольку переходная характеристика h описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка, практический интерес представляет получение приближенного решения только 1-го порядка приближения (приближение порядка m=0 интереса не представляет). Но то обстоятельство, что уже начиная с номера i=3 некоторые коэффициенты a_i оказываются отрицательными, свидетельствует о том, что в данном случае можно ожидать значительных погрешностей аппроксимации с помощью запаздывающей функции $h_{a1} \sim h$.

Условие существования приближения 1-го порядка согласно соотношению (2.11) сводится к выполнению неравенства

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} < \frac{1}{2}.$$

Это неравенство определяет наибольшее значение коэффициента коррекции ($\alpha < \alpha_0$), при котором приближенное решение реализуется:

$$\alpha < \alpha_0 = \sqrt{2} - 1 = 0,414.$$

Если $\alpha < \alpha_0$, то параметры приближенного решения (2.10) находятся из равенств (2.8) и (2.9):

$$b_{1} = \sqrt{a_{1}^{2} - 2a_{2}} = \sqrt{1 - 2a - a^{2}};$$

$$r_{31} = a_{1} - b_{1} = 1 - a_{1} - \sqrt{1 - 2a - a^{2}};$$

И

$$h_{31}(\tau) = \left[1 - e^{-(\tau - \tau_{31})/b_1}\right] \cdot 1(\tau - \tau_{31}),$$

где в соответствии с принятой нормировкой по времени $\tau = t/\Theta = t/RC$ и $\tau_{31} = t_{31}/RC$.

При а=0,25 получаем: b₁=0,66 и т₃₁=0,09.

При $\alpha = \alpha_0 = 0,414$ получаем $b_1 = 0$. В этом случае приближение 1-го порядка вырождается в приближение порядка m = 0, выражающее единичную функцию

 $h_{30} = 1 (\tau - \tau_{30}),$

где $\tau_{30} = a_1 = 1 - \alpha_0 = 1 - 0,414 = 0,586.$

На рис. 3.19 сплошными линиями изображены графики переходной характеристики $h(\tau)$, построенные из строгого решения уравнения (*) для двух значений $\alpha: 0.25$ и 0.414. При $\alpha=0.25$ это решение имеет вид

 $h = h(\tau) = 1 - e^{-2\tau} (1 + \tau).$

Пунктирной линией на рис. 3.19 изображен график запаздывающей на время $\tau_{31}=0,09$ переходной характеристики $h_{31}(\tau)$, соответствующей $\alpha=0,25$. В данном случае наибольшая «временна́я» погрешность в междецильном интервале (она получается на уровне h=0,1) весьма значительна: $\delta_{t, \text{ наи6}}=0,59$. Погрешность же определения междецильного времени, определяемая формулой (1.30), весьма мала: $\delta_{\phi}=0,07$. При увеличении α ($\alpha>0,25$) погрешность приближения довольно быстро возрастает.

грешность приближения довольно быстро возрастает. Так как в рассматриваемой задаче приближения разность степеней полиномов изображения (*) n - r = 1, то в соответствии с изложенным в § 2, п. 9, лучший результат приближения должен получиться при использовании незапаздывающей аппроксимирующей функции $h_{31} \sim h$, определяемой изображением (2.38). В данном случае m=1, откуда s=m-1=0. Поэтому

$$\hat{h}_{31} = \frac{1}{p(1+b'_1q)} \div 1 - e^{-\tau/b'_1} = h_{31}(\tau), \qquad (**)$$

где согласно формуле (2.41)

$$b'_1 = a_1 = 1 - \alpha$$
.

Решение (**) существует при любом $\alpha < 1$; при $\alpha = 1$ получаем $b'_1 = 0$ (решение вырождается в единичную функцию).

На рис. 3.19 показаны точки, соответствующие переходной характеристике h_{31} , выражаемой формулой (**), при $\alpha = 0,25$ и $\alpha = 0,414$. При $\alpha = 0,25$ получается удовлетворительный результат приближения. Наибольшая «временная» погрешность приближения $\delta_{t, \text{ наи6}} = 0,22$ получается здесь также на уровне h = 0,1, но далее она быстро уменьшается. Погрешность определения междецильного времени весьма мала: $\delta_{\Phi} = 0,05$. Даже при $\alpha = 0,414$ получается приемлемый для многих приложений результат приближения. В этом случае погрешность $\delta_{t, \text{ наи6}} = 0,35$ (она получается на уровне $h = 0,1h_{\text{max}} =$ = 0,103) все же меньше, чем при аппроксимации с помощью запаздывающей функции h_{31} , соответствующей $\alpha = 0,25$ (!). На более высоких уровнях междециального интервала погрешность аппроксимации уменьшается. Погрешность определения междецильного времени здесь очень мала: $\delta_{\Phi} \cong 0,03$.

Таким образом, можно заключить, что в рассматриваемой задаче приближения лучший результат достигается с помощью незапаздывающей аппроксимирующей функции (**), которая к тому же не имеет ограничений, присущих запаздывающей функции h_{31} ($\alpha < 0,414$), и является более простой.

Ж. Переходная характеристика многозвенной искусственной линии задержки

26. Для иллюстрации применений приближенного метода анализа при решении более сложных задач рассмотрим многозвенную однородную искусственную линию 120 задержки (ЛЗ), нагруженную на «согласованное» активное сопротивление $R_{\rm H} = V \overline{L/C}$ (рис. 3.20).

Изображение нормированной переходной характеристики k-звенной ЛЗ можно привести к виду

$$\hat{h} = \frac{1}{p\Phi_n(q)} = \frac{1}{p(1+a_1q+\ldots+a_nq^n)} \stackrel{\cdot}{\rightarrow} h(\tau); \quad (3.81)$$

здесь степень полинома n = 2k + 1 и (см. § 2, п.11)

$$q = p\theta = p\sqrt{LC}, \ \tau = \frac{t}{\theta} = \frac{t}{\sqrt{LC}}.$$
 (3.82)



Рис. 3.20. Переходная характеристика 10-звенной линии задержки (m=3).

Выражения коэффициентов a_i полинома $\Phi_n(q)$ можно найти с помощью составленного нами «алгоритма»:

$$\Phi_{n}(q) = P^{k} + (C_{k}^{1} q^{P^{k-1}} + C_{k}^{2} q^{2} P^{k-2}) Q + (C_{k}^{3} q^{3} P^{k-3} + C_{k}^{4} q^{4} P^{k-4}) Q^{2} + \dots + q^{k} Q^{\left[\frac{k+1}{2}\right]},$$

где следует учитывать целую часть числа в квадратных скобках и

$$C_{\mathbf{k}}^{i} = \frac{1}{i!} k(k-1) \dots (k-i+1) \quad (i \le k);$$
$$P = 1 + \frac{q^{2}}{2}; \quad Q = 1 + \frac{q^{2}}{4}.$$

Отсюда можно найти все коэффициенты a_i ; выражения первых шести таких коэффициентов определяются равен. ствами:

$$a_{1} = \frac{k}{1!}; a_{2} = \frac{k^{2}}{2!}; a_{3} = \frac{k^{3}}{3!} \left(1 + \frac{1}{2k^{2}} \right);$$

$$a_{4} = \frac{k^{4}}{4!} \left(1 - \frac{1}{k^{2}} \right); a_{5} = \frac{k^{5}}{5!} \left(1 - \frac{1}{k^{4}} \right);$$

$$a_{6} = \frac{k^{6}}{6!} \left(1 - \frac{5}{k^{2}} + \frac{4}{k^{4}} \right).$$
(3.83)

Достаточно строгое решение уравнения (3.81) весьма сложно. Решение этого уравнения было сравнительно недавно получено в работе [30], где приводится весьма точное выражение переходной характеристики k-звенной линии задержки, нагруженной на «согласованное» активное сопротивление (рис. 3.20); это выражение определяется через цилиндрические функции разного рода порядка r=2k:

$$h(\tau < k) \approx 0.5 \int_{0}^{2\tau} J_r(x) dx + 0.5 J'_r(2\tau) + K J_r(2\tau);$$

$$h(\tau > k) \approx 0.5 \int_{0}^{2\tau} J_r(x) dx + 0.5 J'_r(2\tau) - K N_r(2\tau),$$

где

$$K = \frac{k^2 (3\tau + k) \dot{V}^2 |k - \tau|}{2\tau V^2 (k + \tau)^5} - \cdot$$

График переходной характеристики 10-звенной Л3 (k=10, r=20), заимствованный из работы [30], изображен на рис. 3.20 сплошной линией *.

27. Аппроксимирующая функция нулевого приближения определяется из формул (2.6) и (2.7):

$$\stackrel{\wedge}{h_{\mathbf{s}_0}} = \frac{\mathrm{e}^{-q \, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{s}_0}}}{p} \stackrel{\cdot}{\to} 1 \, (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{s}_0}) = h_{\mathbf{s}_0} \, (\boldsymbol{\tau}), \qquad (3.84)$$

где

$$\pi_{s_0} = a_1 = k = \frac{t_{s_0}}{\sqrt{|LC|}}.$$
 (3.85)

^{*} При $\tau > 10$ этот график выражает переходную характеристику ЛЗ, видимо, с некоторым приближением.

Функция h_{30} (ее график изображен на рис. 3.20) крупным пунктиром) определяет *«теоретическую задержку»* сигналов, осуществляемую линией задержки. В некоторых задачах можно ограничиться определением только этой величины. Но реальная задержка сигналов отлицается несколько от τ_{30} .

Условие существования приближения 1-го порядка в данном случае не выполняется, так как параметр λ_1 оказывается равным своему критическому значению:

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{1}{2} = \lambda_{1, \mathrm{KP}}.$$

Это означает (см. приложение 1, п. 7), что функция h_{31} 1-го приближения вырождается в функцию h_{30} нулевого приближения ($b_1 = a_1 - \tau_{30} = 0$).

Условие (2.12) реализации приближения 2-го порядка в рассматриваемом случае также не выполняется, так как

$$\lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2k^2} \right) > \lambda_{2, \kappa p} = \lambda_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Можно убедиться в том, что здесь не выполняется условие диссипативности ($b_1=0$): функция h_{32} представляет незатухающие колебания, не удовлетворяющие равенству (1.8).

Таким образом, приходится обращаться к приближению 3-го порядка, условие существования которого выполняется. Действительно, согласно формуле (П.1.18)

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{s},\mathbf{kp}} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{s}\mathbf{1},\mathbf{kp}} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}} + \frac{1}{8} - \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}}}{2} = \frac{k^{2^{*}} + 2}{24k^{2}} \qquad (3.86)$$

И

$$\lambda_{3} = \frac{a_{4}}{a_{1}^{4}} = \frac{k^{2} - 1}{24k^{2}} < \lambda_{31, \text{xp}}. \tag{3.86a}$$

Функция З-го порядка приближения

$$h_{B3} \leftarrow \hat{h}_{B3} = \frac{1}{p(1 + b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3)} e^{-q\tau_{33}}, \quad (3.87)$$

^где т_в=т_{в3} — наименьший вещественный корень уравнечия (2.33).

Это уравнение с учетом равенств (3.83) приводится к виду

$$\tau_{s}^{4} - 4k\tau_{s}^{3} + 6k^{2}\tau_{s}^{2} - 4k^{3}\left(1 + \frac{1}{2k^{2}}\right)\tau_{3} + k^{4}\left(1 - \frac{1}{k^{2}}\right) = 0.$$

Применяя подстановку

$$\tau_{33} = (1 - \delta) k,$$
 (3.88)

полученное уравнение можно свести к более простому уравнению относительно δ:

$$\delta^4 = \frac{3-2\delta}{k^2}.$$
 (3.88a)

Это уравнение легко решается графически (от k зависит только линейная функция б, стоящая в правой части). Применяя метод последовательных приближений, найдем

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{3}{k^2}} \sqrt[4]{1 - \frac{2}{3}} \sqrt[4]{\frac{3}{k^2}} \sqrt[4]{1 - \dots},$$

откуда получается асимптотическое решение:

$$\frac{1}{\widetilde{\delta}} \cong \sqrt[4]{\frac{k^2}{3} + \frac{1}{6}}, \qquad (3.89)$$

которое при k>3 определяет δ с погрешностью менее 2,5%'. Вычисленные по формуле (3.89) значения $\widetilde{\delta}$ приводятся в табл. 3.3, где указаны также более точные значения δ, вычисленные из уравнения (3.88а). Используя выражение (3.88), из равенств (2.37) на-

ходим коэффициенты b_1 , b_2 и b_3 , определяющие изобра-

Таблица 3.3

k	1	2	3	5	10	15	20
δ	1,0	0,806	0,674	0,536	0,389	0,322	0,280
δ	1,0	0,7758	0,6578	0,5281	0,3863	0,3200	0,2795
ε	0,5	0,2650	0,1952	0,1358	0,0867	0,0678	0,0572
τ ₂₃	0	0,4484	1,0268	2,3596	6,1368	10,20	14,41

жение *h*₃₃, которое после обычных преобразований приводится к виду

$$\hat{h}_{33} = \frac{e^{-q\tau_{33}}}{p\left[1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}(1+\varepsilon)\right]}, \quad (3.90)$$

где

$$s = k\delta q = k\delta p \sqrt[7]{LC}; \qquad (3.91)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2k^2 \delta^3}.\tag{3.92}$$

Значения є и τ_{33} , которые согласно формулам (3.88), (3.88а) и (3.92) зависят только от числа k звеньев ЛЗ, приводятся в табл. 3.3.

Зависимость параметров изображения (3.90) от числа k звеньев ЛЗ заключена в основном в величине нормированного оператора s и в слабой степени в величине малого параметра ϵ . Это дает возможность, получив оригинал изображения (3.90), представить коэффициенты функции h_{33} в виде степенных рядов по ϵ :

$$h_{33}(\tau) = 1 - A_0 e^{\frac{\xi_0 \tau'}{k\delta}} - e^{-\frac{\xi \tau'}{k\delta}} \left(A \sin \frac{\nu \tau'}{k\delta} + B \cos \frac{\nu \tau'}{k\delta} \right), \quad (3.93)$$

где

$$\tau' = \tau - \tau_{33}; \ \tau = \frac{t}{VLC}; \ \tau_{33} = \frac{t_{33}}{\sqrt{LC}}; \qquad (3.94)$$

$$A_0 = 0.9246 - 0.346\epsilon + 0.20\epsilon^2 - 2.0\epsilon^3 + \dots;$$

$$A = 0.8452 - 0.718\epsilon + 1.35\epsilon^2 - 2.4\epsilon^3 + \dots;$$

$$B = 0.0754 + 0.346\epsilon - 0.20\epsilon^2 + 2.0\epsilon^3 - \dots;$$

$$\xi_0 = 1.5960 - 1.000\epsilon + 1.44\epsilon^2 + 1.2\epsilon^3 + \dots;$$

$$\xi = 0.7020 - 1.000\epsilon + 0.78\epsilon^2 - 0.9\epsilon^3 + \dots;$$

$$\nu = 1.8086 - 0.72\epsilon^2 + 1.8\epsilon^3 - \dots$$

Написанные выражения являются универсальными (справедливыми при любом числе k звеньев ЛЗ). При k > 5 можно пренебречь членами порядка малости ε^2 .

k > 5 можно пренебречь членами порядка малости ϵ^2 . 28. График функции (3.93), построенный для k=10, изображен на рис. 3.20 пунктирной линией; сплошной линией здесь изображен график (заимствованный из работы [30]) переходной характеристики $h(\tau)$, построенный из более точного решения. Как видно, амплитуда наложенных колебаний и длительность их затухания близки к величинам этих параметров функции h. Однако ча. стоты колебаний функции h и h_{33} существенно различаются (примерно в k/3 раз). Тем не менее можно признать, что приближение $h_{33} \sim h$ является удовлетворительным для ряда задач. Погрешности приближения (измеренные относительно графика h), рассчитанные по формулам, приведенным в § 1, п. 12, имеют такие значения:

 $\delta_{t,\text{habd}} \cong 0,1; \ \delta_{\Phi} \cong 0,3; \ \Delta h_{\text{habd}} \cong 0,19; \ \delta_{\text{ebldp}} \cong 0,1.$

Функция h_{33} вполне удовлетворительно определяет длительность задержки $\tau_{3a\pi} = t_{3a\pi} / \sqrt{LC}$, под которой понимают момент достижения уровня h = 0.5. Относительная погрешность определения длительности задержки $\delta_{3a\pi} \simeq 0.02$.

Сравнительно небольшие погрешности аппроксимации в данном случае обусловлены малыми значениями разностей $|1-\zeta_5|$ и $(1-\zeta_6|$, которые, как это следует из § 4, в основном определяют погрешность приближения при m=3. Значения этих разностей в соответствии с формулой (4.8) определяются величинами

$$c_{5} = \tau_{33}^{2} \left(\frac{b_{3}}{2!} + \frac{b_{2}\tau_{33}}{3!} + \frac{b_{1}\tau_{33}^{2}}{4!} + \frac{\tau_{33}^{3}}{5!} \right) = 785,$$

$$c_{6} = \tau_{33}^{3} \left(\frac{b_{3}}{3!} + \frac{b_{2}\tau_{33}}{4!} + \frac{b_{1}\tau_{33}^{2}}{5!} + \frac{\tau_{33}^{3}}{6!} \right) = 1200,$$

где учтено (см. табл. 3.3), что при k = 10 запаздывание $\tau_{33} \cong 6, 14$ и

$$b_1 = k\delta = 3,86;$$
 $b_2 = \frac{k^2\delta^2}{2} = 7,45;$
 $b_3 = \frac{1+\epsilon}{31} k^3\delta^3 = 10,4.$

Находя из равенств (3.83) значения $a_5 = 833$ и $a_6 = 1320$, получим

$$|1 - \zeta_{\mathbf{s}}| = |1 - a_{\mathbf{s}}/c_{\mathbf{s}}| \approx 0.06 \ll 1;$$

$$|1 - \zeta_{\mathbf{s}}| = |1 - a_{\mathbf{s}}/c_{\mathbf{s}}| \approx 0.1 \ll 1.$$

29. На рис. 3.21 изображены графики аппроксимированных характеристик $h_{33}(\tau)$, построенные по формуле (3.93) при различных значениях k от 1 до 20. При k=1формула (3.93) является точной и $h_{33}=h$.

Графики *h*₃₃ с весьма хорошим приближением опрелеляют действительную задержку сигнала. Так, напри-



Рис. 3.21. Аппроксимация переходной характеристики k-звенной линии задержки (m=3).

мер, при k=3 находимая из графика h_{33} величина $\tau_{3ag}\cong 3,25$; более точное значение этой задержки, как показано в работе [30], $\tau_{3ag}=3,31$, откуда относительная погрешность $\delta_{3ag}=0,018$. При k=20 находимая из рис. 3.21 задержка $\tau_{3ag}\cong 20,6$ определяется с погрешностью $\delta_{3ag}=0,021$. И вообще, «временная» погрешность δ_t при любом k не превышает нескольких процентов, если $h \leq 0,5$.

Из представленных на рис. 3.21 графиков с умеренной погрешностью определяется как длительность затухания наложенных колебаний, так и наибольшая величина «выброса» этих колебаний. Даже при k=20 отно-

127

сительная погрешность $\delta_{выбр} \simeq 0,15$, а с уменьшением kэта погрешность существенно уменьшается (при k=3 $\delta_{выбр} \simeq 0,05$).

С наибольшей погрешностью из представленных на рис. 3.21 графиков определяется активная длительность фронта. Наибольшая крутизна фронта имеет место при т≅k, причем [30]

$$\left(\frac{dh}{d\tau}\right)_{\max} \cong \left(\frac{dh}{d\tau}\right)_{\tau \underline{\cong k}} \cong \frac{0.71}{\sqrt[3]{k}}.$$
 (3.95)

Если принять, что в интервале значений h от 0,1 до 0,9 переходная характеристика нарастает с наибольшей скоростью, выражаемой формулой (3.95), то тогда длительность нарастания сигнала

$$\tau_{\text{Hapact}} \simeq \frac{0.8}{(dh/d\tau)_{\text{max}}} \simeq 1.13 \sqrt[3]{k}. \qquad (3.96)$$

Нетрудно сравнить это вытекающее из более строгого теоретического анализа значение т_{нараст} с аналогичным



Рис. 3.22. Погрешность определения длительности нарастания сигнала на выходе линии задержки.

значением, находимым из представленных на рис. 3.21 графиков. По данным такого сравнения построена приведенная на рис. 3.22 зависимость относительной погрешности $\delta_{\text{нараст}} = \Delta \tau_{\text{нараст}} / \tau_{\text{нараст}} = f(k)$. Как видно, при k = 10 эта погрешность значительна: $\delta_{\text{нараст}} \cong 0,4$. Но даже при очень большом $k \simeq 100$ погрешность $\delta_{\text{нараст}} < 1$. Заметим, что погрешность δ_{ϕ} определения активной длительности фронта с учетом реальной скорости изменения $dh/d\tau$ (а не максимальной) меньше погрешности $\delta_{\text{нараст}}$. Так, например, при k = 10, как это следует из рис. 3.20, погрешность $\delta_{\phi} \simeq 0.3$ (вместо $\delta_{\text{нараст}} \simeq 0.4$). Относительно большая величина погрешности $\delta_{\text{нараст}}$

Относительно большая величина погрешности $\delta_{\text{нараст}}$ и δ_{ϕ} обусловлена малой величиной длительностей $\tau_{\text{нараст}} < < \tau_{\phi} \ll \tau_{3ag}$. Именно поэтому $\delta_{\phi} \gg \delta_t$. При оценке этого результата следует иметь в виду, что функция $h_{33}(\tau)$, аппроксимирующая решение дифференциального уравнения порядка n=2k+1, выражает первое физически реализуемое приближение, не считая приближения порядка m=0, которое вообще не определяет длительности фронта, так как $h_{30}=1$ ($\tau-\tau_{30}$) =1 ($\tau-k$). Оценка активной длительности фронта в подобных трудно анализируемых случаях даже с погрешностью в (50—100) %, несомненно, представляет практический интерес.

4. Погрешность аппроксимации

1. Как отмечалось в § 1, применение интегральных оценок погрешности аппроксимации $h_{3m} \sim h$ оказывается затруднительным (практически приходится прибегать к громоздкому численному интегрированию), а применительно к задачам импульсной техники — и нецелесообразным, так как здесь основной интерес представляет наибольшая погрешность аппроксимации в междецильной области. Правда, используя неравенство Шварца, можно по данным интегральной оценки выражаемой



Рис. 4.1. Типовые графики изменения во времени «амплитудной» погрешности аппроксимации (каждый график нормируется относительно характерной для него постоянной времени T_i).

формулой (1.11), получить представление о максимальной погрешности $|h-h_{3m}|_{max}$. Известны и некоторые другие способы оценки этой величины [18]. Однако все такие способы, во-первых, громоздки и, во-вторых, они 130 приводят к приемлемым результатам при монотонном изменении разности $h(t) - h_{3m}(t) = \Delta h(t)$, что не имеет места даже при аппроксимации монотонно изменяющегося сигнала (рис. 4.1). Кроме того, максимальное значение погрешности может относиться к моменту, лежащему вне междецильной области и не представляющему поэтому в ряде случаев практического интереса. Отметим, наконец, что более общие способы оценки погрешности аппроксимации, вытекающие из общей теории приближенных методов функционального анализа [21—24], все же настолько сложны, что их применение не оправдывается упрощением, достигаемым при приближенном анализе переходных процессов.

Ниже приводятся более простые и удобные для практических расчетов способы приближенной оценки наибольшей погрешности аппроксимации, которые, как показали многочисленные расчеты, приводят к достаточно надежным результатам: погрешность такой оценки обычно не превышает 50%, а в большинстве случаев она значительно меньше (см. § 3).

2. Вследствие трансцендентности функций h(t) и $h_{3m}(t)$ нельзя выразить в свернутой форме обратные им функции, что почти исключает возможность строгого анализа «временной» погрешности $\Delta t(h)$ (в смысле, указанном в § 1, п. 2, рис. 1.1). Поэтому обратимся раньше к рассмотрению «амплитудной» погрешности

$$\Delta h = \Delta h(t) = h(t) - h_{3m}(t). \tag{4.1}$$

Из методических соображений рассмотрим раньше функции, определяемые соотношениями (1.1) и (1.4) или (1.6), и представим изображение «амплитудной» погрешности в виде

$$\Delta \hat{h} = \Delta \hat{h}(p) = \frac{1}{pA_n(p)} - \frac{1}{pB_m(p)} e^{-pt_{3m}}, \qquad (4.2)$$

где

$$A_n(p) = 1 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n;$$
 (4.3)

$$B_m(p) = 1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m \quad (m < n); \quad (4.4)$$

параметры t_{3m} и b_j находятся из уравнения (1.26) и ϕ ормул (1.27).

Учитывая тождественность форм (1.4) и (1.6), запи. шем:

$${}^{\mathbf{A}}_{3m} = \frac{1}{pB_m(p)} e^{-pt_{3m}} = \frac{1}{pC_{\infty}(p)}, \qquad (4.5)$$

где бесконечный степенной ряд

$$C_{\infty}(p) = 1 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \dots; \qquad (4.6)$$

коэффициенты c_i выражаются равенствами (1.7).

В соответствии с принятой методикой анализа при приближении порядка *т* должны выполняться равенства

$$c_1 = a_1; \ c_2 = a_2; \ \dots \ c_{m+1} = a_{m+1}.$$
 (4.7)

Что же касается коэффициентов c_i при i=m+k+1 (k=1, 2, ...), то согласно равенствам (1.7) можно записать

$$\frac{c_{m+1+k}}{t_{3m}^{k+1}} = \frac{b_m}{(k+1)!} + \frac{b_{m-1}t_{3m}}{(k+2)!} + \dots + \frac{t_{3m}^{m}}{(k+m+1)!}.$$
 (4.8)

Учитывая равенство (4.5), представим выражение (4.2) в виде

$$\Delta h^{\wedge} = \frac{(c_1 - a_1) p + (c_2 - a_2) p^2 + (c_3 - a_3) p^3 + \dots}{pA_n (p) C_{\infty} (p)}$$
(4.9)

Однако в силу равенства (4.7) первые m+1 членов в числителе этой дроби равны нулю (именно поэтому и уменьшается погрешность аппроксимации с повышением порядка m приближения *). Имея это в виду, на основании равенства (4.5) запишем

$$\Delta h^{\wedge} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{m+1+k} \frac{p^{m+1+k}}{pA_n(p) B_m(p)} e^{-pt_{3m}}, \qquad (4.10)$$

где

$$C_{m+1+k} = c_{m+1+k} - a_{m+1+k} \quad (k = 1, 2, ...), \quad (4.1)$$

причем при i=m+1+k>n коэффициенты $a_i=0$ и $C_i=c_i$

^{*} Это станет еще более ясным, если учесть, что, во-первых, значимость членов суммы (4.9) уменьшается с повышением их номера и что, во-вторых, со сравнительно небольшой погрешностью (тем меньшей, чем выше степень приближения) можно в формуле (4.9) заменить произведение $A_n(p)C_{\infty}(p)$ на $[A_n(p)]^2$ (последнее выражение от *m* не зависит).

Таким образом, при $t > t_{3m}$ «амплигудная» погрешность выражается суммой производных порядка m+1++k от функции $\phi(t-t_{3m})$, где $\phi(t)$ — свертка, изображение которой

$$\hat{\phi}(p) = \frac{1}{pA_n(p)B_m(p)} = \frac{1}{p(1+l_1p'_1+\ldots+l_pp')}$$
(4.12)

определяется полиномом степени v = n + m, причем коэффициенты

$$l_1 = a_1 + b_1; \ l_2 = a_2 + a_1 b_1 + b_2; \dots l_n = a_n b_m.$$
 (4.13)

3. При аппроксимации апериодических сигналов (m = 1), а также в некоторых других случаях значение функции $\Delta h(t)$ в момент $t = t_{3m}$ или в близкой окрестности этого момента либо выражает наибольшую погрешность аппроксимации, либо же дает представление об этой величине. Значение оригинала изображения -(4.10) в окрестности $t = t_{3m}$ ($t > t_{3m}$) можно найти из асимптотического разложения:

$$\Delta h = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{m+1+k}}{(\nu+s)!} \, \phi^{(\nu+s)} \left(0\right) \frac{d^{m+1+k} \left(t-t_{3m}\right)^{\nu+s}}{dt^{m+1+k}}, \, (4.14)$$

где v=n+m и начальные значения производных находятся непосредственно из изображения (4.12).

В точке $t = t_{3m}$ формула (4.14) существенно упрощается:

$$\Delta h(t_{3m}) = \Delta h(t_{3m} + 0) = \sum_{s=v}^{\infty} c_s \phi^{(s)}(0); \qquad (4.15)$$

здесь принято во внимание, что начальные значения v-1 первых производных функции $\phi(t)$, а также коэффициенты a_s при s > n равны нулю.

4. Выражения (4.14) и (4.15) были использованы для определения погрешности при низких уровнях $h \ll h_{max}$. Но не всегда погрешность в окрестности $t = t_{am}$ является определяющей. Непосредственное же использование более общей формулы (4.10) сопряжено с большими трудностями.

Формула (4.10) существенно упрощается при использовании способа приближения, аналогичного применяемому для нахождения аппроксимирующей функции $h_{3m} \sim h$. При этом для расширения временной области, в которой существует оценка погрешности аппроксимации, и для отображения особенностей сравнительно слож. ной функции $\Delta h(t)$ (рис. 4.1) необходимо при определении приближенной (порядка m) функции $\Delta h_{3m} \sim \Delta h$ воспользоваться приближением порядка $\tilde{m} > m$, где $m - n_0$ рядок приближения основной аппроксимирующей функции $h_{3m} \sim h$. Как показали расчеты, в большинстве случаев удовлетворительный результат приближения достигается при $\tilde{m} = m + 1$.

В соответствии с выражением (4.10) изображение аппроксимирующей функции $\Delta h_{\widetilde{m}}$ порядка \widetilde{m} имеет вид

$$\Delta h_{\mathfrak{M}}^{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{m+1+k} p^{m+1+k} e^{-p (t_{\mathfrak{M}} + \widetilde{t}_{\mathfrak{M}})}}{p (1 + \widetilde{b}_{1} p + \widetilde{b}_{2} p^{2} + \ldots + \widetilde{b}_{m} p^{\widetilde{m}})}.$$
(4.16)

Здесь коэффициент C_{m+1+h} выражается формулой (4.11); t_{3m} — запаздывание аппроксимирующей функции h_{3m} , а запаздывание $\tilde{t}_{3\tilde{m}}$ и параметры \tilde{b}_j ($j=1, 2, ..., \tilde{m}$) находятся из уравнения (1.26) и формул (1.27) при замене в них m на \tilde{m} , a_i на l_i , где l_i — коэффициенты, определяемые равенствами (4.13).

Формула (4.16) дает возможность достаточно точно оценить наибольшую «амплитудную» погрешность аппроксимации в случае, если это значение относится к моменту $t > t_{3m} + \tilde{t}_{3m}$.

5. Все приведенные выше формулы относились к «амплитудной» погрешности аппроксимации. Представляющую для задач импульсной техники основной интерес «временную» погрешность Δt можно связать с «амплитудной» погрешностью Δh соотношением

$$\Delta h = \frac{dh_{3m}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 h_{3m}}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots$$
(4.17)

Используя это соотношение, при известной зависимости $\Delta h(t)$ можно установить зависимость $\Delta t = \Delta t(t)$, после чего определяются наибольшие «временные» погрешности $|\Delta t/t|_{\text{наиб}}$ или $|\Delta t|_{\text{наиб}}$. Однако столь громоздкий анализ удается практически провести лишь при уме-134 ренной величине $|\Delta t|_{\text{намб}}$, когда можно ограничиться одним или в крайнем случае двумя членами ряда (4.17).

6. Использование для практических расчетов даже упрощенных формул (4.15) и (4.16), а тем более ряда (4.17) является совершенно неприемлемым. Но весьма громоздкий анализ этих выражений, который все же удалось провести средствами вычислительной техники, а также непосредственные контрольные расчеты самих функций h(t) и $h_{3m}(t)$, проведенные над обширным семейством функций h(t), описываемых дифференциальными уравнениями до 5-го порядка включительно, позволили установить ряд закономерностей поведения на ибольших значений «амплитудной» и «временной» погрешностей аппроксимации при m=1 и 2. В частности, было установлено:

а) Наибольшие значения «амплитудной» и «временной» погрешностей аппроксимации (в междецильном интервале) определяются в основном первыми двумя членами и лишь в редких случаях (при $i_{sm}^m > b_m$) также и третьим членом суммы (4.16); при этом часто преобладающая роль принадлежит первому члену суммы.

б) Хотя для заданной функции h(t) моменты времени (в междецильном интервале), в которые «амплитудная» и «временная» погрешности аппроскимации (при заданном порядке m=1 или 2) достигают наибольших значений, и не совпадают, тем не менее качественный характер зависимостей наибольших значений этих погрешностей от параметров полинома (4.3), определяющего изображение аппроксимируемого сигнала, оказывается в некоторых своих чертах (см. ниже) идентичным, по крайней мере с точностью до погрешности расчета.

в) Если при заданном m и любых фиксированных значениях коэффициентов a_i ($i \leq m+1$) полинома (4.3) осуществляется вариация коэффициента a_{m+2} от 0 до значения (a_{m+2})_{кр}, определяемого условием диссипативности (см. §1, п. 1), то минимум наибольших значений как «амплитудной», так и «временной» погрешности аппроксимации достигается при $a_{m+2} = c_{m+2}$, если только это значение $a_{m+2} < (a_{m+2})_{\rm кр}$. Такое же положение справедливо и в отношении коэффициента a_{m+3} . В частности, если при $a_{m+2} = c_{m+2}$ изменяется величина a_{m+3} , то более низкий минимум рассматриваемых погрешностей полу-



чается при $a_{m+3} = c_{m+3}$, если $(a_{m+3})_{\rm KP} > c_{m+3}$. Вариация коэффициентов a_i при i > m+3 обычно мало ощутима (из-за погрешностей расчета), но отмеченная выше тенденция проявляется и в этом случае.

Для иллюстрации отмеченного выше свойства на рис. 4.2, а представлено несколько кривых семейства функций h(t), изображения которых

$$\hat{h} = \frac{1}{pA_n(p)} = \frac{1}{p(1+1,2p+2,2p^2+2p^3+a_4p^4)}$$

отличаются только величиной a_4 . Согласно формулам (2.19) и (2.20) при m=2 все такие функции аппроксимируются одной и той же функцией $h_{32} \sim h$, где

$$h_{32} = h_{32}(t) \stackrel{\wedge}{\leftarrow} \stackrel{h_{32}}{=} \frac{e^{-1.16p}}{p(1+0.043p+1.48p^2)}$$

В данном случае находимая из формулы (4.8) величина $c_4 = 1,05$, и непосредственно из рис. 4.2, *а* видно, что при наиболее близкой к этому значению c_4 величине $a_4 = 0,888 = 0,85c_4$ достигается наилучшее приближение $h_{32} \sim h$. Дальнейшее увеличение a_4 в данном конкретном случае невозможно, так как согласно формуле (1.1в) $a_{4,\mathrm{Kp}} = 0,888 < c_4$. Но возможно и другое соотношение, иллюстрируемое представленным на рис. 4,2,6 семейством функций h(t), изображения которых

$$\hat{h} = \frac{1}{pA_4(p)} = \frac{1}{p(1+1,4p+2,24p^2+1,4p^3+a_4p^4)} \cdot$$

Здесь при *m* = 2 в с е функции аппроксимируются функцией

$$h_{32} \stackrel{\wedge}{\leftarrow} \stackrel{\wedge}{h_{32}} = \frac{\mathrm{e}^{-0.78p}}{p\left(1+0.62p+1.45p^2\right)} \cdots$$

В этом случае $c_4 = 0,506 < a_{4,\mathrm{KP}} = 1,24$, и, как видно из рис. 4.2,6, наилучшее приближение получается при $a_4 \cong \simeq 0,5 = 0,99c_4$ (более точно, минимум наибольшего значения «амплитудной» погрешности получается при $a_4 = = 0,95c_4$, а минимум «временной» погрешности — при $a_4 = 1,05c_4$).

По данным обработки 15 кривых рассматриваемых двух семейств функций построены представленные на рис. 4.3 графики зависимостей $\delta_{i, \text{навб}} = \psi(\zeta_i)$, где $\zeta_i =$

 $=a_4/c_4$ и $\delta_{t,\text{наи6}}$ — наибольшее относительное значение «временной» погрешности аппроксимации, выражаемой формулой (1.31). Графики имеют вид *U*-образных кривых. Первый график соответствует представленному на рис. 4,2,*a* семейству. Поскольку здесь $a_{4,\text{кр}}=0,85c_4$, этот график обрывается при $\zeta_4=0,85$. Второй график относится к представленному на рис. 4.2,*b* семейству, для которого $a_{4,\text{кр}}=2,45c_4$. Здесь, после достижения миниму-



Рис. 4.3. Зависимость наибольшей «временной» погрешности аппроксимации (m=2) от параметра $\zeta_4 = a_4/c_4$.

ма при $\zeta_4 = 1,05$, в области $\zeta_4 > 1,75$ происходит быстрое возрастание погрешности до ∞ . Это обусловлено принятым «жестким» критерием оценки «временной» погрешности аппроксимации (см. § 1, п. 12).

Подобные же зависимости получаются и при m=1 (см. рис. 1.8).

7. Произведенный анализ позволил в соответствии с изложенным в п. 6 сделать тот вывод, что ценой некоторого ограничения аппроксимируемых функций можно 138

получить удобные для практического применения верхние границы возможных наибольших погрешностей аппроксимации. Это ограничение касается величин коэффициентов a_i полинома (4.3): начиная с некоторого номера i > u величины a_i должны удовлетворять соотношению

$$a_i \leqslant c_i \quad (i > u). \tag{4.18}$$

При выполнении соотношения (4.18) можно гарантировать, что наибольшая в междецильном интервале погрешность аппроксимации при фиксированных значениях коэффициентов a_1, \ldots, a_u , где u > m, получается, если все остальные коэффициенты $(a_{u+1}, a_{u+2}, \ldots)$ равны нулю. Иначе говоря, если при заданном порядке приближения m < u и фиксированных значениях коэффициентов полинома $A_u(p)$, определяющего «опорное» изображение

$$\hat{h}_u = \frac{1}{pA_u(p)} = \frac{1}{p(1+a_1p+\ldots+a_up^u)},$$
 (4.19)

добавить к полиному $A_u(p)$ члены более высоких степеней, удовлетворяющих соотношению (4.18), то это не только не вызовет увеличения наибольшей погрешности аппроксимации, но, наоборот, приведет к уменьшению таковой погрешности, наиболее значительному при выполнении равенств $a_{u+1} = c_{u+1}, a_{u+2} = c_{u+2}, \ldots$

Это положение можно уяснить из рассмотрения выражения (4.10) или (4.16). Погрешность аппроксимации определяется суммой членов, величины которых пропорциональны коэффициентам $C_{m+1+k} = c_{m+1+k} - a_{m+1+k}$ (k ==1, 2, ...). Если при i > u все коэффициенты $a_i = 0$, то величины коэффициентов C_{m+1+k} при условии выполнения соотношения (4.18) окажутся максимально возможными, и погрешность аппроксимации будет велика (здесь существенно дополнительное обстоятельство, поясняемое ниже в п. 14).

Вводимое соотношением (4.18) ограничение не является сильным. Во-первых, при u>3 ограничение величины a_i из условия диссипативности оказывается либо более сильным, либо близким к ограничению (4.18). Во-вторых, выведенное из приближенного анализа ограничение (4.18) содержит некоторый «запас». Как показали результаты конкретных расчетов приближения $h_{3m} \sim h$ (при m=1 и 2), соотношение (4.18) может быть расширено до соотношения $a_i \leq 2c_i$ при том, однако, условии, что выполняется неравенство $a_i < 0.7 a_{i, \text{кр}}$ (это дополнительное ограничение существенно только для «временной» погрешности аппроксимации при действии упомянутого выше «жесткого» критерия оценки погрешности). Наконец, при аппроксимации сигнала h(t), имеющего «сложное» изображение

вида (1.42), приводимого к виду $h = [pA_{\infty}(p)]^{-1}$, где коэффициенты a_4 и (или) a_5 бесконечного степенного ряда $A_{\infty}(p)$ отрицательны, ограничение (4.18) вообще является несущественным [в этом случае условие диссипативности относится только к полиному $A'_n(p)$ в знаменателе исходного изображения (1.42)]. Иллюстрация этих положений приводится в § 3, Е.

В соответствии с изложенным выше имеется возможность путем проведения ограниченного цикла расчетов погрешностей аппроксимации сигналов, определяемых «опорным» изображением (4.19), установить верхние границы наибольших значений погрешности аппроксимации, которые могут иметь место при приближении $h_{3m} \sim h$, где h = h(t) — любая функция, имею-

щая изображение $h=[p(A_n(p)]^{-1}$. Объем необходимых расчетов существенно зависит от степени *и* полинома $A_u(p)$ «опорного» изображения (4.19). Имея это в виду и учитывая, что наибольший практический интерес представляют приближения порядков m=1 и m=2, при постановке указанного цикла расчетов было принято u=3. В этом случае всевозможные соотношения параметров полинома $A_u(p) = A_3(p)$ учитываются всего двумя безразмерными параметрами *: $\lambda_1 = a_2/a_1^2$, $\lambda_2 = a_3/a_1^3$.

8. При приближении порядка m=1 более выразительный характер верхних границ погрешностей аппроксимации получается, если в качестве параметров таких границ выбрать

^{*} Переходный процесс h(t) как функция времени t характеризуется n параметрами a_i , размерность каждого из которых равна размерности t^i . При нормировке времени относительно $\Theta = a_1$ $(\tau - t/a_1)$ и введении в соответствии с этим оператора $q = pa_1$ (см. § 2, п. 11) изображение $1/[pA_n(p)]$ приводится к виду $1/[pN_n(q)]$, где $N_n(q) = 1 + q + \lambda_1 q^2 + \lambda_2 q^3 + \ldots + \lambda_{n-1} q^n$.

$$\xi_{3} = \frac{\dot{a}_{3}}{c_{3}}; \quad \xi_{1} = \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{1, \text{Kp}}} = 2\lambda_{1} = 2\frac{\dot{a}_{2}}{a_{1}^{2}}.$$
 (4.20)

По данным цикла конкретных расчетов погрешностей аппроксимации при приближении $h_{31} \sim h$ (всего было обработано около 60 пар функций), охватывающих всевозможные соотношения указанных параметров ($0 \leq \xi_1 \leq 1$; $0 \leq \zeta_3 \leq 5$), было построено приведенное в §1 семейство $\delta_{tr} = \Phi_{t1}(\zeta_3, \xi_1)$ (рис. 1.8), представляющее верхние границы наибольшей «временной» погрешности аппроксимации, выражаемой формулой (1.31).

Кривые семейства $\Phi_{t1}(\zeta_3, \xi_1)$ имеют вид асимметричных U-образных кривых. Каждая кривая проходит через минимум в окрестности $\zeta_3 = 1$ (положение минимумов отмечено пунктирной линией).

При $\zeta_3 \longrightarrow 0$ [в этом случае кубический полином $A_3(p)$ переходит в квадратный полином $A_2(p)$] погрешность δ_{tr} стремится к конечному пределу, если $\xi_1 < 1$, и к ∞ при $\zeta_1 \longrightarrow 1$, так как в последнем случае постоянная времени аппроксимирующей функции $b_1 \longrightarrow 0$. Именно этим (и возрастанием t_{31}) обусловлено увеличение δ_{tr} с уменьшением ζ_3 в области $\zeta_3 < 1$. Поэтому наибольшее значение «временной» погрешности здесь получается на нижне й границе междецильного интервала (при $h=0,1h_{max}$). Чем ближе величина ξ_1 к 1, тем быстрее и интенсивнее проявляется отмеченное обстоятельство и тем выше граничное значение δ_{tsr} , соответствующее $\zeta_3 = 0$.

У нижнего сгиба кривых наибольшая «временная» погрешность получается в средней части междецильного интервала, но, чем больше ξ_1 , тем, начиная с меньших значений ζ_3 , она начинает определяться погрешностью на верхней границе междецильного интервала (при $h=0.9h_{max}$): при $\xi_1 \ge 0.9$ это происходит почти сразу после прохождения через минимум; в области $0.9 > \xi_1 > 0.6$ — начиная с точки, расположенной в интервале $1 < \zeta_3 < 2$ и т. д. После этого крутизна $d\Phi_{t1}/d\zeta_3$ возрастает более интенсивно, стремясь к ∞ при некотором критическом значении $\zeta_3 = \zeta_{2\infty}$. Это значение при $\xi_1 < 0.5$ велико и не имеет практического значения; при $\xi_1 = 0.5$ параметр $\zeta_{3\infty} \cong 3.7$; при $\xi_1 = 0.6$ параметр $\zeta_{3\infty} \cong 2.8$; значение $\zeta_{3\infty}$ при $\xi_1 \ge 0.7$ отчетливо просматривается на рис. 1.8. Эта особенность кривых семейства обусловлена

принятым «жестким» критерием оценки «временной» погрешности, указанным в § 1, п. 12.

9. При обработке данных приближения $h_{\rm al} \sim h$ попутно с расчетом «временной» погрешности производился расчет погрешности определения междецильного времени, выражемого формулой (1.30). По данным этого расчета было построено семейство кривых $\delta_{\Phi r} = \Phi_{\Phi 1}(\zeta_3, \xi_1),$ изображенных на рис. 1.9, которое также представляет границы погрешностей аппроксимации верхние в указанном выше смысле. Однако здесь не наблюдалась вполне устойчивая закономерность поведения величин бот: отдельные точки выпадали из кривых семейства. Это объясняется зависимостью погрешности бор от «временных» погрешностей $\Delta t_{0,1}$ и $\Delta t_{0,9}$ приближения $h_{31} \sim h$, получающихся на двух крайних краницах междецильного интервала (при $h=0,1h_{\rm max}$ и $0,9h_{\rm max}$). Закономерности же поведения таких погрешностей резко различны.

10. При переходе от приближения порядка $m = k \ k + 1$ (если они реализуются) происходит, в общем случае, скачкообразное уменьшение погрешности атпроксимации. Но если ввести понятие о дробном порядке приближения

$$M = m + \zeta_{m+2} = m + \frac{a_{m+2}}{c_{m+2}} \quad (\zeta_{m+2} \leq 1), \tag{4.21}$$

то погрешность аппроксимации можно рассматривать как непрерывную функцию *M*. Не останавливаясь здесь на теоретическом рассмотрении вопроса, отметим некоторые моменты такого представления.

Пусть изображение $h=1/pA_3(p)$. Зафиксируем коэффициенты a_1 и a_2 кубического полинома $A_3(p)$, причем пусть $\lambda_1 < 0,5$. В этом случае приближение 1-го порядка реализуется, и при $a_3=0$ (см. рис. 1.8), котда $\zeta_3=0$, «временная» погрешность $\delta_{t, \text{ нав6}}=\delta_{tr}=$ $=\Phi_{t1}(0; 2\lambda_1)$, т. е. равна наибольшему значению на левой границе плоскости $\Phi_{t1}(\zeta_3, \xi_1)$. В соответствии с равенством (4.21) следует полагать, что эта погрешность относится к приближению порядка M=1. Пусть теперь при том же значении λ_1 коэффициент a_3 и, следовательно, параметр ξ_3 возрастают. Как видно из рис. 1,8 с ростом $\zeta_3(\zeta_3 \leq 1)$ погрешность δ_{tr} уменьшается, и при $\zeta_{s}=1$ она близка к минимуму. Согласно равенству (4.21) эта погрешность должна относиться к приближению порядка M=2 (хотя m=1). Покажем, что при $\zeta_3=1$ функция h_{31} действительно совпадает с функцией h_{32} 2-го порядка приближения. Для этого, учитывая соответствующие m=1 выражения (2.8) и (2.9), найдем из формулы (4.8) величину $c_3=a_3$. После обычных преобразований получим

$$\lambda_{2} = \frac{c_{3}}{a_{1}^{3}} = \lambda_{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - 2\lambda_{1})^{3}} = \lambda_{22, \text{ kp}}.$$

Следовательно, при $\zeta_3 = 1$ параметр λ_2 достигает критического значения, выражаемого формулой (П.1.14), при котором приближение 2-го порядка вырождается в приближение 1-го порядка, и $h_{32}=h_{31}$. Но при этом погрешность анпроксимации (m=1) оказывается почти минимально возможной при заданном значении $\xi_1=2\lambda_1$ и равной $\Phi_{t1}(1, \xi_1) \cong (\delta_{tr})$ min. Это обусловлено тем, что в данном случае кроме равенств $a_1=c_1$ и $a_2=c_2$, обязательных для приближения 1-го порядка, выполняется также равенство $a_3=c_3$, необходимое для приближения 2-го порядка, но не обязательное для m=1*.

Пусть теперь при тех же значениях a_1 и a_2 и значении a_3 , при котором $\lambda_2 = \lambda_{22, \text{ кр}}$, осуществляется приближение 2-го порядка. Пусть при этом к полиному $A_3(p)$ добавляется член a_4p^4 , причем величина a_4 постепенно повышается до значения $c_{m+2}=c_4$, где c_4 также выражается формулой (4.8), но уже при m=2. В согласии с формулой (4.21) можно полагать, что получаемая при этом погрешность аппроксимации относится к приближению порядка M= $=2+\zeta_4$, который при $\zeta_4=a_4/c_4=1$ достигает значения M=3. Можно убедиться, что при этом погрешность атпроксимации монотонно уменьшается (см. рис. 4.3) до достижения при $\zeta_4=1$ значения, близкого к минимально возможному, причем в этом случае параметр λ_3 в точности равен значению $\lambda_{33, \text{ кр}}$, выражаемому формулой (П.1.23), при котором $h_{33}=h_{32}$.

Эти положения справедливы при любых реализуемых порядках приближения.

11. По данным общирного цикла конкретных расчетов (было обработано 72 пары кривых) «временной» погрешности аппроксимации при приближении 2-го порядка $h_{32} \sim h$, тде $\hat{h} = 1/[pA_3(p)]$, было построено приведенное на рис. 1.10 семейство кривых $\delta_{tr} = \Phi_{t2}(\lambda_1, \xi_2)$; здесь $\xi_2 = \lambda_2/\lambda_2$ кр, и так как m=2, а n=3, то $\zeta_3 = 1$, а $\zeta_4 = 0$. Кривые семейства выражают (в указанном в п. 7 смысле) верхние границы наибольших значений «временной» погрешности $\delta_{t, \text{ наяб}}$ при m=2.

Согласно изложенному в п. 10 при $\xi_2 = 1$ и $\lambda_1 \leq 0,5$ приближение 2-го порядка вырождается в приближение 1-го порядка, чему соответствует крайняя слева кривая семейства на рис. 1.10. При этом, если $\lambda_1 = \lambda_{1, \text{ кр}} = 0,5$, то $\delta_{tr} = \infty$. Но с уменьшением λ_1 погрешность δ_{tr} быстро уменьшается, причем в любой точке граничной кривой погрешность $\Phi_{t2}(\lambda_1, 1) = \Phi_{t1}(1, \xi_1)$ при $\xi_1 = 2\lambda_1$, т. е. она

^{*} Если при указанных значениях a_1 и a_2 осуществляется приближение 2-го порядка, то при $\lambda_2 = \lambda_{22, \text{кр}}$ погрешность аппроксимации равна наибольшему граничному значению (см. рис. 1.10); для понижения этой погрешности следует у меньшать a_3 (при $a_3=0$, когда $\lambda_2=0$ и $\xi_2=0$, погрешность вообще отсутствует, ибо в этом случае полином степени n=3 вырождается в полином степени n=m=2).

почти равна минимальному значению (δ_{tr})_{min} cooтветствующей кривой семейства, приведенного на рис. 1.8; причина такого совпадения пояснялась в п. 10.

Малые значения погрешности δ_{tr} в области $\xi_2 \leq 1$ и $\lambda_1 < 0,5$ объясняются тем, что здесь приближение порядка m = 2 представляет в торое физически реализуемое приближение (приближение порядка m = 0 во внимание не принимается). В области же $\lambda_1 > 0,5$ приближение 1-го порядка не реализуется. Здесь граничная кривая, соответствующая $\xi_2 = 1$, относится к приближению $h_{32} \sim h$, при котором $t_{32} = a_1$, $b_1 = a_1 - t_{32} = 0$, и функция $h_{32}(t)$ перестает удовлетворять условию диссипативности (см. приложение 1, п. 7, рис. П. 1.2,6).

Наличие максимумов у кривых рассматриваемого семейства объясняется взаимодействием двух факторов. С одной стороны, при $\lambda_1 \rightarrow 0$ погрешность аппроксимации при приближении 1-го и, подавно, 2-го порядка стремится к нулю. С другой стороны, при достаточно больших значениях λ_1 и $\xi_2 = \text{const}$ с увеличением λ_1 уменьшается роль кубичного члена a_3p^3 полинома $A_3(p)$, определяющего изображение \hat{h} . Это станет более ясным, если произвести нормировку времени относительно постоянной $\Theta = a_1 (\tau = t/a_1, q = pa_1)$. Тогда, полагая $\xi_2 =$ = const и принимая во внимание выражение (2.13), можно записать $\hat{h} = [pN_3(q)]^{-1}$, где

$$N_{\mathfrak{s}}(q) = 1 + q + \lambda_1 q^2 + \xi_2 \left(1 - \frac{1}{3\lambda_1}\right) q^3.$$

Отсюда видно, что при $\lambda_1 \longrightarrow \infty$ полином $N_3(q)$ вырождается в квадратный полином $N_2(q)$, и, следовательно, $h_{32} \longrightarrow h$.

При малых значениях $\xi_2 \leq 0,3$ максимум кривых семейства выражен слабо. По мере приближения ξ_2 к 1 этот максимум растет до ∞ , причем он постепенно сдвигается к точке $\lambda_1 = 0,5$.

12. Представленные на рис. 1.8 и 1.10 семейства кривых выражают погрешности аппроксимации $\delta_{t, \text{ нанб}} = \delta_{tr}$ (при m=1 и m=2), если степень полинома $A_n(p)$, определяющего изображение \hat{h} , $n \leq 3$. При n > 3 и указанном в п. 7 ограничении величин коэффициентов a_i (i > 3) погрешность аппроксимации уменьшается. Пред-144
ставляет интерес получить оценку отношения $\delta_{t, \text{ цанб}}/\delta_{tr}$, удобную для практических расчетов.

Как показал анализ выражений (4.9), (4.10), (4.16) и (4.17), при m=1 и m=2 наибольшая величина погрешности аппроксимации в основном определяется максимумом суммы *

$$\sum_{k=m+2}^{\infty} (1-\zeta_k) R_k(t) \sin(\omega_m t - \varphi_{mk}), \qquad (*)$$

где $\zeta_k = a_k/c_k$ и амплитуды $R_k = R_k(t)$ колебаний постепенно затухают со временем. Поэтому наибольшая погрешность аппроксимации равна геометрической сумме затухающих векторов $(1 - \zeta_k) R_k e^{-J\varphi_{mk}}$.

В такой сумме преобладающее значение имеют первые два вектора (k = |m+|2 и m+3), сдвинутые между собой на угол $\Delta \varphi$, который из-за затухания величин $R_k(t)$ несколько превышает $\pi/2^{**}$. Ориентировка остальных векторов ($k \ge m+4$) зависит от многих факторов и в этом смысле является «случайной», но влияние этих векторов, ввиду их малости, на погрешность аппроксимации обычно не велико (с точностью до погрешности приближения порядка m+4). Это позволяет представить с некоторым приближением искомое соотношение в виде

$$\frac{\delta_{t,\text{Hah6}}^2}{\delta_{tr}^2} \cong \sum_{k=m+2}^{\infty} (1-\zeta_k)^2 \frac{R_k^2}{\delta_{tr}^2} = \sum_{k=m+2}^{\infty} \Psi_k^2 (1-\zeta_k)^2. \quad (4.22)$$

Величина $\Psi_k = R_k/\delta_{tr}$ зависит, в первую очередь, от порядка приближения m и номера k и затем от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ изображения \hat{h} . Как показали конкретные расчеты погрешностей приближения $h_{am} \sim h$ $(m=1 \ u \ 2)$, при заданном k зависимость $\Psi_k =$ $= \Psi_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ не сильна (рассматривались полиномы $A_n(p)$ степени $n \leq 5$). Это объясняется тем, что при заданных m и k в зависимости $R_k = R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ превалирующее значение (при выполнении указанного

-10-2247

^{*} Приближенные выражения «амплитудной» и «временной» погрешности аппроксимации получаются в структурном отношении Одинаковыми.

^{**} С точностью до множителя $(1-\zeta_k)R_k(t)$ каждый последующий член суммы (*) равен производной от предыдущего члена этой суммы.

в п. 7 ограничения величин a_i при $i \ge 4$) имеют параметры λ_1 и λ_2 , которые полностью определяют величину δ_{tr} . Поэтому величина отношения $R_k/\delta_{tr} = \Psi_k$ определяется в основном значениями *m* и *k*.

13. По данным значительного количества конкретных расчетов приближения $h_{3m} \sim h$ были найдены приведенные в табл. 4.1 средние значения величин $\Psi_{\mathbf{x}}$ при m=1 и m=2, причем было установлено, что отклонения действительных значений $\Psi_{\mathbf{k}}^2$ от средних не превы-

Таблица 4.1

т	Ψ _4^2	Ψ ² 5	Ψ^2_{Σ}	$\Sigma \Psi_{k}^{2}$
1	0,70	0,18	0,12	1,00
2	0,95	0,04	0,01	1,00

Средние значения коэффициентов Ψ_i^2

шают ~20%. Это обстоятельство с учетом очевидного равенства $\Sigma \Psi_{\mathbf{k}} = 1$ позволяет выразить искомое, удобное для практических расчетов, соотношение в виде полуэмпирической формулы

$$\frac{\delta_{t,\text{Hall }6}}{\delta_{t_{r}}} \cong \sqrt{\Psi_{4}^{2} (1-\zeta_{4})^{2} + \Psi_{5}^{2} (1-\zeta_{5})^{2} + \Psi_{\Sigma}^{2}}, \quad (4.23)$$

где величина $\Psi_{\rm E}^2$ учитывает приближенно влияние всех членов суммы (4.22) с номерами $k \ge 6$ (с точностью до погрешности приближения порядка m+4, где m — порядок приближения $h_{3m} \sim h$).

Простая формула (4.23) позволяет с помощью представленных на рис. 1.8 и 1.10 графиков оценить величину $\delta_{t, \text{ намб}}$ с погрешностью, не превышающей ~ 30% при условии выполнения соотношения (4.18). Даже если с учетом высказанных в п. 7 соображений расширить соотношение (4.18) и принять $a_i \leq 2c_i$ (при условии, что $a_i \leq 0.7a_{i, \text{ кр}}$), то, как показали расчеты (см. § 3), лишь в редких случаях применение формулы (4.23) приводит к существенному повышению погрешности до ~ 50%.

14. В некоторых случаях изображение аппроксимируемой функции приводится к виду $h = [pA_{\infty}(p)]^{-1}$, где 146 $A_{\infty}(p)$ — бесконечный степенной полином, некоторые коэффициенты a_i которого отрицательны (см. § 1, пп. 20—21). Из общих формул (4.10), (4.11), (4.16) и (4.17) вытекает, что в этом случае погрешность аппроксимации должна возрастать. Отсюда можно прийти к выводу, что если отрицательные значения а; получаются при i>3, то приведенные на рис. 1.8—1.10 семейства кривых представляют верхние границы соответствующих погрешностей аппроксимации. Это было подтверждено конкретными расчетами погрешностей приближений $h_{3m} \sim h$, которые также позволили заключить о применимости в рассматриваемом случае формулы (4.23). При этом лишь следует учесть знак параметров ζ4 и ζ5. Значения a_i<0 при i ≥ 6, вообще говоря, также обусловливают повышение погрешности аппроксимации, но значимость этих факторов мала, и согласно данным расчета в рассматриваемом случае средние значения коэффициентов $\Psi_{\mathbf{k}}^2$ достаточно близки к приведенным в табл. 4.1. При этом выражаемые соотношением (4.18) ограничения оказываются малосущественными и, приближенно, могут быть сняты.

Из практических соображений, с целью унификации методики оценки погрешности аппроксимации, можно и в рассматриваемом случае сохранить формулу (4.23) с приведенными в табл. 4.1 значениями коэффициентов. Это согласно контрольным расчетам не приводит к существенному повышению погрешности оценки величины $\delta_{t, \text{ наж6}}$: погрешность оценки этой величины не превышает $\sim 50\%$, а в большинстве случаев она значительно меньше (см. § 3, пп. 20—22). Лишь в случаях, когда при $a_4 < 0$ и (или) $a_5 < 0$ абсолютные значения $|a_4| \gg c_4$ и (или) $|a_5| \gg c_5$, погрешность оценки погрешности аппроксимации может возрасти до $\sim 50-100\%$. Но такие случаи встречаются на практике редко (в произведенных нами расчетах погрешность оценки не превышала 50%).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Условие существования приближенного решения

1. Пусть функция h(t) аппроксимируется функцией $h_{3m}(t)$ *m*-го порядка приближения ($m < n \ge 1$), где

$$h(t) \leftarrow \hat{h}(p) = \frac{1}{pA_n(p)} = \frac{1}{p(1+a_1p+\ldots+a_np^n)};$$
 (II.1.1)

$$h_{3m}(t) \leftarrow h_{3m}(p) = \frac{e^{-pt_{3m}}}{pB_m(p)} = \frac{e^{-pt_{3m}}}{p(1+b_1p+\ldots+b_mp^m)}. \quad (\Pi.1.2)$$

В соответствии с принятым в гл. 1, п. 1, все коэффициенты a_i (i=1, 2, ..., n) полинома $A_n(p)$ вещественны, причем

$$a_1 > 0; a_2 > 0; \ldots; a_n > 0.$$
 (II.1.3)

Соотношение всех коэффициентов полинома $A_n(p)$ определяется n-1 положительными безразмерными параметрами (см. § 4, п. 7):

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2}; \ \lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3}; \dots \lambda_{n-1} = \frac{a_n}{a_1^n}.$$
 (П.1.3a)

Для возможности существования аппроксимирующей функции $h_{3m}(t)$, которая так же, как и функция h(t), должна выражать диссипативный процесс, по крайней мере, необходимо, чтобы все коэффициенты b_j (j=1, 2, ..., m) полинома $B_m(p)$ были вещественны, причем должны выполняться в с е неравенства

$$b_1 > 0; b_2 > 0; \ldots; b_m > 0.$$
 (II.1.4)

Вещественным и положительным должно быть также и запаздывание t_{3m} .

Выясним условия выполнения всех неравенств (П.1.4). При этом, поскольку согласно формулам (1.27) коэффициенты b_j зависят от запаздывания t_{am} , установим правило выбора надлежащего корня $t_a = t_{am}$ уравнения (m+1)-й степени $F_{m+1}(t_a) = 0$, выражаемого равенством (1.26).

2. Предварительно рассмотрим некоторые свойства двух функций аргумента t_2 : функции $F_{m+1}(t_3)$ и функции $b_j(t_3)$, выражаемой равенствами (1.27), в которых заменим t_{3m} на t_3 . При этом будем полагать, что аргумент t_2 может принимать любое положительное значение. Поэтому функция $b_j(t_3)$ выражает коэффициенты b_j изображения (П.1.2) лишь при $t_3 = t_{3m}$, где t_{3m} — надлежащий корень уравнения (1.26).

Первое важное свойство рассматриваемых функций заключается в том, что функция $F_{m+1}(t_3)$ при m+1=k однозначно определяет функцию $b_j(t_3)$ при j=k. Действительно, из выражений (1.26) и (1.27) следует, что

$$F_{1}(t_{3}) = t_{3} - a_{1} = -b_{1}(t_{3});$$

$$F_{2}(t_{3}) = \frac{t_{3}^{2}}{2!} - a_{1}t_{3} + a_{2} = b_{2}(t_{3});$$

$$F_{3}(t_{3}) = \frac{t_{3}^{3}}{3!} - \frac{a_{1}t_{3}^{2}}{2!} + a_{2}t_{3} - a_{3} = -b_{3}(t_{3});$$

$$(\Pi.1.5)$$

В общем виде можно записать:

$$F_{h}(t_{3}) = (-1)^{h} b_{h}(t_{3}) \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (\Pi.1.6)$$

Второе важное свойство заключается в том, что

$$\frac{dF_{k+1}(t_{s})}{dt_{s}} = F_{k}(t_{s}) \quad (k = 1, 2, ...). \quad (\Pi.1.7)$$

Далее, непосредственно из выражений (П.1.5) и неравенств (П.1.3) вытекает, что уравнение $F_{m+1}(t_3) = 0$ не может иметь отрицательных вещественных корней. Следовательно, при нечетном k = m+1 (при четном m) это уравнение имеет по крайней мере один вещественный положительный корень.

Наконец, из выражений (П.1.5) и неравенств (П.1.3) следует, что начальные значения функций

$$F_1(0) < 0; F_2(0) > 0; F_3(0) < 0; \dots$$
 (II.1.8)

3. Проанализируем свойства корней уравнения $F_{m+1}(t_3) = 0$ из рассмотрения графиков семейства функций $F_k(t_3)$ (k=1, 2, ...). Такой подход оказывается наиболее простым и наглядным.

Характерные особенности семейства функций $F_h(t_3)$ определяются соотношением коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_h$. Показанные ниже на рис. П.1.1 и П.1.2 графики 5 семейств охватывают все интересующие нас свойства функции $F_h(t_3)$.

Графики каждого семейства расположены один над другим. Они построены с учетом соотношений (П.1.7) и (П.1.8). В соответствии с соотношением (П.1.7) в точках пересечения графика функции $F_k(t_3)$ с осью абсцисс (такие точки являются одиночными нулями этой функции) функция $F_{k+1}(t_3)$ имеет минимум (если в этой точке производная $dF_k/dt_3>0$) или максимум (если $dF_k/dt_3<0$). В точках же, в которых функция $F_k(t_3)$ экстремальна, функция $F_{k+1}(t_3)$ имеет точку перегиба. Эти свойства позволяют выяснить поведение функции $F_{k+1}(t_3)$ по поведению функции $F_k(t_3)$. Поэтому, хотя на рис. П.1.1 и П.1.2 приводятся только 4 графика каждого семейства, тем не менее, применяя метод индукции, можно выяснить интересующие нас свойства остальных графиков семейства (для k > 4).

Благодаря свойству, выражаемому равенством (П.1.6), из рассмотрения графиков какого-нибудь семейства легко определить в любой точке t_3 знак всех функций $b_j(t_3)$, для которых j < k = m + 1. Так, например, из рассмотрения семейства, приведенного на рис. П.1.1., б, видно, что при k=3 (чему соответствует m=2) в точке $t_3=t_{329}$, где функция $F_3(t_3)$ имеет минимум, $b_2=0$, а $b_1=$ =-AB<0. Заметим, что точка t_{329} определяет также некоторые значения $b_3=-F_3(t_{329})$ и $b_4=F_4(t_{329})$, но эти значения несущественны для приближения порядка m=2.

4. Линейная функция $F_1(t_3) = -b_1(t_3)$, выражаемая первой формулой (П.1.5), определяет единственный, всегда положительный корень $t_3 = t_{30} = a_1 > 0$ уравнения $F_1(t_3) = 0$. Эта линейная функция фигурирует во всех семействах, приведенных на рис. П.1.1 и П.1.2. Свойства функции $F_1(t_3)$ предопределяют обязательное наличие минимума в точке $t_3 = a_1$ параболической функции $F_2(t_3) = b_2(t_3)$, выражаемой второй формулой (П.1.5).

Два корня уравнения $F_2(t_3) = 0$ могут быть как вещественными, так и комплексными:

$$t_{a_1} = a_a \left(1 - \sqrt{1 - 2\lambda_1}\right); \ t^*_{a_1} = a_1 \left(1 + \sqrt{1 - 2\lambda_1}\right). \ (\Pi.1.9)$$

На рис. П.1.1 изображены два семейства функции $F_k(t_3)$ в случае, когда корни (П.1.9) вещественны и различны ($\lambda_1 < 0.5$), а на рис. П.1.2 изображены три семейства функции $F_k(t_3)$ в случае, когда корни (П.1.9) комплексны или кратны ($\lambda_1 \ge 0.5$).

Рассмотрим каждое из этих семейств в отдельности. 5 На рис П 1 д изображены графики семейства

5. На рис. П.1.1, а изображены графики семейства функций $F_k(t_3)$ для случая, когда при любом k все корни уравнения $F_k(t_3) = 0$ некратны, вещественны и, следовательно, положительны. Однако не все такие корни



Рис. П.1.1. Семейства функций F_k(t_a) при существовании приближений порядков m ≤ 2.

удовлетворяют приближению порядка m=k-1. Приближению порядка m удовлетворяют только такие корни $t_3=t_{3m}$, которые обеспечивают выполнение всех неравенств (П.1.4). Непосредственно из рис. П.1.1, а видно, что при любом m этому требованию удовлетворяет толь-



Рис. П.1.2. Семейства функций F_k(t₀) при отсутствии приближения порядка m=1.

ко наименьший вещественный корень уравнения $F_{m+1}(t_3) = 0$. Так, из двух корней $F_2(t_3) = 0$ только корень t_{31} дает $b_1 = -F_1(t_{31}) > 0$, в то время как $-F_1(t_{31}) < 0$; заметим также, что $t_{31} < t_{30} = a_1$. Из трех корней уравнения $F_3(t_3) = 0$ только наименьший корень t_{32} дает $b_2 > 0$ и $b_1 > 0$; в точке же t_{32}^* имеем $b_1 > 0$, но $b_2 < 0$, а в точке t^*_{32} получается $b_2 > 0$, но $b_1 < 0$. Заметим, что наименьший корень $t_{32} < t_{31}$. Аналогичное положение 152

справедливо и в отношении корней уравнения $F_4(t_3) = 0$: здесь только наименьший корень t_{33} удовлетворяет всем неравенствам (П.1.4) ($b_3 > 0$, $b_2 > 0$, $b_1 > 0$), причем $t_{33} < t_{32}$.

Продолжая эти рассуждения и используя метод индукции, можно прийти к выводу: если все корни уравнений $F_k(t_3) = 0$ (k=1, 2, ..., m+1) вещественны и некратны, то только наименьший корень $t_3 = t_{3m}$ уравнения $F_{m+1}(t_3) = 0$ удовлетворяет в сем неравенствам (П.1.4), что необходимо для существования приближения порядка *m*; при этом наименьшие корни $t_{3,k-1}$ уравнений $F_k(t_3) = 0$ $(k \le m+1)$ удовлетворяют неравенствам

 $0 < t_{3m} < t_{3, m-1} < \dots < t_{31} < t_{30} = a_1. \qquad (\Pi.1.10)$

Выполнение этих неравенств находится в соответствии с тем, что с возрастанием порядка *m* приближения улучшается качество приближения $h_{3m} \sim h$ (при m=n запаздывание $t_{3m}=0$ и $h_{3m}=h$).

6. На рис. П.1.1,б рассматривается случай, когда два из трех корней уравнения $F_3(t_3) = 0$ комплексны, а третий вещественный корень $t^*_{32} > a_1$. В этом случае уравнение $F_4(t_3) = 0$ может иметь не более двух вещественных корней $(t_{33} \ u \ t^*_{33})$, так как точки $t_{31} \ u \ t^*_{31}$ являются точками перегиба функции $F_4(t_3)$. Из рис. П.1.1,б видно, что корень $t^*_{32} > a_1$ (и, значит, подавно $t^*_{32} > t_{31}$) не удовлетворяет неравенству $b_1 > 0$, ввиду чего приближение порядка m=2 не существует (соответствующая этому случаю кривая $F_3(t_3)$ показана пунктиром). Однако приближение порядка m=3 в рассматриваемом случае существует, причем ему удовлетворяет только наименьший вещественный корень t_{33} уравнения $F_4(t_3) = 0$ (второй корень t^*_{33} дает $b_3 < 0$ и $b_1 < 0$).

7. На рис. П.1.2 изображены графики трех семейств функций $F_h(t_3)$, соответствующие $\lambda_1 \ge 0.5$, ввиду чего приближение порядка m=1 не существует. Графики, соответствующие отсутствию приближения порядка m=-k-1, показаны на рис. П.1.2 пунктиром. В каждом из рассматриваемых на рис. П.1.2 случаев функция $F_3(t_3)$ представляет собой кубическую параболу, причем уравнение $F_3(t_3) = 0$ имеет только один вещественный корень, так как точка $t_3 = a_1$ является точкой перегиба функции $F_3(t_3)$.

Приведенное на рис. П.1.2, а семейство соответствует случаю, когда уравнение $F_3(t_3) = 0$ имеет единственный вещественный корень $t_{32} < a_1$, что при $\lambda_1 \ge 0.5$ необходимо для существования приближения порядка m = 2, так как при этом $b_2 > 0$ и $b_1 > 0$.

Приведенное на рис. П.1.2,6 семейство соответствует случаю, когда уравнение $F_3(t_3) = 0$ имеет единственный вещественный корень $t^*_{32} > a_1$, ввиду чего приближение порядка m=2 не существует ($b_1 < 0$). Здесь возможен также случай, когда $t^*_{32} = a_1$ и $b_1 = 0$; в этом граничном случае функция $h_{32}(t)$ выражает стационарные гармонические колебания (при $b_1 < 0$ амплитуда колебаний нарастает во времени).

В приведенном на рис. П.1.2, в семействе уравнение $F_3(t_3) = 0$ имеет вещественный корень $t^{**}{}_{32} = a_1$ [эта точка является кратным нулем функций $F_3(t_3)$ и $F_2(t_3)$]; здесь приближение порядка m=2 (так же как и приближение порядка m=1) вырождается в приближение порядка m=0.

В каждом из рассматриваемх на рис. П.1.2 случаев приближение порядка m=3 существует только тогда, когда уравнение $F_4(t_3) = 0$ имеет два различных вещественных корня; при этом только наименьший корень обеспечивает выполнение всех неравенств (П.1.4): $b_3 > 0$, $b_2 > 0$ и $b_1 > 0$.

8. Представленные на рис. П.1.1 и П.1.2 графики охватывают все комбинации параметров $a_i > 0$, существенные для выяснения возможности существования приближения любого порядка $m \leq 3$. Хотя приближения более высокого порядка представляют ограниченный интерес, тем не менее (поскольку рассмотренные семейства кривых позволяют это легко сделать) сформулируем общие условия существования приближения любого порядка m.

Приближение порядка m=0 существует всегда. Приближению порядка m>0 может удовлетворить только наименьший вещественный (являющийся всегда положительным) корень $t_3=t_{3m}$ уравнения $F_{m+1}(t_3)=0$.

Для существования приближения порядка m > 0необходимо, чтобы наименьший вещественный корень t_{3m} уравнения $F_{m+1}(t_3) = 0$ удовлетворял неравенству $t_{3m} < t_{3\overline{m}}$; здесь $t_{3\overline{m}}$ корень уравнения $F_{\overline{m}+1}(t_3) = 0$, удовлетворяющий приближению порядка \overline{m} , ближайшего к $m > \overline{m}$. 154 Исходя из сформулированных выше условий, из рассмотрения приведенных на рис. П.1.1 и П.1.2 графиков можно заключить, что для существования приближения порядка m необходимо, чтобы в точке $t_{3\overline{m}}$ знак функции $F_{m+1}(t_3)$ был противоположен знаку $F_{m+1}(0)$.

В соответствии с этим должно выполняться неравенство $F_{m+1}(t_{3\overline{m}}) \cdot F_{m+1}(0) < 0$. Тогда на интервале $(0, t_{3\overline{m}})$ должна находиться точка $t_{3m}(0 < t_{3m} < t_{3\overline{m}})$, в которой $F_{m+1}(t_{3m}) = 0$, что согласно изложенному выше и необходимо для существования приближения порядка *m*. Учитывая теперь неравенства (П.1.8), получим неравенство

$$(-1)^{m}F_{m+1}(t_{3\overline{m}}) > 0,$$
 (II.1.11)

выполнение которого необходимо для существования приближения порядка m>0. Вытекающие из неравенства (П.1.11) необходимые конкретные условия существования приближений порядка $m \leq 3$ рассматриваются ниже.

9. Условие существования приближения порядка m=1. В данном случае приближение порядка $\bar{m}=0$, которое существует, является ближайшим к приближению порядка m=1, причем $t_{3m}=t_{30}=a_1$. Отсюда в соответствии с соотношением (П.1.11) необходимое условие выражается неравенством

$$F_2(a_1) = 0,5a_1^2 - a_1^2 + a_2 < 0$$

или

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1^2} < \frac{1}{2} = \lambda_{1, \text{kp}}.$$
 (П.1.12)

Этот результат в рассматриваемом простейшем случае вытекает также непосредственно из равенств (П.1.9), так как должно выполняться $b_1 = a_1 - t_{31} > 0$.

10. Условие существования приближения порядка m=2. Здесь следует различать два подслучая: приближение 1-го порядка не существует или существует.

а) Приближение 1-го порядка не существует $(\lambda_1 \ge 0.5)$. В этом случае (см. рис. П.1.2, *a*), как и в п. 9,

 $\overline{m} = 0$ и $t_{3\overline{m}} = t_{30} = a_1$. Отсюда в соответствии с формулой (П.1.11) необходимое условие выражается неравенством

$$F_{s}(a_{1}) = \frac{a_{1}^{3}}{3!} - \frac{[a_{1}^{3}]}{2!} + a_{1}a_{2} - a_{s} > 0,$$

которое после деления всех членов на a_1^3 приводится к виду

$$\lambda_2 = \frac{a_3}{a_1^3} < \lambda_1 - \frac{1}{3} = \lambda_{21, \mathrm{Kp}} \left(\lambda_1 \ge \frac{1}{2}\right). \quad (\Pi.1.13)$$

б) Приближение 1-го порядка существует ($\lambda_1 < 0,5$). В этом случае (см. рис. П.1.1, *a*) $\overline{m} = 1$ и $t_{am} = t_{a1}$. Отсюда согласно соотношению (П.1.11) необходимое условие выражается неравенством

$$F_{\mathbf{3}}(t_{\mathbf{3}\mathbf{1}}) = \frac{t_{\mathbf{3}\mathbf{1}}^3}{3!} - a_{\mathbf{1}} \frac{t_{\mathbf{3}\mathbf{1}}^2}{2!} + a_{\mathbf{2}}t_{\mathbf{3}\mathbf{1}} - a_{\mathbf{3}} > 0.$$

Подставляя сюда выражение t₃₁ из первой формулы (П.1.9), после некоторых преобразований получим

$$\lambda_{2} = \frac{a_{3}}{a_{1}^{3}} < \lambda_{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - 2\lambda_{1})^{3}} = \lambda_{22, \text{Kp}} \left(\lambda_{1} < \frac{1}{2}\right).$$
(II.1.14)

Это соотношение путем разложения радикала в ряд можно привести к виду

$$\lambda_{a} < \lambda_{22, \kappa p} = \frac{\lambda_{1}^{2}}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{1}}{3} + \frac{\lambda_{1}^{2}}{4} + \cdots \right).$$
 (П.1.15)

При $\lambda_1 = \lambda_{1, \text{ кр}} = 0,5$ выражаемые формулами (П.1.13) и (П.1.14) критические значения параметра λ_2 совпадают, т. е.

$$\lambda_{21,KP} = \lambda_{22,KP} = \frac{1}{6} \left(\lambda_1 = \frac{1}{2}\right). \quad (\Pi.1.16)$$

Интересно отметить, что имеет принципиальное значение (см. § 4, п. 10), одно обстоятельство: равенство $\lambda_2 = \lambda_{22, \text{ кр}}$ получается при таком значении a_3 , которое в точности совпадает со значением $c_{m+2} = c_3$, выражаемым формулой (1.7). В этом можно убедиться подстановкой в формулу (1.7) выражения t_{31} из первой формулы (П.1.9) и равенства $b_1 = a_1 - t_{31}$.

11. Условие существования приближения порядка m=3. Здесь следует различать 3 рассматриваемых ниже подслучая.

а) Приближения 1-го и 2-го порядка не существуют. В этом случае в соответствии с формулами (П.1.12) и (П.1.13) выполняются соотношения

$$\lambda_1 \geq 1/2, \quad \lambda_2 \geq \lambda_1 - 1/3, \quad (\Pi.1.17)$$

и (см. рис. П.1.2, б) приближение порядка $\vec{m} = 0$ ($t_{-} = a_1$),

которое существует, является ближайшим к приближению порядка m=3. Отсюда согласно формуле (П.1.11) необходимое условие выражается равенством

$$F_{4}(a_{1}) = \frac{a_{1}^{4}}{4!} - \frac{a_{1}^{4}}{3!} + \frac{a_{1}^{2}a_{2}}{2!} - a_{1}a_{3} + a_{4} < 0,$$

которое после разделения на a_1^4 и некоторых преобразований приводится к виду

$$\lambda_{3} = \frac{a_{4}}{a_{1}^{4}} < \lambda_{31, \text{Kp}} = \lambda_{2}^{\mu} + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_{1}}{2}. \qquad (\Pi.1.18)$$

Ввиду выполнения неравенств (П.1.17) правая часть неравенства (П.1.18) всегда положительна (она не менее $1/2_{24}$).

б) Приближение 2-го порядка не существует, но существует приближение 1-го порядка. В этом случае в соответствии с формулами (П.1.12) и (П.1.14) выполняются соотношения

$$\lambda_1 < \frac{1}{2}, \ \lambda_2 \ge \lambda_1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \dot{V} (\overline{1 - 2\lambda_1})^3$$
 (П.1.19)

и $\overline{m} = 1$. Отсюда (см. рис. П.1.1, б) $t_{3\overline{m}} = t_{31}$. Следовательно, согласно формуле (П.1.11) необходимое условие выражается неравенством $F_4(t_{31}) < 0$. Подставляя сюда выражение t_{31} из первой формулы (П.1.9), после некоторых преобразований получим необходимое условие в виде

$$\lambda_{3} = \frac{a_{4}}{a_{1}^{4}} < \lambda_{32, \text{kp}} = \xi \left(\lambda_{2} - \frac{\xi \lambda_{1}}{2} + \frac{\xi^{2}}{6} - \frac{\xi^{3}}{24} \right), \quad (\Pi.1.20)$$

где

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{1} \overline{\boldsymbol{1} - 2\boldsymbol{\lambda}_{1}} = \boldsymbol{\lambda}_{1} \left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_{1}}{2} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_{1}^{2}}{2} + \frac{5\boldsymbol{\lambda}_{1}^{3}}{8} + \cdots \right)$$
(П.1.21)

Подставляя последнее разложение в формулу (П.1.20), получим

$$\lambda_{3} < \lambda_{32, \mathrm{xp}} = \lambda_{1} \left(1 + \frac{\lambda_{1}}{2} + \frac{\lambda_{1}^{2}}{2} + \cdots \right) \left(\lambda_{2} - \frac{\lambda_{1}^{2}}{3} - \frac{\lambda_{1}^{3}}{8} + \cdots \right)$$
(П.1.22)

в) Приближение 2-го порядка существует. В этом случае $\overline{m} = 2$, $t_{3m} = t_{32}$ и в зависимости от того, существует или не существует приближение 1-го порядка, справедливо соотношение (П.1.14) или (П.1.13). Но независимо от этого в обоих случаях согласно формуле (П.1.11) необходимое условие выражается неравенством $F_4(t_{32}) < 0$, где $t_{32} < a_1$ — наименьший вещественный корень уравнения $F_3(t_3) = 0$. Способы нахождения этого корня изложены в § 2, пп. 4 и 6. После подстановки значения t_{32} в неравенство $F_4(t_{32}) < 0$ и некоторых алгебраических преобразований необходимое условие приводится к виду

$$\lambda_{3} = \frac{a_{4}}{a_{1}^{4}} < \lambda_{33, \text{kp}} = \frac{t_{32}}{a_{1}} \left[\frac{3\lambda_{2}}{4} - \frac{\lambda_{1}t_{32}}{4a_{1}} + \frac{t_{32}^{2}}{24a_{1}^{2}} \right]. \quad (\Pi.1.23)$$

В данном случае также можно убедиться в том, что равенство $\lambda_3 = \lambda_{33, \text{ кр}}$ получается при значении $a_4 = c_4 = c_{m+2}$, где c_{m+2} выражается последним равенством системы (1.7).

12. Определение необходимого условия существования приближения порядка m>3, исходя из неравенства (П.1.11), не связано с принципиальными трудностями. Единственным техническим затруднением является нахождение наименьшего вещественного корня уравнения $F_{\overline{m}+1}(t_3) = 0$, где $\overline{m}+1 \ge 4$. В этом случае целесообразно воспользоваться формулами Ньютона и рекомендациями, приведенными в § 2.

13. Выше были сформулированы необходимые условия существования приближения того или иного порядка. Являются ли эти условия достаточными?

Даже если принять, что достижение определенной точности аппроксимации не накладывает ограничений на существование приближенного решения, все же необходимо потребовать, чтобы аппроксимирующая функция $h_{3m}(t)$ выражала диссипативный процесс, стремящийся при $t \rightarrow \infty$ к тому же стационарному значению, к которому стремится аппорксимируемая функция h(t). Для этого, вообще говоря, недостаточно выполнение неравенств (П.1.4), а необходимо, кроме того, чтобы коэффициенты b_j удовлетворяли условиям, вытекающим из *теоремы Гурвица* [16].

Не останавливаясь здесь на анализе довольно громоздких в общем случае определителей, фигурирующих в условиях Гурвица, рассмотрим достаточные в указанном выше смысле условия существования приближенного решения $h_{3m}(t)$ при $m \leq 4$, так как применение приближений более высокого порядка малоцелесообразно.

При $m \leq 2$ условия теоремы Гурвица выполняются при $b_j > 0$. Поэтому полученные выше необходимые условия существования приближенного решения порядка $m \leq 2$ оказываются также и достаточными.

При m=3 дополнительное условие, вытекающее из теоремы Гурвица, заключается в выполнении неравенства $b_3 < b_1 b_2$. Подставляя значения b_1 , b_2 и b_3 из формул (1.27), получим

$$\lambda_2 < \lambda_1 - \frac{t_{33}}{a_1} \left(1 - \frac{t_{33}}{a_1} + \frac{t_{33}^2}{3a_1^2} \right), \qquad (\Pi.1.24)$$

где t_{в3} — запаздывание, соответствующее приближению 3-го порядка:

Так как при всех обстоятельствах $t_{33} < a_1$, то наименьшее возможное значение правой части неравенства (П.1.24) все же более величины $\lambda_1 - \frac{1}{3}$. Отсюда можно прийти к выводу о том, что если приближение 2-го порядка существует, то выполнение неравенства (П.1.23) достаточно для существования также и приближения 3-го порядка. Заметим, что из условия диссипативности исходного сигнала h(t) должно выполняться неравенство $\lambda_2 < \lambda_1$. При m=4 дополнительное условие, вытекающее из теоремы Гурвица, заключается в выполнении двух неравенств:

$$b_{3} < b_{1}b_{2}; \ b_{4} < \left(\frac{b_{1}b_{2}}{b_{1}}\right)^{2} \left(\frac{b_{1}b_{2}}{b_{3}} - 1\right).$$
 (П.1.25)

В силу первого из написанных неравенств правая часть второго неравенства всегда положительна.

14. Если кроме условий, выражаемых неравенствами (П.1.4) и вытекающих из теоремы Гурвица, потребовать дополнительно, чтобы функция $h_{3m}(t)$ удовлетворяла некоторым минимальным требованиям к точности приближения $h_{3m}(t) \sim h(t)$, то окажется необходимым наложить дополнительные ограничения на аппроксимируемую функцию h(t). В частности, если потребовать, чтобы наибольшая «временная» погрешность аппроксимации, выражаемая формулой (1.31), не превышала граничных значений δ_{tr} (см. § 1, рис. 1.8 и 1.10), то, как это вытекает из приведенного в § 4 анализа, достаточно потребовать, чтобы коэффициенты a_i изображения (П.1.1) при $i \ge 4$ удовлетворяли соотношению $a_i \leqslant c_i$. Как указывалось в § 1, п. 13, это ограничение не является сильным.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Переходные характеристики идеализированного бездрейфового транзистора

1. Здесь имеются в виду сплавные транзисторы типа p-n-p, работающие при низких уровнях инжекции. Под идеализированным транзистором подразумевается плоскостной транзистор с пренебрежимо малыми объемными сопротивлениями, процессы в котором являются одномерными, зависящими от одной пространственной координаты x (рис. П.2.1), отсчитываемой в направлении, нормальном к плоским границам переходов. При этом, учитывая обычно имеющее место резкое различие равновесных концентраций неосновных носителей тока в эмиттере, базе и коллекторе 160 $(n_{20} \ll p_{60} \gg n_{K0})$, допустимо пренебречь электронными составляющими диффузионных токов, протекающих через переходы транзистора.

При указанных допущениях токи транзистора (без учета влияния барьерных емкостей переходов) определяются градиентами концентраций неосновных носителей тока (дырок) в базе на границах соответствующих переходов транзистора, причем закон изменения кон-



Рис. П.2.1. Направление отсчета пространственной координаты *х* в базе (*w* — толщина базы).

центрации дырок в базе (0 ≤ x ≤ w) описывается уравнением диффузии [10, 25]

$$\frac{\partial p_{\delta}}{\partial t} = -\frac{p_{\delta} - p_{\delta_0}}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p_{\delta}}{\partial x^2}, \qquad (\Pi.2.1)$$

где $p_6 = p_6(x, t)$ — концентрация дырок в базе (t>0); $p_{60} = p_6(x, 0)$ — равновесная концентрация дырок в базе; τ_p — эффективное время жизни дырок в базе; D_p — эффективный коэффициент диффузии дырок в базе.

Заметим, что $\sqrt{D_p \tau_p} = L_p - эффективная длина диф$ $фузии дырок в базе, причем <math>L_p \gg w$.

В целях упрощения решения уравнения (П.2.1) часто принимается, что одно из двух граничных условий, которому должно удовлетворять это решение, выражается равенством

$$p_6(w, t) = p_{60} = \text{const.}$$
 (П.2.2)

11-2247

161

В действительности $p_6(w, t) \neq \text{const}$ [при активном режиме работы отпираемого транзистора справедливы неравенства: $0 < p_6(w, t) < p_{60}$], и учет этого непостоянства делает задачу определения переходной характеристики транзистора нелинейной. Однако если входной сигнал не очень слаб, то с умеренной погрешностью можно принять граничное условие (П.2.2), что в дальнейшем имеется в виду.

Второе граничное условие, которому должно удовлетворять решение уравнения (П.2.1), определяется условиями работы входной цепи транзистора. При этом в дальнейшем пренебрегается малой величиной обратного тока I_{к0} запертого транзистора.

2. При отпирании транзистора перепадом тока эмиттера $i_3 = I_3 \cdot 1(t)$ ($I_3 = \text{const}$, причем ток I_3 не вводит транзистор в насыщение) второе граничное условие (в пренебрежении влиянием барьерных емкостей переходов) определяется равенством

$$-q_e SD_p \frac{\partial p_{\mathfrak{s}}(0,t)}{\partial x} = \gamma_p I_{\mathfrak{d}}, \qquad (\Pi.2.3)$$

где $q_e = 1,59 \cdot 10^{-19}$ к — заряд электрона; S — площадь поверхности переходов транзистора; $\gamma_p \simeq 1$ — коэффициент инжекции дырок в базу (в данном случае пренебрежение электронной составляющей тока эмиттера является излишним, не приводящим к упрощению решения).

Из решения уравнения (П.2.1), удовлетворяющего граничным условиям (П.2.2) и (П.2.3), можно получить операционное уравнение переходной характеристики для коллекторного тока транзистора [25]:

$$\hat{h} \stackrel{\wedge}{\Longrightarrow} \hat{h}(p) \stackrel{\wedge}{\Longrightarrow} \frac{\hat{I}_{\kappa}}{I_{3}} \stackrel{\gamma_{p}}{=} \frac{\gamma_{p}}{p \operatorname{ch}\left(\delta \sqrt{1+p\tau_{p}}\right)} \stackrel{\wedge}{=} \frac{\hat{\alpha}(p)}{p}, \quad (\Pi.2.4)$$

где

$$\delta = w/L_p \ll 1. \tag{\Pi.2.5}$$

Решение уравнения (П.2.4), являющегося классическим в теории транзистора, имеет вид

$$h = h(t) = \frac{i_{\text{R}}}{I_{3}} = a_{0} \left[1 - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s}}{\psi_{s}} e^{-t/T_{s}} \right], \quad (\Pi.2.6)$$

где

$$T_{s} = \frac{4\delta^{2}\tau_{p}}{(2s+1)^{2}\pi^{2}+4\delta^{2}} \quad (s = 0, 1, 2, ...); \qquad (\Pi. 2.7)$$

$$\psi_s = \frac{(2s+1)\pi}{4} + \frac{\delta^2}{(2s+1)\pi};$$

α0 — коэффициент передачи тока эмиттера; и — коэффициент переноса дырок сквозь базу, причем

$$\varkappa = \frac{\alpha_0}{\gamma_p} = \frac{1}{\operatorname{ch} \delta} = \left[1 + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} + \cdots\right]^{-1}. \quad (\Pi.2.8)$$

График функции (П.2.6) изображен на рис. 3.1 (см. § 3, п. 1), где приводится также график приближенного решения уравнения (П.2.4).

3. При отпирании транзистора перепадом тока базы $i_6 = I_6 \cdot 1(t)$ ($I_6 = \text{const}$, причем ток I_6 не вводит транзистор в насыщение) второе граничное условие (в пренебрежении влиянием барьерных емкостей переходов) определяется равенством $i_9 - i_R = I_6$, откуда

$$-q_e SD_p \left[\frac{\partial p_6(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial p_6(w,t)}{\partial x} \right] = I_6, \quad (\Pi.2.9)$$

где ради упрощения принято $\gamma_p = 1$.

Из решения уравнения (П.2.1), удовлетворяющего граничным условиям (П.2.2) и (П.2.9), можно получить операционное уравнение переходной характеристики транзистора *

$$\hat{h} = \frac{\hat{h}_{\mathbf{x}}}{I_{\mathbf{6}}} = \frac{1}{p \left[\operatorname{ch} \left(\mathbf{\delta} \, \mathbf{V} \, \overline{\mathbf{1} + p \tau_{\mathbf{p}}} \right) - 1 \right]} = \frac{\hat{h}(p)}{p}. \quad (\Pi.2.10)$$

Уравнение (П.2.10) можно также получить из известного соотношения $\hat{\beta}(p) = \hat{\alpha}(p)/[1 - \hat{\alpha}(p)]$, где $\hat{\alpha}(p)$ определяяется равенством (Π.2.4). 11

163

Решение уравнения (П.2.10) имеет вид*)

$$h = h(t) = \frac{i_{\pi}}{I_{6}} = \beta_{0} - \frac{2}{\delta^{2}} e^{-t/\tau_{p}} + \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{s}(t), \quad (\Pi.2.11)$$

где

$$\psi_{s}(t) = \frac{32\pi^{2}s^{2} e^{-p_{s}t}}{4\pi^{2}s^{2} + \delta^{2}} \left(\frac{t}{\delta^{2}\tau_{p}} + \frac{1}{4\pi^{2}s^{2} + \delta^{2}} - \frac{1}{8\pi^{2}s^{2}}\right); \quad (\Pi.2.12)$$

$$p_{s} = \frac{1}{\tau_{p}} \left(1 + \frac{4\pi^{2}s^{2}}{\delta^{2}} \right);$$
 (П.2.12a)

 β_0 — коэффициент усиления тока базы в схеме с общим эмиттером, причем с учетом того, что $\gamma_p = 1$, принято [10, 25]

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\delta-1} = \frac{x}{1-x} = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} = \beta_0. \qquad (\Pi.2.13)$$

График функции (П.2.11) изображен на рис. 3.3 (см. § 3, п. 3), где приводится также график приближенного решения уравнения (П.2.10).

4. При отпирании транзистора перепадом входного напряжения (между эмиттером и базой) $u_{96} = U_{96} \cdot 1(t)$ ($U_{96} = \text{const}$, причем напряжение U_{96} не вводит транзистор в насыщение) второе граничное условие (в пренебрежении влиянием барьерных емкостей переходов) определяется равенством

$$p_{\mathbf{6}}(0,t) = p_{\mathbf{6}_0} e^{U_{\mathbf{3}\mathbf{6}}/\varphi_T},$$
 (П.2.14)

где $\varphi_T = kT/q_e$ — температурный потенциал; $k = 8,6 \cdot 10^{-5}$ эв/град — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

Из решения уравнения (П.2.1), удовлетворяющего граничным условиям (П.2.2) и (П.2.14), можно получить операционное уравнение

^{*} Подробное решение этого уравнения приводится в работе Я. С. Ицхоки и Н. И. Овчинникова (1969).

$$\hat{i}_{\mathbf{x}} = \hat{i}_{\mathbf{x}}(p) = \frac{\delta \sqrt{1 + p\tau_p}}{p \operatorname{sh}(\delta \sqrt{1 + p\tau_p})} I, \qquad (\Pi.2.15)$$

где

$$I = qSD_p \frac{p_{6_0}}{w} \left(e^{U_{36}/\varphi_T} - 1 \right) = \text{const.}$$

Из решения уравнения (П.2.15) получается следующий закон нарастания относительной величины тока коллектора:

$$h = h(t) = \frac{i_{\mathbf{x}}}{i_{\mathbf{x}}(\infty)} = 1 + \frac{2}{x_1} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{s^2 \pi^2 e^{-t/T_s}}{s^2 \pi^2 + \delta^2}, \quad (\Pi.2.16)$$

где $i_{\mathbf{k}}(\infty) = I_{\mathbf{X}_1}$ и

$$\varkappa_{1} = \left[1 + \frac{\delta^{2}}{3!} + \frac{\delta^{4}}{5!} + \cdots\right]^{-1} \cong 1; \qquad (\Pi.2.17)$$

$$T_{s} = \frac{\delta^{2} \tau_{p}}{s^{2} \pi^{2} + \delta^{2}} \quad (s = 1, 2, ...). \quad (\Pi.2.18)$$

График функции (П.2.16) изображен на рис. 3.2 (см. § 3, п. 2), где приводится также график приближенного решения уравнения (П.2.15).

5. На рис. П.2.2 изображена ключевая схема с общим эмиттером, содержащая нагрузочную емкость С_н.

Рис. П.2.2. Ключевая схема с общим эмиттером.



Переходный процесс в ключевой схеме обусловлен в основном процессом накопления заряда в базе транзистора и влиянием как емкости нагрузки, так и барьерной емкости $C_{\rm k}$ коллекторного перехода, не фигурирующей в явном виде на схеме рис. П.2.2. (Влиянием барьерной емкости эмиттерного перехода можно практически пренебречь, так как изменения напряжения на этом пере-

ходе по крайней мере на порядок меньше изменений напряжения на коллекторном переходе) Величина барьерной емкости зависит от напряжения на коллекторном переходе [25], которое в ключевой схеме меняется от значения, близкого к $-E_{\kappa}$, почти до 0. С целью упрощения анализа нелинейная емкость C_{κ} заменяется эквивалентной емкостью \overline{C}_{κ} , величина которой равна усредненному (по диапазону изменений напряжения на переходе) значению емкости C_{κ} [27].

Из анализа процессов в ключевой схеме можно получить операционное уравнение для изображения тока i_R , протекающего через резистор R_{κ} [25]:

$$\hat{i}_{R} = \hat{i}_{R}(p) \Longrightarrow \frac{\hat{\beta} \hat{i}_{6}}{1 + pR_{\kappa} \left[C_{\kappa} \left(\hat{\beta} + 1 \right) \right]}, \quad (\Pi.2.19)$$

где $\hat{i}_6 = \hat{i}_6(p)$ — изображение тока базы, и получаемый из решения диффузионного уравнения (П.2.1) операци-онный коэффициент передачи

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}(p) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\delta \sqrt{1 + p\tau_p}\right) - 1}, \qquad (\Pi.2.20)$$

причем δ выражается равенством (П.2.5). Полагая, что транзистор отпирается перепадом тока базы $i_6 = I_6 \cdot 1(t)$ и подставляя изображение этого тока I_6/p и изображение (П.2.20) в уравнение (П.2.19), по-лучим операционное уравнение переходной характеристики для тока ів ключевой схемы:

$$\hat{h} = \hat{h}(p) = \frac{\hat{i}_R}{I_6} = \frac{1}{pN(p)},$$
 (П.2.21)

где

$$N(p) = [\operatorname{ch}(\delta \sqrt{1 + p\tau_{p}}) - 1] [1 + pR_{\kappa}(C_{\mu} + \bar{C}_{\kappa})] + pR_{\kappa}\bar{C}_{\kappa}.$$
(II.2.22)

Определение точного выражения оригинала (П.2.21) сопряжено с громоздкой задачей нахождения нулей функции (П.2.22) и определения вычетов функции (П.2.21) относительно этих точек. Получаемое в итоге этого решение оказывается очень громоздким. Все это не

оправдывается достигаемым уточнением полученного решения. В § 3,Б приводится значительно более простой способ определения приближенного выражения переходной характеристики h(t), которое практически совпадает с точным решением уравнения (П.2.21).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Переходная характеристика идеализированного дрейфового транзистора

1. Под идеализированным дрейфовым транзистором, так же как и в случае бездрейфового транзистора (см. приложение 2, п. 1), подразумевается плоскостной транзистор с одномерным характером протекания процессов без учета влияния емкостей переходов. Но, в отличие от бездрейфового транзистора, здесь предполагается, что в любом сечении базы транзистора ($0 \le x \le w$) действует электрическое поле, напряженность которого $E = \varphi_T / L_N = \text{const}$, где φ_T — температурный потенциал, а L_N — постоянная распространения примеси (донорной или акцепторной) в базе, концентрация которой изменяется по толщине базы по экспоненциальному закону [28]

$$N \Longrightarrow N(x) = N(0) e^{-x/L_N} \quad (0 \le x \le w). \tag{\Pi.3.1}$$

Различие граничных концентраций у эмиттерного $(N(0) = N_{3})$ и у коллекторного $(N(w) = N_{K})$ переходов отличается обычно по крайней мере на порядок. В соответствии с этим параметр

$$\eta = \frac{w}{2L_N} = \frac{1}{2} \ln \frac{N_{\vartheta}}{N_{\kappa}} \ge 1. \quad (\Pi.3.2)$$

Будем также предполагать, что токи дрейфового транзистора практически определяются только неосновными носителями тока в базе и что физические параметры базы постоянны (при неизменной температуре) и равны их средним по толщине базы эффективным значениям. Поэтому применительно к базе *n*-типа, которая ради конкретности изложения в дальнейшем имеется в виду, будем полагать постоянными следующие параметры (см. приложение 2, п. 1):

$$\tau_p = \text{const}; \ \mu_p = \text{const}; \ D_p = \varphi_r \ \mu_p = \text{const};$$

 $L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \text{const}, \ причем \ \delta = w/L_p \ll 1.$

2. При отпирании транзистора перепадом тока эмиттера $i_{\vartheta} = I_{\vartheta} \cdot 1(t)$, где $I_{\vartheta} = \text{const}$ не вводит транзистор в насыщение, можно, исходя из уравнения непрерывности, получить операционное уравнение переходной характеристики коллекторного тока [28]:

$$\hat{h} = \hat{h}(p) = \frac{1}{p} \frac{\gamma_{p} e^{\eta}}{\operatorname{ch} \chi + \frac{\eta}{\chi} \operatorname{sh} \chi}, \quad (\Pi.3.3)$$

где үр≈1 — коэффициент инжекции и

$$\chi = \chi(p) = w \sqrt{\frac{1}{4L_N^2} + \frac{1}{L_p^2} + \frac{p}{D_p}}.$$
 (II.3.3a)

Нахождение решения операционного уравнения (П.3.3) сопряжено с громоздкой процедурой вычисления положительных корней $j\chi = \chi_k$ трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \chi_{k} = -\frac{\chi_{k}}{\eta} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

после чего нормированное (относительно $h(\infty) = a_0$) решение уравнения (П.3.3) приводится к виду [29]

$$\frac{\hbar}{\alpha_{0}} = 1 + \frac{8}{\pi^{2}} e^{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{\sqrt{\chi_{k}^{2} (\chi_{k}^{2} + \eta^{2})} e^{-\xi_{k}^{2} \tau}}{\xi_{k}^{2} (\chi_{k}^{2} + \eta^{2} + \eta)}, \quad (\Pi.3.4)$$

где $\tau = t/\Theta$ — безразмерное время;

$$\theta = \frac{8\alpha_0}{\pi^2} \tau_D \tag{\Pi.3.5}$$

- постоянная времени нормировки;

$$\tau_D = \frac{w^2}{2D_p} \tag{\Pi.3.6}$$

время диффузии;

$$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{k}}^{2} = \frac{4\alpha_{0}}{\pi^{2}} \left(\chi_{\boldsymbol{k}}^{2} + \eta^{2} + \frac{w^{2}}{L_{\boldsymbol{p}}^{2}} \right). \tag{\Pi.3.7}$$

В области $\tau < 0,1$ решение (П.3.4) оказывается весьма громоздким.

На рис. 3.5 сплошной линией изображены заимствованные из работы Т. М. Агаханяна [29] графики нормированных переходных характеристик h/α_0 , соответствующих значениям параметра $\eta = 1$ и З.

Литература

- 1. Я. С. И ц х о к и. Импульсные устройства. Изд-во «Советское радио», 1959.
- Н. Ахиезер, М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. ГНТИ Украины, 1938.
- 3. И. Г. Мамонкин. Импульсные усилители. ГЭИ, 1958.
- 4. А. Г. Майер, Е. А. Леонтович. Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье. ДАН СССР, т. 4, вып. 7, 1934.
- W. C. Elmore. The Transient Response of Damped Linear Networks with Particular Regard to wideband Amplifiers, Journ. of Appl. Physics, v. 19, № 1, 1948.
- В. Элмор, М. Сендс. Электроника в ядерной физике. ИЛ, 1953.
- 7. Л. А. Меерович, Г. П. Тартаковский. К расчету временных и частотных характеристик многокаскадных систем. ЖТФ, т. 22, вып. 7, 1952.
- 8. Л. А. Меерович. К расчету немонотонных переходных функций многокаскадных систем. ЖТФ, т. 23, вып. 11, 1953.
- 9. С. Я. Шац. Транзисторы и основы их применения. Судпромгиз, 1960.
- С. Я. Шац. Транзисторы в импульсной технике. Судпромгиз, 1963.
- 11. Б. Н. Файзулаев. О связи параметров переходных характеристик транзисторов. Радиотехника, 1963, т. 18, № 4.
- Б. Н. Файзулаев. Полупроводниковые каскады в лереходном режиме. Изд-во «Связь», 1965.
- Г. К. Гаврилов. Приближенные методы анализа переходных процессов. Изд-во «Советское радио», 1966.
- 14. О. Б. Лурье. Усилители видеочастоты. Изд-во «Советское радио», 1955.
- В. А. Боднер, М. С. Козлов. Стабилизация летательных аппаратов. Оборонгиз, 1961.
- 15а. Ю. А. Рязанов. Проектирование систем автоматического регулирования. Машгиз, 1963.
- 16. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. ГИТТЛ, 1955.
- И. И. Конторович. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. «Наука», 1964.
- 18. А. А. Фельдбаум. Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, 1958; Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1959.
- З. Ш. Блох. Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Гостехиздат, 1952.

- В. Л. Загускин. Справочник по численным методам решения уравнений. Физматтиз, 1960.
- Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. Численные методы анализа. Физматгиз, 1962.
- 22. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
- Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. Физматгиз, 1962.
- 24. Я. Л. Геронимус. О применении методов Чебышева к задаче уравновешивания механизмов (гл. I, Необходимые сведения из теории наилучшего приближения). Гостехиздат, 1948.
- 25. И. П. Степаненко. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. «Энергия», 1967.
- 26. О. Б. Лурье. Нестационарные явления и искажения, вносимые усилителем. ЖТФ, т. 9, вып. 1, 1939.
- В. Н. Кононов. Симметричные тригтеры на плоскостных полупроводниковых триодах. ГЭИ, 1960.
- 28. Н. С. Спиридонов, В. И. Вертоградов. Дрейфовые транзисторы. Изд-во «Советское радио», 1964.
- 29. Т. М. Атаханян. Переходная характеристика коэффициента передачи тока дрейфового транзистора. НДВШ. «Радиотехника и электроника», 1958, № 1.
- 30. Б. В. Елизаров, Г. Н. Крылов, Г. И. Макаров. Построение переходного процесса при прохождении видеоимпульса через фильтр низкой частоты методом характерных точек. «Радиотехника», 1959, т. 14, № 10.

Оглавление

Предисловие		•	•	3
Введение		•	•	5
1. Основные положения				10
2. Рецептура приближенного анализа			•	49
3. Некоторые применения приближенного анализ	за			62
4. Погрешность аппроксимации			. 1	130
Приложение 1.				
Условие существования приближенного решени	я		. 1	l 4 8
Приложение 2.				
Переходные характеристики идеализированног дрейфового транзистора	0	бе:	3- . 1	160
Приложение 3.				
Переходная характеристика идеализированного фового транзистора	Į	ıpei	i- . 1	167
Литература		•	. 1	170

яков семенович ицхоки

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Редактор Н. Г. Заболоцкий Художественный редактор В. Т. Сидоренко Обложка художника Л. Г. Ларского Технический редактор Г. З. Шалимова Корректоры Л. И. Кирильченко, М. Ф. Белякова Сдано в набор 17/IV 1969 г. Подписано в печать 21/VII 1939 г. Т-06867 Формат 84×108¹/з₂ Бумага типографская № 2 Объем 9,24 усл. п. л. Уч.-изд. л. 8.584 Тираж 21.000 экз. Зак. 2247 Издательство "Советское радно", Москва, Главпочтамт, п/я 693 Московская типография № 10 Главполиграфпро

Московская типография № 10 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, Шлюзовая наб., 10.

,

Цена 43 коп.

.

ГОТОВЯТСЯ К ВЫПУСКУ в издательстве «Советское радио»

Величкин А. И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений.

В книге излагаются основы статистической теории дискретной передачи непрерывных сообщений. Рассматриваются системы связи, в которых непрерывные сообщения передаются при помощи дискретных сигналов, принимающих конечное число значений. Такие системы называются смешанными. К ним относятся известные системы с кодово-импульсной и дельта-модуляцией.

Особое внимание уделено преобразованию непрерывных сообщений в передаваемые дискретные сигналы на входе системы и принимаемых сигналов в оценке сообщений на выходе. Производится синтез систем связи, оптимальных по критерию минимума среднего квадрата ошибки передачи сообщений для дискретных каналов с заданными статистическими характеристиками. Дается методика расчета оптимальных значений основных параметров систем связи и анализируются их характеристики: средний квадрат ошибки передачи сообщений, корреляционная функция и спектральная плотность принятого сообщения.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, занимающихся проектированием и исследованием дискретных систем связи, телеметрии и телеуправления, а также для студентов и преподавателей вузов.

ицхоки

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ